ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟ ΙΔΡΥΜΑ
(Τ.Ε.Ι.) ΛΑΜΙΑΣ
Σχολή Τεχνολογικών Εφαρμογών (ΣΤΕΦ)
ΤΜΗΜΑ ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΚΗΣ
ΤΟΜΕΑΣ ΥΠΟΔΟΜΗΣ & ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ

ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
Το MATLAB
στα Μαθηματικά I, II, III

Εφαρμογές των βασικών εννοιών και υπολογιστικών διαδικασιών των Ανώτερων Μαθηματικών, με χρήση του λογισμικού MATLAB

ΔΙΔΑΚΤΙΚΕΣ ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ

ΣΥΓΓΡΑΦΕΙΣ:
Δρ. Θεοδώρου Ιωάννης, *Τακτικός Καθηγητής*
Δρ. Κεχρινιώτης Αριστείδης, *Επιστημονικός Συνεργάτης*
Δρ. Τριανταφύλλου Χρυσαυγή, *Επιστημονικός Συνεργάτης*

Λαμία, Οκτώβριος 2011

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟ ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ

Εφαρμογές του MATLAB στα Ανώτερα Μαθηματικά

(σύμφωνα με τα αντίστοιχα Μαθήματα Θεωρίας: Μαθηματικά Ι, ΙΙ, ΙΙΙ)

Γενικά περί MATLAB

Το MATLAB είναι ένα από τα χρησιμότερα επιστημονικά, υπολογιστικά και γραφιστικά προγράμματα-λογισμικά πακέτα, που χρησιμοποιείται σήμερα διεθνώς και ευρέως τόσο στα Μαθηματικά και στις άλλες Θετικές Επιστήμες, όσο και στην Τεχνολογία γενικότερα. Το MATLAB μπορεί να χρησιμοποιηθεί από πολλά είδη και μεγέθους computers, από personal μέχρι super-computers. Ελέγχεται μέσω εκατοντάδων προκαθορισμένων εντολών και συναρτήσεων-αλγόριθμων, αλλά μπορεί να επεκταθεί και να προγραμματιστεί και με επιπλέον ειδικές εντολές ή άλλους κατάλληλους αλγόριθμους.

Οι υπολογιστικές και γραφιστικές ικανότητες του MATLAB καλύπτουν ένα ευρύ φάσμα πεδίων εφαρμογής, όπως: Εφαρμοσμένα Μαθηματικά, Στατιστική, Γραμμική Άλγεβρα, Αριθμητική Ανάλυση, Ανάλυση Σημάτων-Συστημάτων, Ψηφιακή Επεξεργασία Σήματος, Θεωρία Ελεγκτών, Ασαφής Λογική (Fuzzy Logic), Νευρωνικά Δίκτυα, Φυσική, Οικονομία, Βιολογία, Χημεία, Βιομηχανία, κ.λπ. Υπάρχουν γενικά περί τις 30 βασικές εργαλειοθήκες-υποπρογράμματα (Toolbox) του MATLAB που καλύπτουν ειδικά πεδία εφαρμογών της Επιστήμης και της Τεχνολογίας. Μπορεί να υπολογίσει με μια μόνο εντολή π.χ. τη λύση ενός γραμμικού συστήματος ή μιας διαφορικής εξίσωσης, να κάνει σύνθετες πράξεις πινάκων, να υπολογίσει ολοκληρώματα ή παραγώγους, να δώσει δισδιάστατα και τρισδιάστατα γραφήματα, να επεξεργαστεί σήματα και συστήματα, να κάνει ανάλυση δεδομένων, κ.λπ.

Το MATLAB, είναι ένα από τα δυναμικότερα σύγχρονα υπολογιστικά "εργαλεία"- μεταξύ άλλων αντίστοιχων (όπως το *Mathematica, Maple, Derive*, κ.λπ.), και βασίζει τη λειτουργία του στους πίνακες (μήτρες) απ' όπου και η ονομασία του (*MATLAB-MATrix LABoratory*, δηλ. *Εργαστήριο Πινάκων*). Οι πίνακες (που εκφράζουν και διανυσματικές διαδικασίες) είναι πράγματι από τις χρησιμότερες έννοιες-εργαλεία, τόσο για θεωρητικά όσο και για πρακτικά θέματα των μαθηματικών. Η ευρεία χρήση των πινάκων έχει άμεση εφαρμογή στη σύγχρονη εκτέλεση των "διανυσματικοποιημένων πινάκων-vectorized computer algorithms".

Η διεθνής έκδοση "*student edition MATLAB*", με την οποία θα ασχοληθούμε στη συνέχεια, δημιουργήθηκε για πρώτη φορά το 1970, στα Πανεπιστήμια "Stanford" και "New Mexico" των ΗΠΑ, κύρια για τις ανάγκες των σπουδαστών στα μαθήματα "Θεωρία Πινάκων", "Γραμμική Άλγεβρα" και "Αριθμητική Ανάλυση". Η εν λόγω *"έκδοση σπουδαστή MATLAB"*, είναι μια κατάλληλη περικοπή της αντίστοιχης σύγχρονης επαγγελματικής έκδοσης (που περιλαμβάνει βέβαια ένα πολύ ευρύτερο υπολογιστικό φάσμα).

Σκοπός των επόμενων ***10 Εργαστηριακών Μαθημάτων*** *(και 2 επαναληπτικών)* είναι να εξετάσουμε με ποιον ακριβώς τρόπο χρησιμοποιούμε το MATLAB, προκειμένου να εκτελούμε τις διάφορες πράξεις και τις υπολογιστικές διαδικασίες των Ανώτερων Μαθηματικών, αναφορικά με τις βασικές έννοιες που γνωρίζουμε ήδη από τη Θεωρία των μαθημάτων ***ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι, ΙΙ*** και ***ΙΙΙ***. Έτσι, ξεκινώντας από απλά μαθηματικά σύμβολα, θα δούμε τις διάφορες πράξεις των βασικών συναρτήσεων, των πολυωνύμων, των πινάκων και των μιγαδικών, καθώς και τα γραφήματά τους, την επίλυση εξισώσεων και συστημάτων, πώς υπολογίζουμε παραγώγους και ολοκληρώματα, τη λύση διαφορικών εξισώσεων και εξισώσεων διαφορών, καταλήγοντας στις εφαρμογές των Γραμμικών Μετασχηματισμών Laplace, Fourier, και Ζήτα, που χρησιμοποιούνται για την επεξεργασία αναλογικών ή ψηφιακών LTI Σημάτων-Συστημάτων (όπως αυτά εκφράζονται μέσω των αντίστοιχων μαθηματικών μοντέλων, δηλ. των Γραμμικών Διαφορικών Εξισώσεων ή Γραμμικών Εξισώσεων Διαφορών).

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ (Εργαστήριου Μαθηματικών)

ΜΑΘΗΜΑ 1ο

ΕΙΣΑΓΩΓΗ στο MATLAB
(Βασικές εντολές, συναρτήσεις και μαθηματικές πράξεις)

Πίνακας βασικών εντολών-συναρτήσεων-πράξεων

Μαθηματικά	MATLAB	παρατηρήσεις
πρόσθεση, α+β	α+β	7+9.5
αφαίρεση, α-β	α-β	31.2-12.4
πολλαπλασιασμός, α.β	α*β	4*5
διαίρεση, α/β	α/β	8/3
δύναμη, $α^β$	α^β	2^5
e^x	exp(x)	e=2,7182=βάση νεπερ. λογαριθμ.
lnx	log(x)	νεπέρειος λογάριθμος
$\log_a x$	loga(x)	λογάριθμος με βάση a
$\sqrt{x}$, $\sqrt[a]{x^n}$	sqrt(x) , x^(n/a)	
sinx, cosx, tanx, cotx	sin(x), cos(x), tan(x), cot(x)	τριγωνομετρ. συναρ.(x σε ακτίνια)
arcsinx ($\sin^{-1}x$), arccosx ($\cos^{-1}x$), arctanx, arccotx	asin(x), acos(x), atan(x), acot(x)	αντίστροφες τριγωνομετρικές συναρτήσεις
sinh(x), cosh(x), tanh(x), coth(x)	sinh(x), cosh(x), tanh(x), coth(x)	υπερβολικές συναρτήσεις
asinh(x),acosh(x),atanh(x), acoth(x)	asinh(x),acosh(x),atanh(x), acoth(x)	αντίστροφες υπερβολικές συναρτήσεις
$\lvert x \rvert$	abs(x)	απόλυτη τιμή ή μέτρο του μιγαδικού αριθμού x
Arg(x)= $\angle x$	angle(x)	πρωτεύον όρισμα μιγαδ. x
Re(x)	real(x)	πραγμ. μέρος μιγαδικού x
Im(x)	imag(x)	φανταστ. μέρος μιγαδικού x
$\overline{x}$	conj(x)	ο συζυγής του μιγαδικού x
ΜΚΔ(x,y)	gcd(x,y)	Μέγιστος Κοινός Διαιρέτης των ακεραίων x και y (greatest common divisor of integers x and y)
ΕΚΠ(x,y)	lcm(x,y)	Ελάχιστο Κοινό Πολ/σιο των ακεραίων x και y (least common multiple of integers x and y)
	rem(x,y)	Υπόλοιπο της διαίρεσης x/y (remainder of x/y)
π=3,14…	pi	
i , j	i , j	i=j= $\sqrt{-1}$
	inf	το άπειρο (π.χ. 1/0)
	nan	μη αριθμός (not-a-number, π.χ. 0/0)
	ans	η απάντηση (answer)

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ:

- Οι δεκαδικοί αριθμοί γράφονται με τελεία και όχι με κόμμα στη θέση της υποδιαστολής π.χ. 0.17 και όχι 0,17.
- Γράφουμε γενικά με λατινικά γράμματα (αποφεύγοντας τα ελληνικά).
- Τα ονόματα των μεταβλητών αρχίζουν πάντα από λατινικό γράμμα, που μπορεί να ακολουθείται από άλλα γράμματα ή αριθμούς (μέχρι 31 χαρακτήρες): x, y1, xYz,f2,…

- Οι πολύ μεγάλοι και οι πολύ μικροί αριθμοί δίνονται τυποποιημένα ως εξής: 324^{13}= 324^13=4.3360e+032 , (που σημαίνει 324^13=4,3360x10^{32}), είτε 3^{-27}= 3^-27=1.3114e-013=1,3114x10^{-13}
- Γενικά οι αριθμοί δίνονται με προσέγγιση 4 δεκαδικών ψηφίων.
- Ποτέ δεν γράφουμε μια συνάρτηση στη μορφή: y(x) = sin(2*x) ή h(x) = cos(10*pi*t) γιατί το πρόγραμμα υποδεικνύει λάθος, γράφουμε : y = sin(2*x) ή h = cos(10*pi*t)
- Οι γωνίες αναφέρονται μόνο σε ακτίνια και όχι με μοίρες.
- *Με την εντολή **who** μας δείχνει τις μεταβλητές που έχουμε ορίσει και ισχύουν μέχρι τώρα ενώ με την εντολή **clear** καθαρίζει από την μνήμη [σβήνει] το MATLAB τις μεταβλητές που έχουμε ορίσει.*
- Το MATLAB αποθηκεύει τις εντολές που εκτελέστηκαν σε ένα τμήμα του χώρου εργασίας. Με τα πλήκτρα $\uparrow, \downarrow$ μπορούμε να επαναφέρουμε μια εντολή που εκτελέστηκε πριν. Στη συνέχεια με τα πλήκτρα $\leftarrow, \rightarrow$ μπορούμε να μετακινηθούμε στη γραμμή και να τροποποιήσουμε την εντολή χρησιμοποιώντας τα κατάλληλα πλήκτρα.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να υπολογιστεί η παράσταση: $A = 2^{-3} - 15\left(\frac{7}{4}\right)^3 + \frac{7+\frac{1}{2^2}}{6(2^{-1}-8^2)}$.

2. Να υπολογιστεί η παράσταση: $B = (-2)^4 - \sqrt{15\left(\frac{7}{4}\right)^5} + \frac{5(7+3^9)}{6(2^{12}+8^4)}$.

