

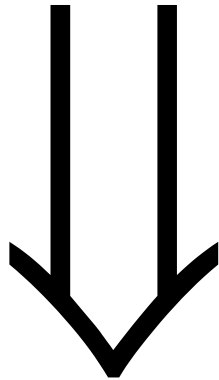
ΜΑΘΗΜΑ

05

Η ΣΗΜΑΣΙΑ ΤΟΥ ΘΕΜΕΛΙΩΔΟΥΣ ΝΟΜΟΥ

Μαθηματικοποίηση της Μηχανικής

Η τροχιά της κίνησης θεωρείται δεδομένη
(απλουστευτικά: αναφορά στον άξονα x)



$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$

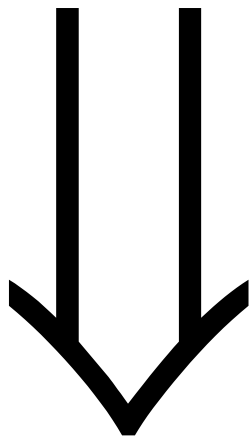
$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = v = v_0 + a t$$

$$\ddot{x} = \frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{dv}{dt} = a$$

$$F = m \cdot \ddot{x} = m \cdot a$$

Μαθηματικοποίηση της Μηχανικής (ολοκλήρωση)

Η δύναμη F θεωρείται σταθερή και δεδομένη
(απλουστευτικά: αναφορά μόνο στον άξονα x)



$$F = m \cdot a$$

$$a = \ddot{x} = \frac{F}{m}$$

$$\dot{x} = v = \int \frac{F}{m} dt = v_0 + \frac{F}{m} t$$

$$x = \int v dt = \int \left(v_0 + \frac{F}{m} t \right) dt = x_0 + v_0 t + \frac{F}{2m} t^2$$

Παράγωγα μεγέθη (από την αρχή δράσης)

Ορμή και Ώθηση

Ο θεμελιώδης νόμος μπορεί είτε να πολλαπλασιαστεί με τα διαφορετικά μεγέθη είτε να αναδιατυπωθεί. Δι αυτού δεν αλλοιώνεται η ισότητα ούτε μειώνεται η αξία του. Το ζήτημα είναι αν το προκύπτον μέγεθος έχει λογικότητα είτε όχι.

Δια αναδιατύπωσης είτε δια πολλαπλασιασμού με $d\mathbf{t}$ έπεται

$$\vec{F} = m \frac{d\vec{v}}{dt}$$

$$\Rightarrow \vec{F} \cdot dt = m \cdot d\vec{v} = d(m\vec{v}) = d\vec{p}$$

$$\text{Ώθηση } d\vec{\Omega} = \vec{F} dt \Rightarrow \vec{\Omega} = \int \vec{F} dt$$

$$\text{Ορμη } d\vec{p} \Rightarrow \mathbf{p} = \mathbf{p}_0 + m \int d\vec{v}$$

Αρχή μεταβολής της κινητικής ενέργειας

Έργο. Κινητική ενέργεια

Ο θεμελιώδης νόμος $\vec{F} = m \frac{d\vec{v}}{dt}$ πολλαπλασιάζεται με το διάστημα $d\vec{s} = \vec{v} dt$.

Έτσι προκύπτει $\vec{F} d\vec{s} = m \frac{d\vec{v}}{dt} \vec{v} dt = m \vec{v} d\vec{v} \Rightarrow dW = dE_k$

$$\int \vec{F} d\vec{s} = \int m \vec{v} d\vec{v} = \frac{1}{2} m v^2 \Big|_{v_0}^v \Rightarrow \Delta W = \Delta E_k$$

Το μέγεθος αριστερά είναι το έργο της δύναμης $W = \int \vec{F} d\vec{s}$

Το μέγεθος δεξιά είναι η μεταβολή της κινητικής ενέργειας με $E_k = \frac{1}{2} m v^2$

Αυτή είναι η αρχή μεταβολής της κινητικής ενέργειας.

Δυναμική ενέργεια

Το αποτέλεσμα του πολλαπλασιασμού με το διάστημα $d\vec{s} = \vec{v}dt$ διατυπώνεται στη μορφή $m\vec{v}d\vec{v} - \vec{F}d\vec{s} = 0$. Από την ολοκλήρωση προκύπτει

$$\frac{m}{2}v^2 - \int \vec{F}d\vec{s} = 0$$

είτε $\frac{m}{2}v^2 + \left(-\int \vec{F}d\vec{s}\right) = C$

όπου $E_{\Delta} = -\int \vec{F}d\vec{s}$ είναι η Δυναμική ενέργεια.

Ένταση πεδίου

Η ένταση πεδίου ορίζεται ως το πηλίκον από εξωτερική δύναμη και υπόθεμα.

Δύναμη	Υπόθεμα	Ένταση πεδίου
$\vec{F} = m \vec{g}$	m	$\vec{g} = \vec{F} / m$
$\vec{F} = m \cdot \gamma \frac{m_B}{4\pi r^2} \frac{\vec{r}}{r}$	m	$\vec{g} = \gamma \frac{m_B}{4\pi r^2} \frac{\vec{r}}{r}$
$\vec{F} = q \vec{E}$	q	$\vec{E} = \vec{F} / q$
$\vec{F} = q \frac{1}{\epsilon_0} \frac{Q}{4\pi r^2} \frac{\vec{r}}{r}$	q	$\vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{Q}{4\pi r^2} \frac{\vec{r}}{r}$

Δυναμικό

Το Δυναμικό ορίζεται ως πηλίκο από Δυναμική ενέργεια και υπόθεμα.

$$\varphi = \frac{E_{\Delta}}{\xi} = \frac{1}{\xi} \left(- \int \vec{F} d\vec{s} \right) = - \int \vec{E} d\vec{s}$$

$$\varphi = - \int \vec{E} d\vec{s}$$

όπου \vec{E} είναι η ένταση του πεδίου.

Η διαφορά δυναμικού καλείται τάση

(π.χ. $\Delta\varphi = U$ στον Ηλεκτρισμό).

Ισχύς

Η ισχύς είναι ένα μέγεθος που δεν προκύπτει άμεσα από το Θεμελιώδη νόμο αλλά από το έργο της δύναμης.

Ο ορισμός της ισχύος έχει ως εξής :

$$P = \frac{dW}{dt} = \frac{\vec{F}d\vec{s}}{dt} = \vec{F} \frac{d\vec{s}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

είτε
$$P = \dots\dots\dots = \frac{m \frac{d\vec{v}}{dt} \vec{v} dt}{dt} = m \frac{d\vec{v}}{dt} \vec{v} = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

Υπόδειξη : Στη ΔΕΗ δεν πληρώνουμε την ισχύ αλλά την ενέργεια (kWh)

Πίεση

Η πίεση είναι ένα μέγεθος που σχετίζεται άμεσα με την ασκούμενη δύναμη.

$$\text{Ορισμός : Πίεση } p = \frac{\text{Δύναμη}}{\text{Επιφάνεια}} = \frac{\vec{F}}{\vec{A}} = \frac{\vec{F} \vec{A}}{\vec{A} \vec{A}} = \frac{\vec{F}\vec{A}}{A^2} = \frac{F}{A}$$

Η σχέση της πίεσης με τη δύναμη μεταφέρεται και στα δυναμικά αποτελέσματα

Η μονάδα μέτρησης της πίεσης είναι το Pascale. $1\text{Pa} = 1 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$