3. Να υπολογιστεί η παράσταση:
$Z = e^{-\frac{1}{2}} - \ln\frac{3}{4} + \sqrt[3]{e} + \sqrt[3]{5^4} - 2\left|\sin(-3)\right| - 4arc\cot(57) - 3ar\cosh(5)$.

4. Να υπολογιστεί η παράσταση: $K = \lambda o\gamma 25 - \ln 81 + \ln 100 - \sqrt{2}\lambda o\gamma 2$.

5. Να υπολογιστεί η παράσταση:
$M = 23^{-52}\pi + \frac{5}{7^3+2^{-9}} - \ln(ar\cot(10)) - 2e^{-3}ar\sinh(54) + \pi\ln(e^4+3)$.

6. Να υπολογιστεί η παράσταση:
$N = 2\pi e[\ln\frac{5}{6} + \sqrt[5]{e^{-2}} + \sqrt[3]{\tan(1)} - 2\pi\left|\sin(-3)\right| - 4arc\cot(57) - 3ar\cosh(5)]$.

7. Να υπολογιστεί η παράσταση:

$$E = \ln\sqrt[5]{7^6} + e^{-3} - \sin(1) + \sinh(1) - \arccos(32) - \pi e\left|(\tanh(-7))^4\right| + 3\frac{\ln(2)\cos(3)}{4(\ln(4)^4)^2}.$$

.

ΜΑΘΗΜΑ 2^{o}

Α) Βασικές Συναρτήσεις μιας μεταβλητής:
α) ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΕΣ, β) ΕΚΘΕΤΙΚΕΣ, γ) ΥΠΕΡΒΟΛΙΚΕΣ και οι Αντίστροφές τους

α) ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΕΣ

sin(t) ή ημ(t): $t \in R \rightarrow [-1,1]$ tan(t) ή εφ(t): $t \in R-[k\pi+\pi/2, k\in Z] \rightarrow R$
cos(t) ή συν(t): $t \in R \rightarrow [-1,1]$ cot(t) ή σφ(t): $t \in R-[k\pi, k\in Z] \rightarrow R$

Γράφημα Τριγωνομετρικών Συναρτήσεων: Για να σχεδιάσουμε γενικά μια συνάρτηση θα πρέπει πρώτα να ορίσουμε το πεδίο ορισμού της. Το *πεδίο ορισμού σχεδίασης* είναι ένα υποσύνολο του πεδίου ορισμού της συνάρτησης.

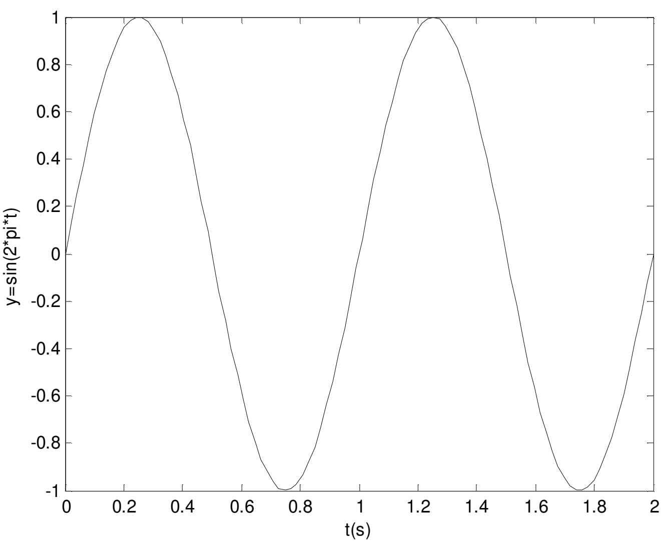
Το πεδίο ορισμού σχεδίασης συναρτήσεων ορίζεται στο MATLAB με δυο τρόπους:

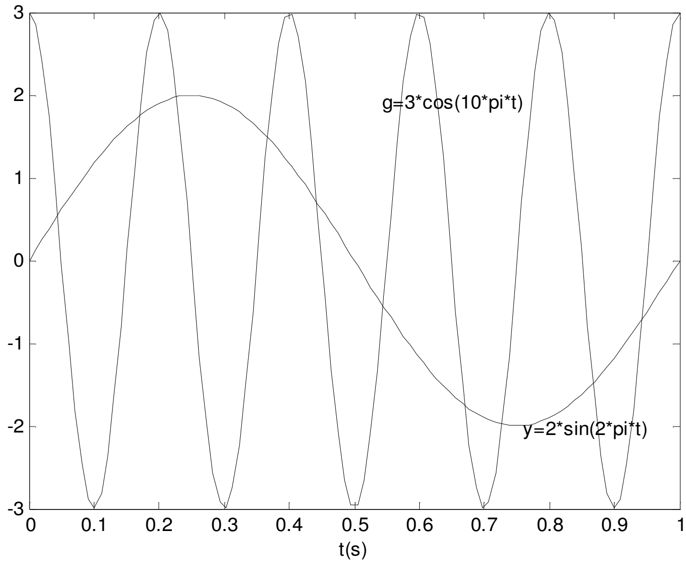
- **x = v_1: κ : v_2** *%ορίζουμε πεδίο ορισμού της συνάρτησης από τον αριθμό v_1 έως τον αριθμό v_2 με βήμα κ. Το κ παίρνει συνήθως τιμές: 0.1 ή 0.01 ή 0.001.*
- **x = linspace(v_1, v_2, n)** *.%ορίζουμε πεδίο ορισμού της συνάρτησης από τον αριθμό v_1 έως τον αριθμό v_2 παίρνοντας n τιμές από τον αριθμό v_1 έως τον αριθμό v_2 .Το n παίρνει τιμές: 100 ή 200 ή 500.*

Ειδικά για τις περιοδικές συναρτήσεις για να έχουμε ένα κατάλληλο γράφημα θα πρέπει να γνωρίσουμε την περίοδο της συνάρτησης που θέλουμε να σχεδιάσουμε ώστε να ορίσουμε κατάλληλα το πεδίο ορισμού σχεδίασης.

Η εντολή σχεδίασης συνάρτησης στο καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων είναι: **plot(ανεξάρτητη μεταβλητή, εξαρτημένη μεταβλητή).**

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

<table>
<tr><th>ΚΩΔΙΚΑΣ</th><th>ΓΡΑΦΗΜΑ</th></tr>
<tr><td colspan="2">1. Να σχεδιασθεί η συνάρτηση y(t)= ημ(2πt) σε χρονικό διάστημα δύο περιόδων της.
ΛΥΣΗ: Η συνάρτηση έχει περίοδο Τ = 2π/ω= 2π/2π=1(sec) ή συχνότητα f =1Hz ή 1c/sec
(κάθε συνάρτηση της μορφής $y(t) = A\sin(\omega t \pm \varphi)$ έχει περίοδο Τα=2π/ω).</td></tr>
<tr><td>t = 0:0.01:2; % Ορίζω πεδίο ορισμού από 0 έως 2 sec.
y=sin(2*pi*t);
plot(t,y)
xlabel(‘t(s)’);ylabel('y=sin(2*pi*t)')
ή δίνοντας με τον άλλο τρόπο το πεδίο ορισμού σχεδίασης
t = linspace(0,2,100);
y=sin(2*pi*t);
plot(t,y)
xlabel(‘t(s)’)
ylabel('y=sin(2*pi*t)')</td><td>
</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th>ΚΩΔΙΚΑΣ</th><th>ΓΡΑΦΗΜΑ</th></tr>
<tr><td colspan="2">2. Να σχεδιαστούν στο ίδιο γράφημα οι συναρτήσεις $y(t) = 2ημ(2\pi t)$ και $g(t)= 3συν(10\pi t)$
ΛΥΣΗ: Η συνάρτηση $y(t) = 2ημ(2\pi t)$ έχει περίοδο $T = 2\pi/\omega= 2\pi/2\pi=1$(sec) και η $g(t)=3συν(10\pi t)$ έχει περίοδο $T = 2\pi/\omega= 2\pi/10\pi=0.2$(sec). Επιλέγω ως πεδίο ορισμού σχεδίασης το διάστημα [0.1].</td></tr>
<tr><td>t=linspace(0,1);
y=2*sin(2*pi*t);
g=3*cos(10*pi*t)
plot(t,y,t,g,)
xlabel('t(s)')
gtext('y=2*sin(2*pi*t)')
gtext('g=3*cos(10*pi*t)')</td><td>
</td></tr>
</table>

<u>ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΕΣ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ</u>

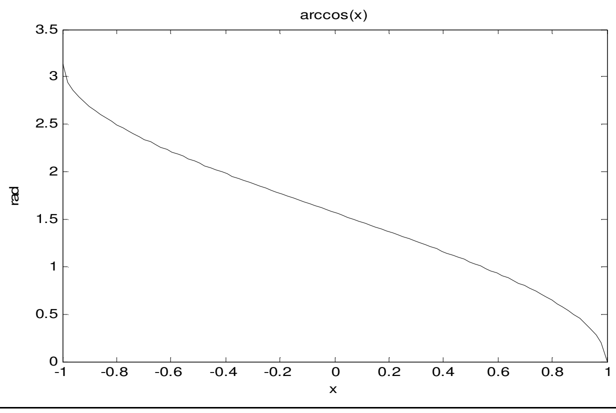
y = τοξημx ή $y = \sin^{-1}x$ ή y = arcsinx: $x\in[-1,1] \rightarrow y \in [-\pi/2, \pi/2]$
y = τοξημx ή $y = \cos^{-1}x$ ή y = arccosx: $x \in[-1,1] \rightarrow y \in [0, \pi]$
y= τοξεφx ή $y = \tan^{-1}x$ ή y = arctanx: $x\in R \rightarrow y \in (-\pi/2, \pi/2)$
y = τοξσφx ή $y = \cot^{-1}x$ ή y = arccotx: $x\in R \rightarrow y \in (0, \pi)$

Μεταξύ των τριγωνομετρικών συναρτήσεων και των αντίστροφων τριγωνομετρικών ισχύουν οι ισοδυναμίες:

$$y= \sin^{-1}x \Leftrightarrow x = \sin y$$
$$y= \cos^{-1}x \Leftrightarrow x = \cos y$$
$$y= \tan^{-1}x \Leftrightarrow x = \tan y.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Σχεδίαση της αντίστροφης τριγωνομετρικής συνάρτησης του συν(x) δηλ. $y = \cos^{-1}x$

<table>
<tr><th>ΚΩΔΙΚΑΣ</th><th>ΓΡΑΦΗΜΑ</th></tr>
<tr><td>x=linspace(-1,1);
y=acos(x);
plot(x,y,'k')
xlabel('x')
title('arccos(x)')
ylabel('rad')</td><td>
</td></tr>
</table>

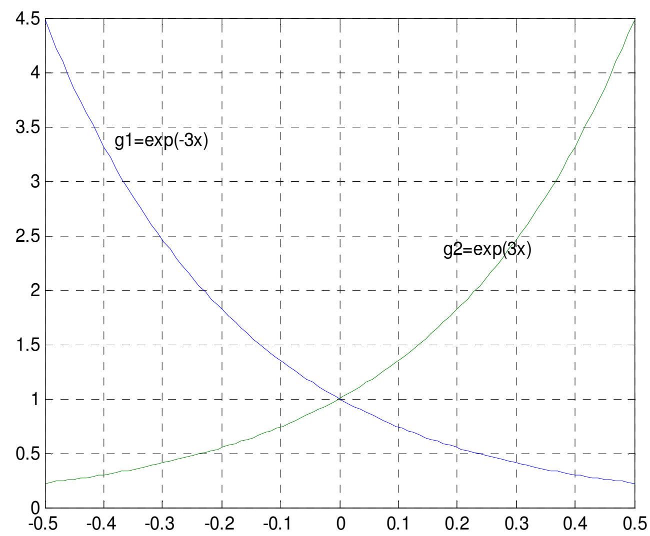
β) <u>ΕΚΘΕΤΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ</u>

$$f(x) = \alpha^{x} \; : \; x \in R \;\rightarrow\; f(x) \in (0, \infty), \quad \mu\varepsilon \quad \alpha \succ 0, \quad \alpha \neq 1.$$

Ειδικότερα η συνάρτηση ***f(x)=e^x*** *λέγεται* ***εκθετική συνάρτηση με βάση το e****, όπου* $e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} = 2.7182828\ldots$*(άρρητος-υπερβατικός αριθμός).*

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Να σχεδιασθούν οι συναρτήσεις, $g1=e^{-3x}$ και $g2=e^{3x}$.

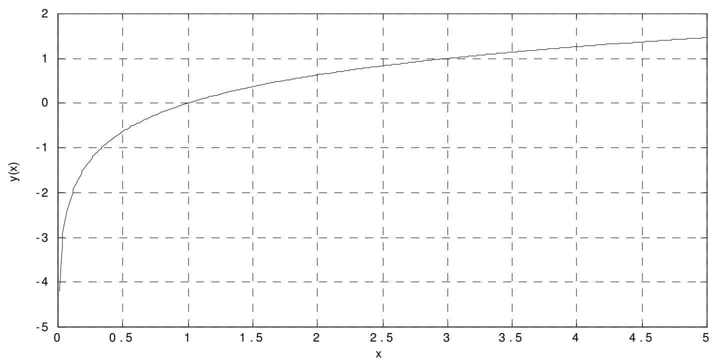
ΚΩΔΙΚΑΣ	ΓΡΑΦΗΜΑ
x=linspace(-0.5,0.5); **g1=exp(-3*x);** **g2=exp(3*x);** **plot(x,g1,x,g2)** **grid on** **gtext('g1=exp(-3x)')** **gtext('g2=exp(3x)')**	

<u>ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΕΣ ΕΚΘΕΤΙΚΕΣ ή ΛΟΓΑΡΙΘΜΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ</u>

Η συνάρτηση **y=log$_{\alpha}$x** λέγεται **λογαριθμική συνάρτηση με βάση α και είναι** αντίστροφη της αντίστοιχης εκθετικής συνάρτησης με βάση το α. Η συνάρτηση **y = lnx** λέγεται **λογαριθμική συνάρτηση με βάση τον αριθμό** e. Για να σχεδιάσουμε το γράφημα μιας λογαριθμικής συνάρτησης με μια τυχαία βάση την μετατρέπουμε σε λογαριθμική με βάση το 10 ή το e.

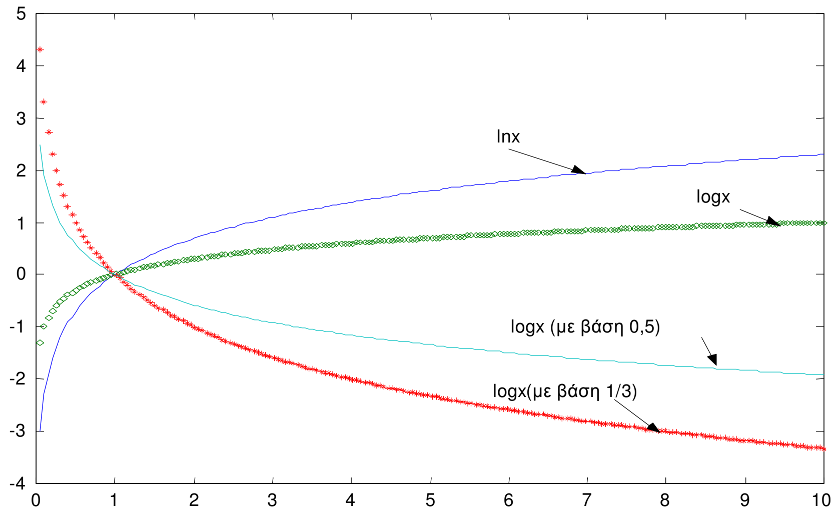
ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1. Να σχεδιαστεί η συνάρτηση: $y = \log_3 x = \dfrac{\log x}{\log 3} = \dfrac{\ln x}{\ln 3}$

ΚΩΔΙΚΑΣ	ΓΡΑΦΗΜΑ
= linspace(0,5,100); **y = log(x)/log(3);** **plot(x,y);** **grid on;** **xlabel('x');** **ylabel('y(x)')**	

2. Στο παρακάτω σχήμα δίνονται τα γραφήματα τεσσάρων (4) λογαριθμικών συναρτήσεων: g(x)=lnx, f(x)=logx, $h(x) = \log_{0,5} x$ και $s(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$.

Να γραφεί ο κώδικας σχεδίασης.



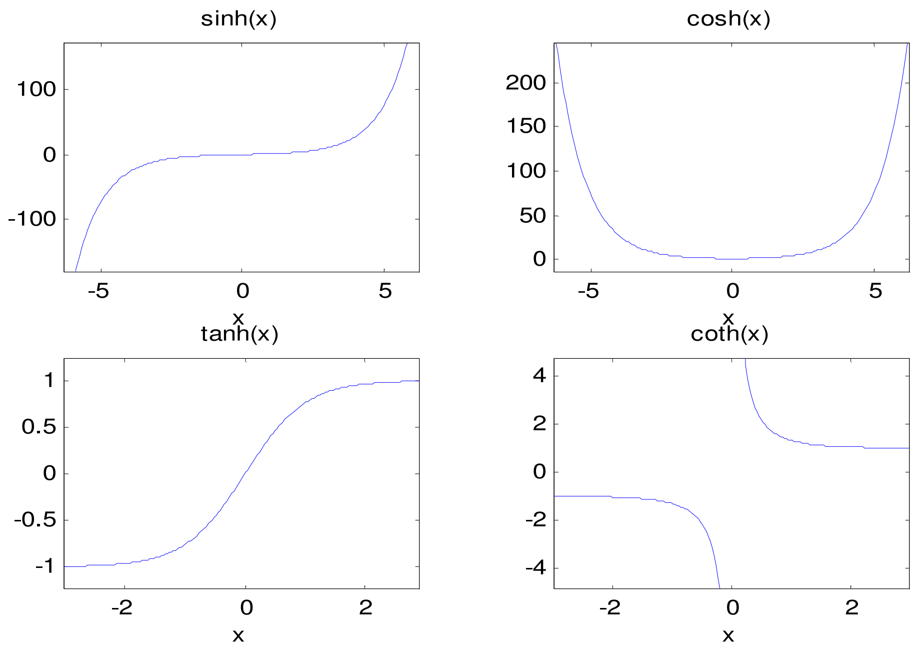
γ) <u>ΥΠΕΡΒΟΛΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ</u>

Υπερβολικές λέγονται ως γνωστόν οι συναρτήσεις που δημιουργούνται από τα αλγεβρικά αθροίσματα των εκθετικών συναρτήσεων, ως εξής :

<u>Υπερβολικό ημίτονο</u>: $\sinh(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$, <u>Υπερβολικό συνημίτονο</u>: $\cosh(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$,

<u>Υπερβολική εφαπτομένη</u>: $\tanh(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$, <u>Υπερβολική συνεφαπτομένη</u>: $\coth(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$.

Άσκηση: Να γράψετε τον κωδικό σχεδίασης των παρακάτω υπερβολικών συναρτήσεων:



<u>ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΕΣ ΥΠΕΡΒΟΛΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ</u>

$\sinh^{-1} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}),\ x \in R$, $\cosh^{-1} x = \ln(x \pm \sqrt{x^2 - 1}),\ x \geq 1$,

$\tanh^{-1} x = \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1+x}{1-x},\ |x| \prec 1$, $\coth^{-1} x = \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{x+1}{x-1},\ |x| \succ 1$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Σχεδίαση της $\sinh^{-1} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}),\ x \in R$.

ΚΩΔΙΚΑΣ

```
x=linspace(-2,2);
y=asinh(x);
plot(x,y,'k')
xlabel('x')
ylabel('y=asinh(x)')
```

B) Πολυώνυμα (ρίζες, τιμές, εύρεση πολυωνύμου από ρίζες)

Στο MATLAB το πολυώνυμο μπορεί να παρασταθεί με δύο τρόπους.
Π.χ. Το πολυώνυμο, $x= s^4+3s^3-15s^2-2s+9$, μπορεί να γραφεί ως εξής:
Α΄ Τρόπος: x=[1 3 –15 –2 9] δηλ. ορίζουμε ένα διάνυσμα με συντελεστές 1, 3 ,-15 , –2, 9 . Επίσης μπορούμε να υπολογίσουμε την **τιμή** ενός πολυωνύμου χρησιμοποιώντας την συνάρτηση **polyval**. Π.χ. για να βρούμε *την τιμή του παραπάνω πολυωνύμου* για s=2 δίνουμε την εξής εντολή: **polyval(x,2)**
Επίσης με την εντολή **roots([1 3 –15 –2 9])** *υπολογίζουμε τις ρίζες του πολυωνύμου.*
Β΄ Τρόπος (κλασικός): Μπορούμε επίσης να το ορίσουμε και με τον κλασσικό τρόπο δηλ.
x=s.^4 + 3*s.^3 – 15*s.^2 –2*s + 9 , *η τελεία αναφέρει στο πρόγραμμα τη πράξη στοιχείο-στοιχείο.*
Γενικά χρησιμοποιούμε την τελεία πριν από το γινόμενο συναρτήσεων, πηλίκο συναρτήσεων, και συνάρτηση σε δύναμη, ***π.χ: sin(x).* cos(x), sin(x).^2 , exp(x)./sin(x), x.^3***

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ
Να σχεδιαστεί το πολυώνυμο: $v = x^3 + 4x^2 –7x –10$

ΚΩΔΙΚΑΣ

Εργασία 1η

x=[1 4 –7 -10] *δίνω το πολυώνυμο με τη μορφή πίνακα*

κ=roots(x) *υπολογίζω τις ρίζες του.*

Εργασία 2η

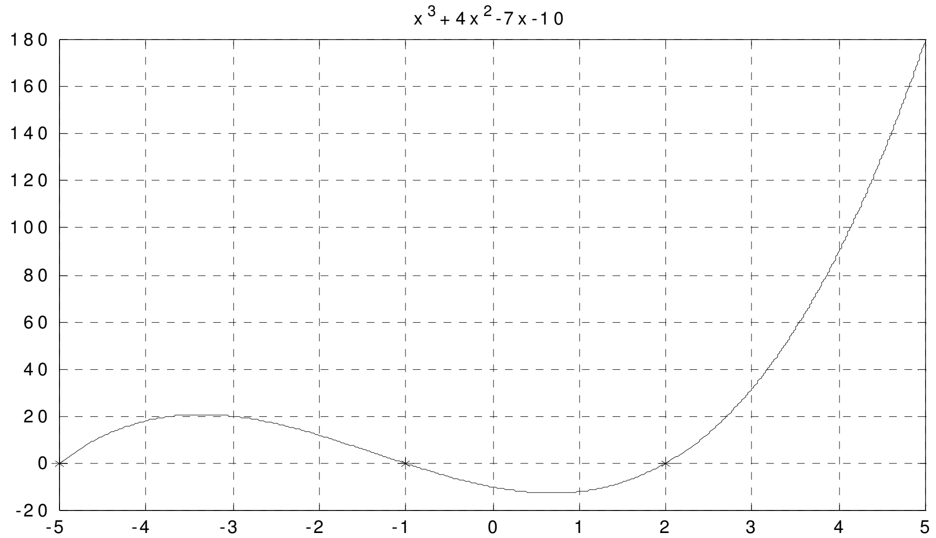
» **x=linspace(-5,5,100);**

»**v = x.^3+4*x.^2-7*x-10;**

»**plot(x,v),title('x^3+4x^2-7x-10'),xlabel('x'),ylabel('p(x)')**

hold on; plot(-5,0,'r*'); hold off *εμφανίζουμε τις ρίζες του πολυωνύμου στην γραφική παράσταση με ένα κόκκινο για παράδειγμα αστεράκι.*

ΓΡΑΦΗΜΑ



ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να σχεδιαστούν 4 περίοδοι των συναρτήσεων: E1(t) = 5συν(20πt-3π/2) και E2(t) = 5συν(20πt+3π/2), καθώς και το άθροισμά τους.
2. Σε ένα ηλεκτρικό κύκλωμα το ρεύμα I (Amps) ως προς τον χρόνο t (sec) δίνεται από τον τύπο: $I(t) = 10\left(1 - e^{\frac{-t}{0,4}}\right)$. Να σχεδιαστεί I(t) και από το γράφημα να βρείτε την αρχική τιμή του ρεύματος (t = 0) και την τιμή του ρεύματος σε χρόνο $t \to \infty$.
3. Σε ένα κύκλωμα R L C σε σειρά δίνονται R=10, L=0,1H, C=10mf και όλα είναι συνδεδεμένα με πηγή εναλλασσόμενης τάσης V=140ημ314t Volt. Υπολογίστε την εμπέδηση του κυκλώματος Z και την διαφορά φάσης μεταξύ εφαρμοζόμενης τάσης V(t) και έντασης του ρεύματος I(t). Δίνονται οι παρακάτω τύποι: I(t)=Ιοημωt, V(t)=Voημ(ωt-θ(rad)), Z=Io/Vo, Z=R+(Lω-1/Cω)i. Επίσης να σχεδιαστούν στον ίδιο πίνακα οι συναρτήσεις σημειώνοντας δίπλα σε κάθε γράφημα τον τίτλο της συνάρτησης.
4. Στην παραπάνω άσκηση υπολογίζονται επίσης οι εξισώσεις της τάσης της αντίστασης, του πηνίου και του πυκνωτή οι οποίες είναι οι παρακάτω VR=41ημ(314t-72^o), VL=136ημ(314t+18^o), VC=1,36(ημ314t-162^o) Αφού μετατρέψετε τις μοίρες σε ακτίνια να σχεδιάσετε τις συναρτήσεις γράφοντας δίπλα σε κάθε μια τον τύπο της.
5. Η ατμοσφαιρική πίεση P (atm.) σε σχέση με το ύψος h(m) από το έδαφος δίνεται από την εκθετική συνάρτηση: $P(h) = P_O e^{-\frac{h}{7}}$. Αν P_o = 1,01x10^5 (atm.) να σχεδιαστεί η συνάρτηση της ατμοσφαιρικής πίεσης.
6. Να σχεδιαστεί η συνάρτηση $λογ_5χ$(λογάριθμος χ με βάση 5).
7. Να επιλυθεί γραφικά η εξίσωση: $5e^{-x} = \ln x$
8. Να σχεδιάσετε 3 κυματομορφές (περιόδους) της συνάρτησης g(t)=Asin(ωt) με μέγιστη τιμή 10 και συχνότητα 600Hz (c/s).
9. Να γίνει η γραφική παράσταση του τριωνύμου $y = -x^2 + 6x - 9$. Να δοθεί τίτλος στο γράφημα και να ονομαστεί ο άξονας χ και ο άξονας ψ. Να δείξετε με ένα αστεράκι τις ρίζες του τριωνύμου πάνω στο γράφημα.. Ποιος είναι ο άξονας συμμετρίας του γραφήματος;
10. Να σχεδιαστούν οι ευθείες ψ=2χ+1 και λ=-1/2χ+1. Τι παρατηρείτε; Τι γωνία θα έπρεπε να σχηματίζουν οι δυο ευθείες μεταξύ τους;
11. Ευθεία περνά από το σημείο Μ (-5, 9) και έχει κλίση λ = -2. Δώστε την εξίσωση της ευθείας και σχεδιάστε την εξίσωση ευθείας που διέρχεται από το σημείο (x_o, y_o), δηλ. y- y_o= λ(x- x_o). Στο ίδιο γράφημα να σχεδιαστεί η ευθεία που περνά από το σημείο Ν (2, 5) και σχηματίζει γωνία 30^o με τον ημιάξονα Ox. Δώστε την εξίσωση της ευθείας και σχεδιάστε την.
12. Να επιλυθεί γραφικά η εξίσωση: $18e^{-2x} = \ln 3x + 10$
13. Να σχεδιαστούν στο ίδιο γράφημα οι συναρτήσεις: e^{3x}, e^{-3x},3^x,3^{-x},10^x και να αναγνωρίσετε (ονομάσετε) στο γράφημα την κάθε μια.
14. Να σχεδιαστεί η συνάρτηση $\cosh^{-1} x = \ln(x \pm \sqrt{x^2 - 1}),\ x \geq 1$

ΜΑΘΗΜΑ 3ο

Α) ΠΙΝΑΚΕΣ (Πράξεις, βαθμός, ίχνος, Ιδιοτιμές-Ιδιοδιανύσματα).

Β) ΕΠΙΛΥΣΗ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΚΑΙ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ (γραμμικών και μη-γραμμικών)

ΠΙΝΑΚΕΣ

ΚΩΔΙΚΑΣ	ans
A=[1 2 3; 4 5 6; 7 8 9]	A = 1 2 3 4 5 6 7 8 9
size(A)	3 3
A(2,1)=0 *%το στοιχείο της γραμμής 2 και της στήλης 1 να γίνει 0*	A = 1 2 3 0 5 6 7 8 9
A^2	22 36 42 42 73 84 70 126 150
A^0	1 0 0 0 1 0 0 0 1
det(A) *%ορίζουσα*	-24
inv(A) *%αντίστροφος (inverse)*	0.1250 -0.2500 0.1250 -1.7500 0.5000 0.2500 1.4583 -0.2500 -0.2083
A*inv(A) *%δημιουργία του μοναδιαίου πίνακα Ι*	1.0000 0 0 -0.0000 1.0000 0 0 0 1.0000
rank(A)	3
trace(A) *% ίχνος*	15
eig(A) *% ιδιοτιμές*	15.5440 -1.5440 1.0000
A' *% ανάστροφος*	1 0 7 2 5 8 3 6 9

ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

Επίλυση γραμμικού συστήματος με την μέθοδο του αντίστροφου πίνακα

Για να λύσουμε ένα γραμμικό σύστημα αφού δώσουμε εντολή να δημιουργήσει τον πίνακα Α (τον πίνακα των συντελεστών των αγνώστων) και τον Β (τον πίνακα των σταθερών όρων) τότε με την παρακάτω εντολή μας δίνει κατευθείαν τη λύση του συστήματος.

» X=inv(A)*B

Εάν ο Α αντιστρέφεται ($\det(A) \neq 0$) το MATLAB μας υπολογίζει αμέσως τη λύση του γραμμικού συστήματος.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Να λυθεί το σύστημα:

$$3x+2y+3z=3$$
$$4x-5y+7z=1$$
$$2x+3y-2z=6$$

ΚΩΔΙΚΑΣ	ans
A=[3 2 3;4 -5 7;2 3 -2] **B=[3;1;6]** **X=inv (A)*B**	2 0 -1

Επίλυση εξισώσεων και μη γραμμικών συστημάτων με τη βοήθεια συμβολικών μεταβλητών

Στο MATLAB μπορούμε να χρησιμοποιούμε εκφράσεις με σύμβολα με την εντολή syms x. Με την εντολή αυτή δημιουργεί τη συμβολική μεταβλητή x. Δεν χρειάζεται να δώσουμε πεδίο ορισμού στην μεταβλητή x.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

ΚΩΔΙΚΑΣ	**ans**
syms x; y=1/(2*x^3)	$\frac{1}{2x^3}$
syms x **f=(1/x^3+6/x^2+12/x+8)^(1/3)** %δημιουργούμε μια συνάρτηση f	f = (1/x^3+6/x^2+12/x+8)^(1/3)
h=simplify(f) %απλοποιούμε την συνάρτηση	h =2+1/x
Επίλυση εξίσωσης	
syms z x y **solve('z*sin(x)=3*y','y')** *% λύνει την εξίσωση ως προς τη μεταβλητή y*	ans =1/3*z*sin(x)
Επίλυση μη γραμμικού συστήματος Να λυθεί το σύστημα : $\begin{bmatrix} x^2 + xy + y - 3 = 0 \\ x^2 - 4x + 3 = 0 \end{bmatrix}$	
syms x y **[a1 a2]= solve(x^2+xy+y-3, x^2-4x+3)**	a1 = [1] [3] a2 = [1] [-3/2]

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Δίνονται οι πίνακες, $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 5 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & -4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

   Να υπολογιστούν οι πίνακες: A+B, A-B, A*B, B*A, 2*A+3*B, A^2, B^2.

   Να υπολογιστούν οι ορίζουσες του πίνακα A και του πίνακα B.

2. Δίνονται οι πίνακες, $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 0 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 10 & -3 & 10 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$,

   $\Gamma = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 10 & 5 \end{bmatrix}$, $\Delta = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 10 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$. Να υπολογιστούν οι πίνακες *(όπου είναι δυνατόν)*, A*B, B*A, A*Γ, Γ*A, B^2 , Γ^2, Δ^2, A*Δ, Δ*A, Δ*B.

3. Να υπολογίσετε τις ορίζουσες των παρακάτω πινάκων

   $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 10 & -3 & 10 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{vmatrix} 2 & 10 & 3 & 9 \\ -2 & 20 & 90 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 21 & -23 & 4 & 5 \end{vmatrix}$.

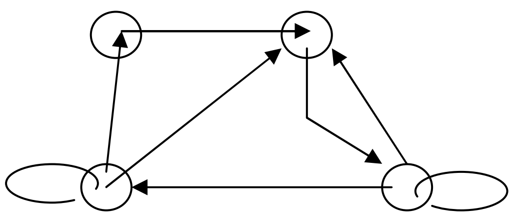
4. Να λυθούν τα παρακάτω γραμμικά σύστημα εξισώσεων:

   $$\begin{bmatrix} I_1 - 2I_2 - 4I_3 = 0 \\ I_1 - I_2 + I_3 = 0 \\ 2I_1 - I_3 = 13 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad \begin{bmatrix} V_1 + V_2 - V_3 = 1 \\ 20V_1 + 30V_2 - 40V_3 = 30 \\ V_1 - 40V_2 + 30V_3 = 20 \end{bmatrix}.$$

5. Η αναπαράσταση ενός κατευθυνόμενου γραφήματος μεταξύ των κόμβων 1, 2, 3 και 4 όπως το παρακάτω, *(τοποθετήστε τους αριθμούς κυκλικά αριθμώντας με 1 τον κάτω αριστερά κόμβο)* δίνεται με τη μορφή ενός πίνακα με στοιχεία α_{ij} όπου

   $$a_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ υπάρχει κατευθυνόμενο τόξο από τον κόμβο i στον κόμβο j} \\ 0, \text{ δεν υπάρχει κατευθυνόμενο τόξο από τον κόμβο i στον κόμβο j} \end{cases}$$

   α1. Να δημιουργήσετε τον πίνακα $A=\{\alpha_{ij}\}$ όπου $1 \le i \le 4$ και $1 \le j \le 4$.

   α2. Να υπολογίσετε τον πίνακα A^2

   α3. Θεωρώντας ότι στον πίνακα A^2 το στοιχείο α_{ij} εκφράζει τον αριθμό των διαφορετικών τρόπων με του οποίους μπορούμε να πάμε από τον κόμβο i στον κόμβο j με δύο τόξα, δηλαδή μέσω μιας παράκαμψης κατά κάποιο τρόπο, να γράψετε αναλυτικά ποιοι είναι οι τρόποι που εκφράζει το στοιχείο α_{13}, α_{41}, α_{42} και α_{43} του πίνακα A^2.

6. Να λυθεί το σύστημα:

   $$\begin{Bmatrix} R_1 + R_2 = 80 \\ 1{,}5R_1 + 120 = 4{,}5R_2 \end{Bmatrix}.$$

7. Να λυθεί η τριγωνομετρική εξίσωση: ημθ+2συνθ=1.

8. Να λυθεί η πολυωνυμική εξίσωση: $2x^4 - 2x^3 - x^2 = 0$.

9. Να λυθεί η εκθετική εξίσωση: $4^x - 2^{x+1} - 3 = 0$.

10. Να λυθεί η λογαριθμική εξίσωση: $\log_3 x - 2\log_x 3 = 1$.

11. Να λυθεί το σύστημα εξισώσεων:

$$\left\{\begin{array}{c} 1{,}5x = 4 \cdot e^{2t} \\ 3{,}72 \cdot \ln\left(\dfrac{1{,}59}{x}\right) = 2{,}43t \end{array}\right\}.$$

12. Αν $Z = \sqrt{R^2 + (2\pi f L)^2}$ να αποδείξετε ότι, $\mathrm{L} = \dfrac{\sqrt{\mathrm{Z}^2 - \mathrm{R}^2}}{2\pi\mathrm{f}}$.

ΜΑΘΗΜΑ 4ο

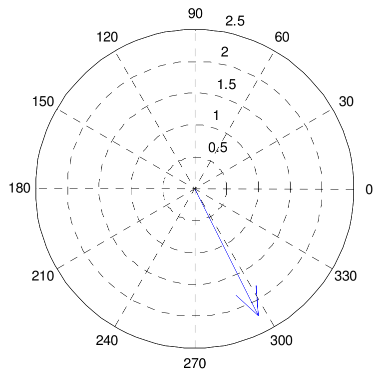
Α) ΜΙΓΑΔΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ
(Πράξεις, μορφές, μέτρο, πρωτεύον όρισμα, κτλ),

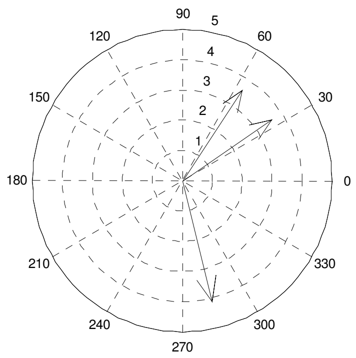
$$z = \alpha + \beta i, \quad \alpha, \beta \in R, \quad i = \sqrt{-1} \text{ ή } i^2 = -1$$

Μέτρο μιγαδικού αριθμού z	$\lvert z \rvert = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$
Πρωτεύον όρισμα του z	$\mathrm{Arg}(z) = \varphi = \tan^{-1}\frac{\beta}{\alpha}$

Μορφές του μιγαδικού αριθμού z = α + βi

Αλγεβρική	*Πολική*	*τριγωνομετρική*	*εκθετική*
$\alpha + \beta i$	$\lvert z \rvert \angle Arg(z)$	$\lvert z \rvert(\cos\varphi + i\sin\varphi)$	$\lvert z \rvert \cdot e^{i\varphi}$

ΚΩΔΙΚΑΣ	**ans**
c1=1-2j	c1 = 1.0000 - 2.0000i
metro=abs(c1) *%υπολογίζει το μέτρο του μιγαδικού c1*	metro = 2.2361
orisma_rad=angle(c1) *%υπολογίζει το πρωτεύον όρισμα του μιγαδικού c1 σε ακτίνια*	orisma_rad = -1.1071
orisma_deg=angle(c1)*180/pi *%**μετατρέπει τα ακτίνια σε μοίρες***	orisma_deg = -63.4349
real=real(c1) *%γράφει το πραγματικό μέρος του μιγαδικού c1*	real=1
imaginary=imag(c1) *%γράφει το φανταστικό μέρος του μιγαδικού c1.*	imaginary-2
c=conj(c1) *%γράφει το συζυγές του c1.*	C=1+2j
compass(c1) *% σχεδιάζει στο μιγαδικό επίπεδο*	

α=[1 2 3] +j*[-4 3 2] *%δημιουργεί τον πίνακα α=[1-4j 2+3j 3+2j]* **compass (a)** *%σχεδιάζει στο μιγαδικό επίπεδο*	

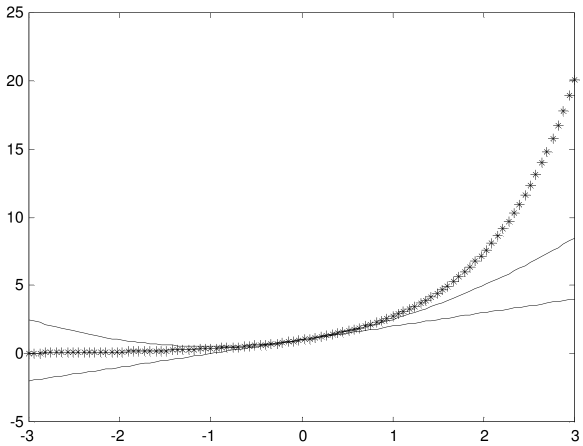
B) ΑΝΑΠΤΥΓΜΑ ΣΕ ΣΕΙΡΕΣ TAYLOR & MAC-LAURIN (συσχέτιση τριγωνομετρικών και εκθετικών συναρτήσεων, σχέσεις Euler).

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \ldots + \frac{f^{n-1}(0)}{(n-1)!}x^{n-1} + R_n(x)$$

όπου $R_n(x) = \dfrac{f^{(n)}(x_o)}{n!}x^n$, *μορφή Lagrange.*

ΚΩΔΙΚΑΣ	ans
syms x **f=taylor(log(x+1)/(x-5))** *% Αναπτύσσει την συνάρτηση σε πολυώνυμο πέμπτου βαθμού.*	f = -1/5*x+3/50*x^2-41/750*x^3+293/7500*x^4-1207/37500*x^5
syms x l y=sqrt(1-x^2/l^2)	y = (1-x^2/l^2)^(1/2)
f=taylor(y)	f = 1-1/2*x^2/l^2-1/8/l^4*x^4-1/16/l^6*x^6
Μπορούμε να δούμε **γραφικά την προσέγγιση** της συνάρτησης e^x από το πολυώνυμου στο οποίο αναπτύσσεται κατά Taylor.	

```
syms x
y=exp(x)
taylor(y)
1+x+1/2*x^2+1/6*x^3+1/2
4*x^4+1/120*x^5
x=linspace(-3,3,100);
d=1+x+x.^2/2;
y=exp(x);
s=1+x;
plot(x,y,x,s,x,d,'κ*')
```



Συσχέτιση τριγωνομετρικών, υπερβολικών και εκθετικών συναρτήσεων

ΤΥΠΟΣ ΤΟΥ EULER: $\mathbf{e^{i\theta} = \cos(\theta) + i \sin(\theta)}$ **(1)**

Από τη σχέση (1) προκύπτει ότι: $\mathbf{e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)}$ και $\mathbf{e^{-i\theta} = \cos(\theta) - i\sin(\theta)}$

$$\text{άρα } \cos(\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \quad \text{και} \quad \sin(\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}.$$

Από τον ορισμό των υπερβολικών συναρτήσεων προκύπτουν όμοια οι σχέσεις:

$$\cosh(ix) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \quad \sinh(ix) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2} \quad \text{και} \quad \tanh(ix) = i\tan(x).$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να υπολογίσετε τους μιγαδικούς αριθμούς με το πρόγραμμα:

   $z1 = 10\angle 30^o \cdot \dfrac{4i}{1+j}$, $\quad z2 = 20e^{i\frac{\pi}{2}} + 50\angle\dfrac{\pi}{6}$, $\quad z3 = \left(25\angle\dfrac{\pi}{4}\right)^3 + 67\angle 60^\circ$,

   $z4 = \left(10\angle 120^\circ\right)^{20}$, $\quad z5 = \dfrac{4\angle 50^\circ}{2\angle 30^\circ}$.

2. Δίνεται ο μιγαδικός αριθμός $z = \dfrac{2+i}{(1-i)^2}$. Να γραφεί στην αλγεβρική μορφή (α + βi). Να υπολογισθεί το μέτρο του και το πρωτεύον του όρισμα. Να σχεδιασθεί στο μιγαδικό επίπεδο.

3. Να υπολογίσετε το μέτρο και το πρωτεύον όρισμα του μιγαδικού αριθμού $z = \dfrac{(10\,e^{-2i\pi/4})\cdot(2\angle 120^{\circ})}{|5\angle\pi/3|}$

4. Δίνονται οι μιγαδικοί: $Z_1 = -2\sqrt{3} - 2j, \quad Z_2 = -5j \ Z_3 = 1 - j$. Να βρεθεί το μέτρο και το πρωτεύον όρισμα σε μοίρες του μιγαδικού αριθμού: $Z = \dfrac{Z_1^{\ 3}\cdot Z_2^{\ 5}}{Z_3^{\ 5}}$.

5. Αν θεωρήσουμε το ω μεταβλητή τότε ο μιγαδικός αριθμός Z είναι συνάρτηση του ω. Να γίνει η γραφική παράσταση του μέτρου του Z ως προς ω.

6. Να εκφράσετε τον μιγαδικό z_3 στην μορφή α + βi, όπου α, β είναι πραγματικοί αριθμοί, δεδομένου ότι : $\dfrac{1}{z_3} = \dfrac{1}{z_1} + \dfrac{1}{z_1\cdot z_2}$, όπου z_1 = 3-4i και z_2 = 5+2i.

Να υπολογισθεί το μέτρο και το πρωτεύον του όρισμα στο πρόγραμμα, καθώς και με μολύβι και χαρτί.

7. Το ίδιο και για τους μιγαδικούς $z1 = \dfrac{1}{1+i}, \quad z2 = \dfrac{3-4i}{4+5i}, \quad z3 = \dfrac{10}{i}$.

8. Δίνεται ο μιγαδικός αριθμός $\quad z = 20e^{i\frac{\pi}{2}} + 50\angle\dfrac{\pi}{6}$.

   α1. Να γράψετε τον μιγαδικό αριθμό z στην αλγεβρική του μορφή.
   α2. Από την αλγεβρική μορφή να υπολογίσετε το μέτρο και το πρωτεύον όρισμα του z3. Να σχεδιάστε στο ίδιο μιγαδικό επίπεδο τους μιγαδικούς αριθμούς $20e^{i\frac{\pi}{2}}, \;\; 50\angle\dfrac{\pi}{6}$ και τον z.

9. Να αποδείξετε τη σχέση: $\left(\dfrac{1+3i}{1-2i}\right)^8 = 16$.

10. Να γραφεί στην πολική του μορφή ο μιγαδικός αριθμός: $z = \dfrac{2}{1-i}$.

11. Να γραφεί στην πολική του μορφή ο μιγαδικός αριθμός: $z = 12e^{45^{o} i} - 10e^{240^{o} i}$.

12. Να γραφεί στην αλγεβρική του μορφή ο μιγαδικός αριθμός:
    $z_1 = 440\angle\pi/6 + 100\angle 180^{o}$.

13. Να βρεθεί το μέτρο και το πρωτεύον όρισμα του μιγαδικού αριθμού, $z = \dfrac{2}{(1+i)^4}$.

14. Να αποδείξετε στο πρόγραμμα ότι: $e^{\pm i\frac{\pi}{2}} = \pm i$.

15. Να αναπτυχθεί κατά τις δυνάμεις του x η συνάρτηση y = $e^{x\wedge 2}$, και να σχεδιαστούν οι συναρτήσεις y, taylor(y). Τι παρατηρείτε;

16. Αποδείξτε ότι για μικρές τιμές του x, ισχύει: $\sin^2 x \cong x^2 - \frac{x^4}{3}$ και

$$\frac{e^x}{1+x} \cong 1 + \frac{x^2}{2}.$$

17. Αναπτύξτε κατά τις δυνάμεις του x τις παραστάσεις μέχρι και τον όρο x^4 :

$$\ln\frac{1-2x}{(1+2x)^2}, \qquad \frac{e^{2x}+e^{-2x}}{e^x}.$$

18. Αναπτύξτε κατά τις δυνάμεις του x τις παραστάσεις μέχρι και τον όρο x^4:

$$\ln\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}, \qquad \cos^2 2x, \qquad \sqrt{1+x}.$$

19. Να αποδείξετε ότι: $e^{ix} = \cos x + i\sin x$.

20. Να αναπτυχθεί κατά τις δυνάμεις του χ η συνάρτηση $y = e^x \cdot \ln(1+x) + \ln(1-x)$. Να σχεδιαστούν οι συναρτήσεις y, taylor(y). Τι παρατηρείτε;

21. Να υπολογιστούν οι τιμές των παρακάτω τύπων:

$$\sin[\frac{\pi}{4}(1+i)], \qquad \sinh(3+4i), \qquad \tan(\frac{\pi}{4} - 3i).$$

ΜΑΘΗΜΑ 5^{o}

Α) ΠΑΡΑΓΩΓΟΙ (1^{ης} και ανώτερης τάξης, μερικές παράγωγοι)

Παράγωγος της $y = f(x)$ στο σημείο $P(x_o, f(x_o))$ ορίζεται η κλίση της εφαπτομένης της καμπύλης γ της $f(x)$ στο σημείο $P(x_o, f(x_o))$ και συμβολίζεται $f'(x_o)$.

ΚΩΔΙΚΑΣ	ans
syms a b c x; *%δημιουργεί τις συμβολικές μεταβλητές a b c d.* **f=a*x^2+b*x+c;** **diff(f,x) % παραγωγίζει f ως προς x.**	2*a*x+b
diff(f,a)*% υπολογίζει την παράγωγο f ως προς a*	x^2
diff(f,x,2) *% υπολογίζει την δεύτερη παράγωγο ως προς x*	2*a
Υπολογισμός μερικής παραγώγου $f_x(x,y) = \dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}$	
syms z x y **z=sqrt(x^2+y^2)** *% έστω συνάρτηση με δύο μεταβλητές*	z =(x^2+y^2)^(1/2)
a=diff(z,x) *% υπολογίζει τη μερική παράγωγο της συνάρτησης z(x,y) ως προς x*	a =1/(x^2+y^2)^(1/2)*x
pretty(a)	x ------------ 2 2 1/2 (x + y)
b=diff(z,y) *% υπολογίζει τη μερική παράγωγο της συνάρτησης z(x,y) ως προς y*	b = 1/(x^2+y^2)^(1/2)*y
pretty(b)	y ------------ 2 2 1/2 (x + y)

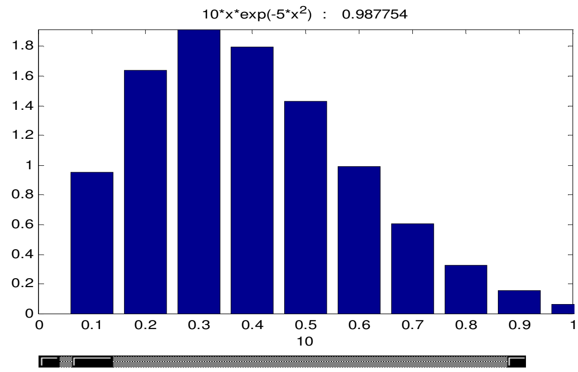
Β) ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ (ορισμένα, αόριστα, διπλά-τριπλά, εμβαδά),

Αόριστο ολοκλήρωμα της f(x) συμβολίζεται: $\int f(x)dx$ και είναι το σύνολο όλων των παραγουσών της f(x). Δηλαδή: $\int f(x)dx = F(x) + c, \quad c \in R$ όταν $F'(x) = f(x)$

ΚΩΔΙΚΑΣ	ans
syms x **f=sin(2*x)**	*f = sin(2*x)*
p=int(f)	*p = -1/2*cos(2*x)*

Υπολογισμός ορισμένου ολοκληρώματος, $p = \int_0^{\pi} \eta\mu(2x)dx$	
p=int(sin(2*x),0,pi)	$p = 0$

Προσεγγιστικός υπολογισμός εμβαδού επιπέδου χωρίου

syms x **f=10*x*exp(-5*x^2)**	
vpa(int(f,0,1),10) *% υπολογίζει την τιμή του ορισμένου ολοκληρώματος από 0 έως 1 με προσέγγιση 10 δεκαδικών ψηφίων.*	
rsums(f) *% εμφανίζει τη διαμέριση του εμβαδού σε ορθογώνια και υπολογίζει το εμβαδόν του αθροίσματος των ορθογωνίων.*	

Υπολογισμός διπλού ολοκληρώματος

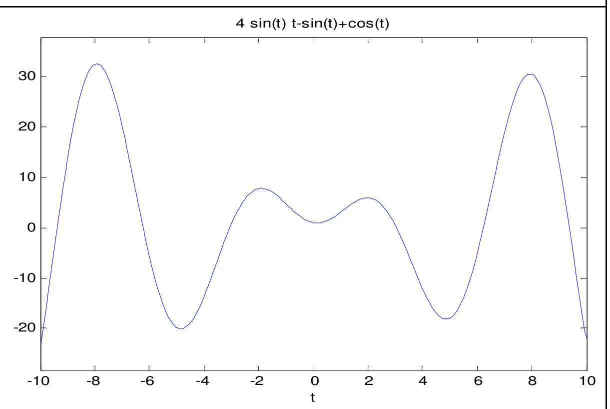
Να υπολογιστεί το παρακάτω διπλό ολοκλήρωμα στη περιοχή ολοκλήρωσης Ω

$$\iint_{\Omega} x^2 dxdy \qquad \Omega = \begin{Bmatrix} -1 \le x \le 1 \\ 0 \le y \le 3 \end{Bmatrix}$$

$$\int_0^3 (\int_{-1}^1 x^2 dx)dy = \int_0^3 \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^1 dy = \int_0^3 \left(\frac{2}{3}\right) dy = \frac{2}{3}[y]_0^3 = 2$$

syms z x **z=x^2** **a=int(z,x,-1,1)** **b=int(a,y,0,3)**	*z = x^2* *a = 2/3* *b = 2*

Γ) ΕΠΙΛΥΣΗ ΒΑΣΙΚΩΝ ΔΙΑΦΟΡΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ.

Επίλυση της διαφορικής εξίσωσης $x^2 y''(x)+7xy'(x)+5y(x)=10-4/x$, *αρχικές συνθήκες y(1)=1, y΄(1)=0*	
syms x y **y=dsolve('x^2*D2y+7*x*Dy+5*y =10-4/x,y(1)=1,Dy(1)=0','x')**	*y =* *1/4*(8*x-4*log(x)+1)/x-5/4/x*
pretty(y)	*8 x - 4 log(x) + 1* *1/4 ------------------ - 5/4 1/x* *x*
Επίλυση της διαφορικής εξίσωσης $y''(x)+2y'(x)+y(x)=3xe^{-x}$, *αρχικές συνθήκες y(0)=4, y΄(0)=2*	
syms x y **y= dsolve('D2y+2*Dy+y=3*x*exp(-x),y(0)=4,Dy(0)=-2','x')**	y = 1/2*x^3*exp(-x)+4*exp(-x)+2*x*exp(-x)
pretty(y)	1/2 x exp(-x) + 4 exp(-x) + 2 x exp(-x)
Επίλυση της διαφορικής εξίσωσης $y''(t)+2y'(t)=3te^{-t}$, *αρχικές συνθήκες y(0)=4, y΄(0)=-2*	
syms x y t **y=dsolve('D2y+2*Dy+y=** **3*t*exp(-t),y(0)=4,Dy(0)=-2','t')**	y = 1/2*t^3*exp(-t)+4*exp(-t)+2*t*exp(-t)
pretty(y)	1/2 t^3 exp(-t) + 4 exp(-t) + 2 t exp(-t)
y=simple(y)	y = 1/2*exp(-t)*(t^3+8+4*t)
pretty(y)	1/2 exp(-t) (t^3 + 8 + 4 t)
Επίλυση της διαφορικής εξίσωσης $y''(t)+2y'(t)=3te^{-t}$, *αρχικές συνθήκες y(0)=4, y΄(0)=-2 και σχεδίαση της λύσης της*	
syms x y t **y=dsolve** **('D2y+y=8*cos(t),** **y(0)=1,Dy(0)=-1','t')**	y = (4*sin(t)*cos(t)+4*t)*sin(t)-4*sin(t)^2*cos(t)-sin(t)+cos(t)
y=simple(y)	y = 4*sin(t)*t-sin(t)+cos(t)
ezplot(y,[-10,10])	

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να υπολογιστεί η πρώτη και η δεύτερη παράγωγος της συνάρτησης q=c1*cos(t/$\sqrt{LC}$) + c2*sin(t/$\sqrt{LC}$).

2. Θεωρώ την διαφορική εξίσωση $L\frac{d^2q}{dt^2}+\frac{q(t)}{C}=0$. Να επαληθευτεί ότι η συνάρτηση $q(t)=q_o\cos\frac{t}{\sqrt{LC}}$ είναι η λύση της. Να υπολογιστεί η ένταση του ρεύματος $I(t)=-\frac{dq}{dt}$.

3. Θεωρώ την διαφορική εξίσωση $\frac{d^2x}{dt^2}=-\omega^2x$. Να επαληθευτεί ότι η συνάρτηση $x(t)=\alpha\cos\omega t$ είναι η λύση της.

4. Θεωρώ τη διαφορική εξίσωση: $\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{k}{m}x(t)=0$. Να επαληθευτεί ότι η συνάρτηση, $x(t)=A\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t-\varphi\right)$ είναι λύση της.

5. Βρείτε τις συντεταγμένες της ελάχιστης τιμής της αλυσοειδούς καμπύλης $y=3\cosh(\frac{x}{3})$. Να σχεδιαστεί η συνάρτηση.

6. Βρείτε την πρώτη και τη δεύτερη παράγωγο των συναρτήσεων:
   $f=\cosh^{-1}e^x$, $g=\coth^{-1}\frac{1}{x}$.

7. Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα:
   $\int 5e^x dx$, $\int(2x^2-\sqrt{x}+\frac{1}{x})dx$, $\int\left(\frac{4}{x^3}-\sqrt[3]{x}\right)dx$,
   $\int\left(22e^t-\frac{10}{t}+7\cos t\right)dt$, $\int\frac{dt}{\cos^2 t}$ $\int kx dx$, $\int L^2 dL$,
   $\int f_o dx$, $\int m^3 dm$.

8. Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα της συνάρτησης $F=\sin(\omega t)e^{-\frac{t}{RC}}$ ως προς τη μεταβλητή t.
   Με ποια μέθοδο ολοκλήρωσης υπολογίζεται το ολοκλήρωμα;

9. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα χρησιμοποιώντας τις μεθόδους ολοκλήρωσης που γνωρίζετε και επαληθεύστε τα αποτελέσματα με το πρόγραμμα. $\int_0^{10} \frac{dQ}{CE-Q}$ $\int_0^2 \frac{e^x - e^{-x}}{2} dx$ $\int \frac{dx}{x \ln x}$.

10. Να βρείτε το μήκος των παρακάτω καμπυλών αφού σχεδιάσετε πρώτα τις καμπύλες :

    lnx από x = 1 έως x = $2^{3/2}$ και $y = \frac{1}{3}\sqrt{x}(x-3)$ από x = 0 έως x = 1,

    ($l = \int_\alpha^\beta \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx$) .

11. Να βρείτε το μήκος των παρακάτω καμπυλών που δίνονται παραμετρικά αφού πρώτα σχεδιάσετε τις καμπύλες:

    y(t) = t^3, x(t) = t^2 από t = 0 έως t = 1 και y(t) = e^tcost, x(t) = e^tsint

    από t = 0 έως t = π , ($l = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt$) .

12. Να υπολογιστεί η ενεργός τιμή της έντασης εναλλασσομένου ημιτονικού ρεύματος $I(t) = I_O \cdot \sin 100\pi t$ στο διάστημα $[0, 10\text{ms}]$ γνωρίζοντας ότι η παραπάνω συνάρτηση παρουσιάζει μέγιστο στην τιμή 30A. (Ενεργός τιμή συνάρτησης $f(x) = \sqrt{\frac{1}{\beta-\alpha}\int_\alpha^\beta (f(x))^2}$) .

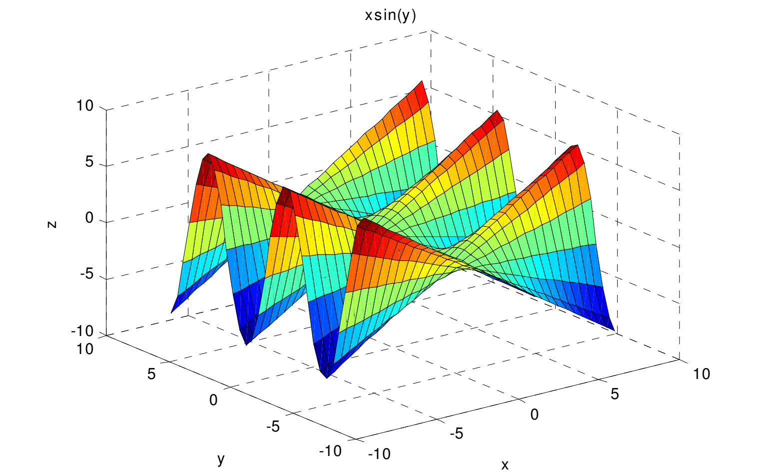
13. Η τάση δίνεται από τον τύπο v = 100sinθ volts: Βρείτε τη μέση τιμή της τάσης στο διάστημα $[0, \pi]$ (Μέση τιμή συνάρτησης f(x) στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ $f(\xi) = \frac{1}{\beta - \alpha}\int_\alpha^\beta f(x)dx$).

14. 0 αριθμός των ατόμων που παραμένουν στη μάζα ενός υλικού κατά τη διάρκεια ραδιενεργούς διάσπασης μετά από t sec δίνεται από τον τύπο: $N = N_0 e^{-\lambda t}$, όπου N_0 και λ είναι σταθερές. Βρείτε τον μέσο αριθμό των ατόμων στη μάζα του υλικού στη χρονική περίοδο t = 0, t = 1/λ.

15. Να υπολογισθούν τα ακρότατα και τα σαγματικά σημεία της συνάρτησης:

    α) $f(x,y)=2x^2+y^2-xy-7y$ και β) $g(x,y)=x^3+y^3-3xy$.

16. Να υπολογισθούν τα ακρότατα και τα σαγματικά σημεία της συνάρτησης h(x,y)=xημ(y) και να τα επιβεβαιώσετε στο γράφημα.



<u>Θεώρημα</u> Έστω f συνάρτηση δύο μεταβλητών της οποίας οι δεύτερες μερικές παράγωγοι είναι συνεχείς σε κάποια γειτονιά του σημείου (x_o,y_o). Έστω επίσης $f_x(x_o,y_o)=f_y(x_o,y_o)=0$.

Θέτουμε: $\mathbf{A=f_{xx}(x_o,y_o)}$, $\mathbf{B=f_{xy}(x_o,y_o)}$, $\mathbf{\Gamma=f_{yy}(x_o,y_o)}$ *και* $\mathbf{\Delta=B^2-A\Gamma}$.

Τότε α) Εάν $\Delta<0$ και $A<0$, το (x_o,y_o) είναι τοπικό μέγιστο σημείο.β) Εάν $\Delta<0$ και $A>0$, το (x_o,y_o) είναι τοπικό ελάχιστο σημείο.γ) Εάν $\Delta>0$, το (x_o,y_o) είναι σαγματικό σημείο.δ) Εάν $\Delta=0$, δεν μπορούμε να εξάγουμε συμπεράσματα για την συγκεκριμένη περίπτωση)

17. Η ταχύτητα v κινητού δίνεται από τον τύπο: v = (4t+3) m/sec όπου t(sec), βρείτε τη μέση τιμή της ταχύτητας στο χρονικό διάστημα t =0, t = 3sec.

18. Να υπολογιστεί η ενεργός τιμή της έντασης εναλλασσομένου ημιτονικού ρεύματος $i = I_0 \sin \omega t$ στο διάστημα $[0,\pi]$.

19. Να υπολογιστεί η ενεργός τιμή και η μέση τιμή της τάσης εναλλασσομένου ημιτονικού ρεύματος $v = 340\sin \omega t$ στο διάστημα $[0,\pi]$.Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου Ω που δημιουργεί η συνάρτηση $y(x) = 5x - x^2$ με τον άξονα x΄x σχεδιάζοντας πρώτα τη συνάρτηση στο πρόγραμμα.

20. Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα:

$$\int x^2 \sin x dx, \quad \int_0^{\pi} e^{3x} \cos x dx, \quad \int_1^{e} x^m \ln x dx, \quad \int_0^1 ar\sin x dx, \quad \int_m^n xye^{ax} dy.$$

21. Να υπολογισθούν τα διπλά ολοκληρώματα στις αντίστοιχες περιοχές ολοκλήρωσης Ω:

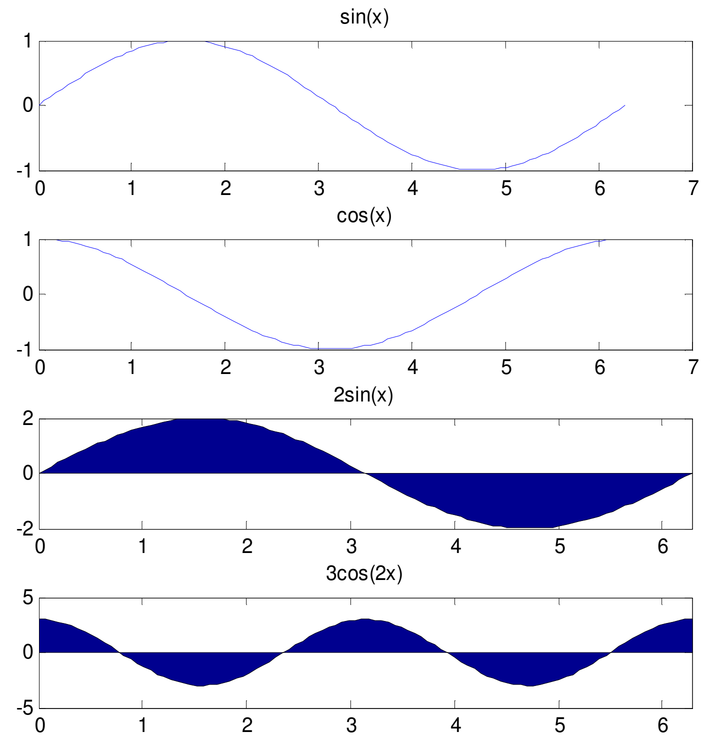
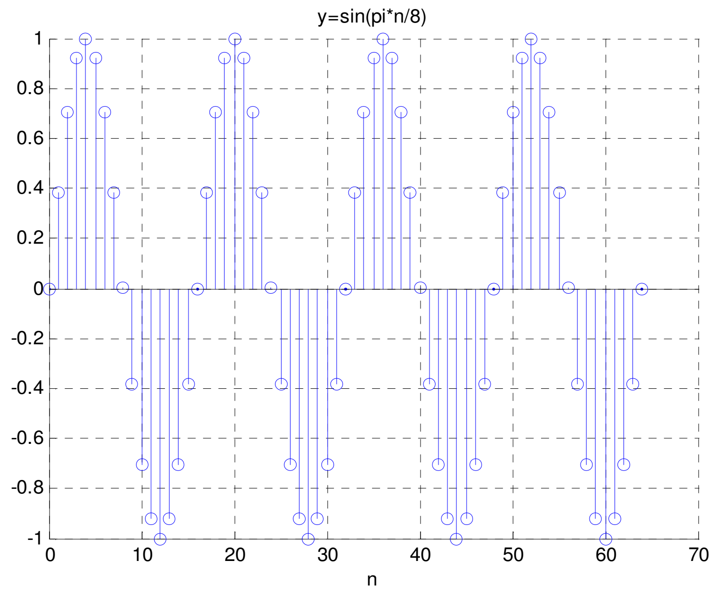
$$a)\left\{\iint_\Omega (y-\sin(\pi x^3))dxdy,\ \ \Omega=\begin{Bmatrix}0\le x\le 1\\ 0\le y\le x\end{Bmatrix}\right., \qquad b)\left\{\iint_\Omega \left(\frac{x}{1+xy}\right)dxdy,\ \ \Omega=\begin{Bmatrix}0\le x\le 1\\ 0\le y\le 1\end{Bmatrix}\right.,$$

$$c)\left\{\iint_\Omega \left(3x^2y^2\right)dxdy,\ \ \Omega:\ \ y=|x|,\ y=-|x|\ \ \ x\in[-1,1]\right\},$$

$$d)\left\{\iint_\Omega (xy-y^3)dxdy,\ \ \Omega=\begin{Bmatrix}-1\le x\le y\\ 0\le y\le 1\end{Bmatrix}\right..$$

ΜΑΘΗΜΑ 6^{o}

ΓΡΑΦΗΜΑΤΑ σε δυδιάστατο (2-D) και τρισδιάστατο (3-D) χώρο

<table>
<tr><th>ΚΩΔΙΚΑΣ</th><th>ΓΡΑΦΗΜΑ</th></tr>
<tr><td colspan="2">Υπογραφήματα (ταυτόχρονη σχεδίαση γραφημάτων)
Στο παρακάτω γράφημα δημιουργήσαμε 4 γραφήματα σε μια στήλη (4 σειρές και 1 στήλη)</td></tr>
<tr><td>x=linspace (0,2*pi);
y=sin(x);
z=cos(x);
a=2*sin(x);
b=3*cos(2*x)
subplot(4,1,1)
plot(x,y),
title('sin(x)')
subplot(4,1,2)
plot(x,z);
title('cos(x)')
subplot(4,1,3)
area(x,a);
title('2sin(x)')
subplot(4,1,4)
area(x,b);
title('3cos(2x)')</td><td>
</td></tr>
<tr><td colspan="2">Σχεδίαση ακολουθίας ή χρονοδιακριτής συνάρτησης
Παράδειγμα: σχεδίαση της ακολουθίας $y(n)=\eta\mu(\pi n/8)$</td></tr>
<tr><td>n=(0:1:64);
y=sin(pi*n/8);
stem(n,y)
title('y=sin(pi*n/8)')
grid on
xlabel('n')</td><td>
</td></tr>
</table>

Τα ειδικά θεμελιώδη Σήματα

Βηματικό-Heaviside και Κρουστικό-Dirac στο MATLAB

- *Το Βηματικό-Heaviside σήμα (συνάρτηση):*

$$u(x-a) =: \begin{cases} 1, & x \geq a \\ 0, & x < a \end{cases} \quad \leftrightarrow \quad Heaviside(x-a) \ \ \eta \ \ (\boldsymbol{x \geq a})$$

- *Το κρουστικό-Dirac σήμα (συνάρτηση):*

$$\delta(x-a) = \begin{cases} 1, & x = a \\ 0, & x \neq a \end{cases} \quad \leftrightarrow \quad Dirac(x-a) \quad \eta \quad (\boldsymbol{x = a})$$

Η βηματική συνάρτηση αποτελεί απαραίτητο εργαλείο για την δημιουργία πολυκλαδικών συναρτήσεων στο MATLAB.

Π.χ. η συνάρτηση-σήμα, $f(t) = \begin{cases} c, & |x-a| \leq T \\ d, & |x-a| > T \end{cases}$

δημιουργείται στο MATLAB και σχεδιάζεται με τις παρακάτω 3 εντολές:

f1=(abs(x-a)<=T);

f2=(abs(x-a)>T);

f=c*f1+d*f2

Οπότε παίρνουμε:

f= c*Heaviside(x-a+T)*Heaviside(-x+a+T)+d*(Heaviside(x-a-T)* Heaviside(-x+a-T)

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

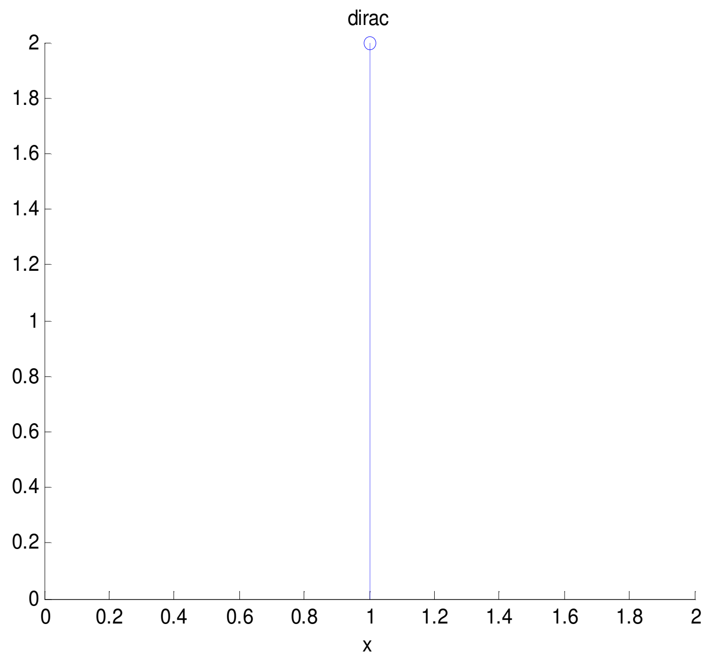
Σχεδίαση της συνάρτησης Dirac, $2\delta(x-1) = \begin{cases} 2, & x = 1 \\ 0, & x \neq 1 \end{cases}$

x= -3:1:5;

stem ([1],[2])

title('dirac')

xlabel('x')



Σχεδίαση της συνάρτησης, $f(t)=\begin{cases}1, & 0\le t\le 2\\ -1, & 2<t\le 4\end{cases}$.

Έστω α<x<β. Με πρόσθεση κατά μέλη της ανίσωσης αυτής με το $-\dfrac{\alpha+\beta}{2}$ *παίρνουμε:*

$$-\frac{\beta-\alpha}{2}<x-\frac{\alpha+\beta}{2}<\frac{\beta-\alpha}{2} \text{ ή } \left|x-\frac{\alpha+\beta}{2}\right|<\frac{\beta-\alpha}{2}.$$

t=0:0.01:4;*% Ορίζουμε διάστημα τιμών για την μεταβλητή t*

f1=(abs(t-1)<=1);

f2=(abs(t-3)<1);

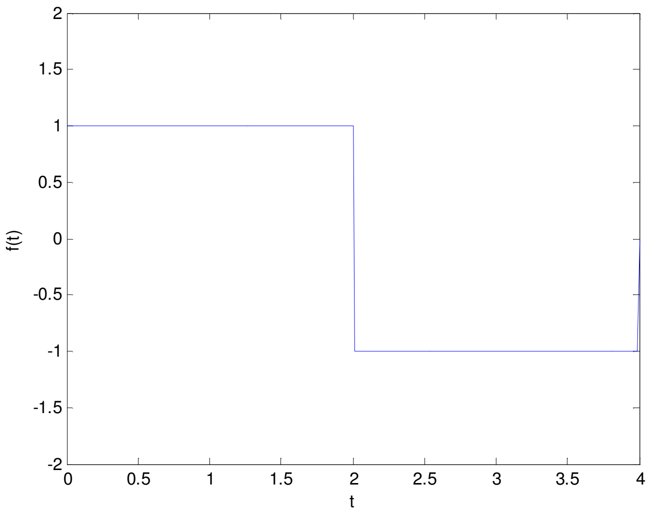
f=f1-f2;*% Δημιουργούμε την f*

plot(t,f)

xlabel('t')

ylabel('f(t)')

axis([0 4 -2 2])



Γραφήματα σε πολικές συντεταγμένες

*Το πολικό σύστημα συντεταγμένων είναι ένα εναλλακτικό σύστημα συντεταγμένων στο επίπεδο. Στο πολικό σύστημα συντεταγμένων υπάρχει ένα σημείο Ο (**ο πόλος**) και **ο πολικός άξονας** Οx που είναι η οριζόντια ημιευθεία από το Ο προς τα δεξιά.*

Η θέση κάθε σημείου Μ καθορίζεται από τις **πολικές του συντεταγμένες [ρ, θ],** όπου

- ***ρ*** *είναι η* ***απόσταση*** *του σημείου Μ από το σημείο Ο* ***(ρ = ΟΜ)***
- ***θ είναι η γωνία που σχηματίζει η ακτίνα ΟΜ με τον πολικό άξονα.***

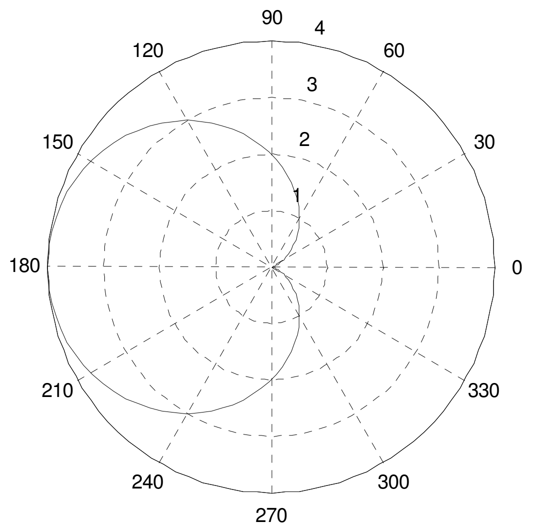
Παράδειγμα: σχεδίαση της συνάρτησης, r(t)=2(1-συν(t))

t=linspace(0,2*pi);

r=2*(1-cos(t));

polar(t,r)

title('r=2(1-cost)')

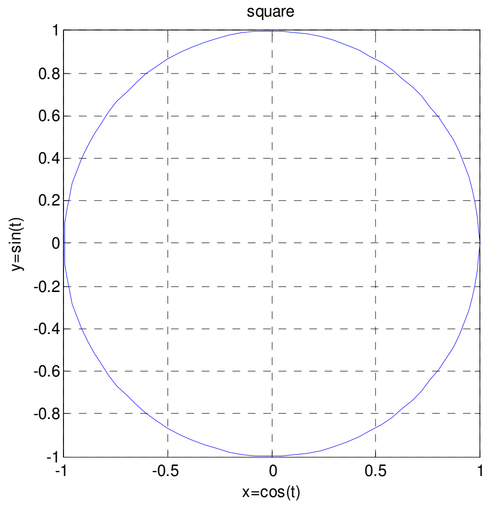


Σχεδίαση παραμετρικών εξισώσεων

Αν οι συντεταγμένες (x, y) ενός σημείου P μιας καμπύλης δίνονται ως συναρτήσεις $x = f(t)$, $y = g(t)$ μιας άλλης μεταβλητής ή ***παραμέτρου*** *t , τότε οι εξισώσεις λέγονται* ***παραμετρικές εξισώσεις*** *της καμπύλης.*

Παράδειγμα: Να σχεδιαστεί ο κύκλος $x^2 + y^2 = 1$*, δίνοντας τις παραμετρικές εξισώσεις του:* $x(t) = cos(t)$, $y(t) = sin(t)$

```
t=linspace(0,2*pi);
plot(cos(t),sin(t))
axis square;
title('square')
xlabel('x=cos(t)')
ylabel('y=sin(t)')
grid on
```



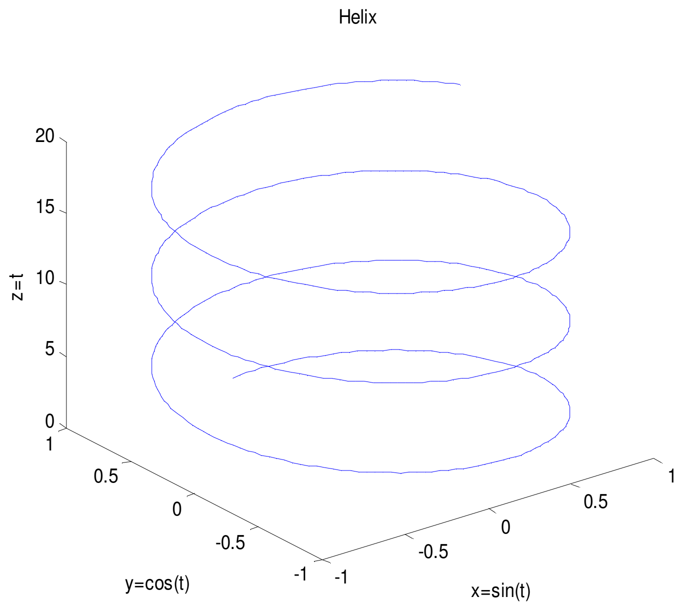
Σχεδίαση καμπύλης σε 3-d χώρο

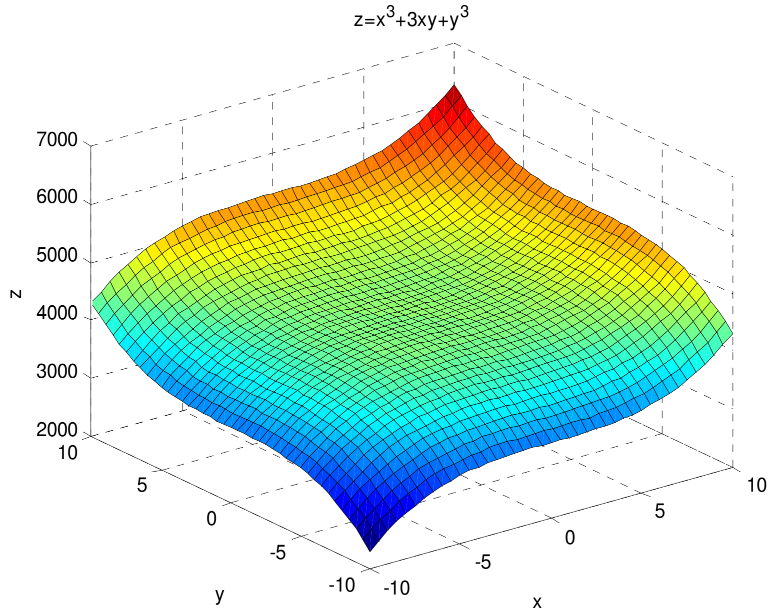
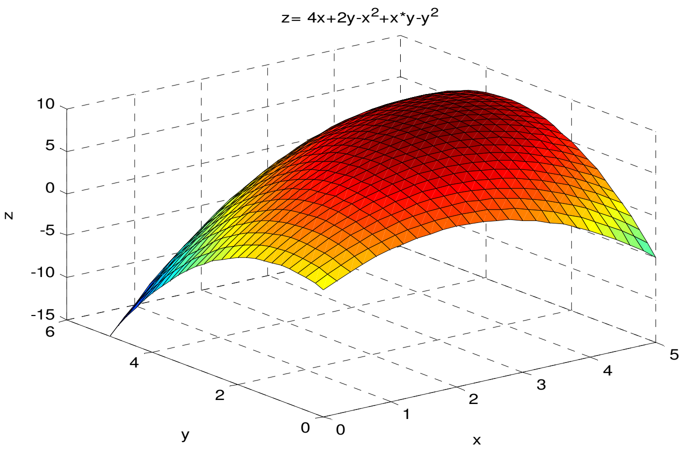
Μπορούμε να σχεδιάσουμε μια καμπύλη σε τρισδιάστατο χώρο όταν έχουμε τη διανυσματική της εξίσωση δίνοντας τις παραμετρικές συντεταγμένες της.

Παράδειγμα Να σχεδιαστεί σε τρισδιάστατο χώρο η ελικοειδής καμπύλη με

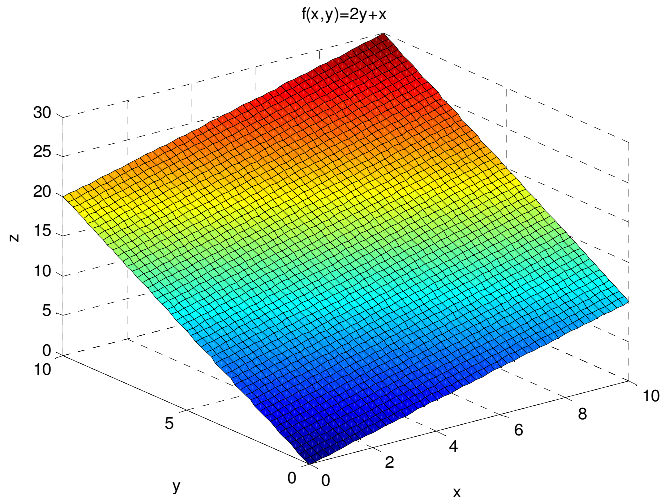
διανυσματική εξίσωση: y(t)=iημt +jσυνt+kt.

```
t=linspace(0,20,500);
plot3(sin(t),cos(t), t)
title('Helix')
xlabel('x=sin(t)')
ylabel('y=cos(t)')
zlabel('z=t')
```



<table>
<tr><td colspan="2">Σχεδίαση συναρτήσεων δύο μεταβλητών z(x,y)
Το πεδίο ορισμού σχεδίασης δίνεται με την εντολή meshgrid (α,βήμα, β) και αφορά το εύρος τιμών των ανεξάρτητων μεταβλητών x,y.
Η εντολή σχεδίασης είναι surf(X,Y,Z)</td></tr>
<tr><td>[x,y]=meshgrid(-10:.5:10);
z= x.^3+3*x*y+y.^3;
surf(x,y,z)
xlabel('x')
ylabel('y')
zlabel('z')
grid on
title('z=x^3+3xy+y^3')</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td></td><td></td></tr>
<tr><td>[x,y]=meshgrid(0:.2:5);
z= 4*x+2*y-x.^2
+x.*y-y.^2;
surf(x,y,z)
xlabel('x')
ylabel('y')
zlabel('z')
title
('z= 4x+2y-x^2+x*y-y^2')</td><td></td></tr>
</table>

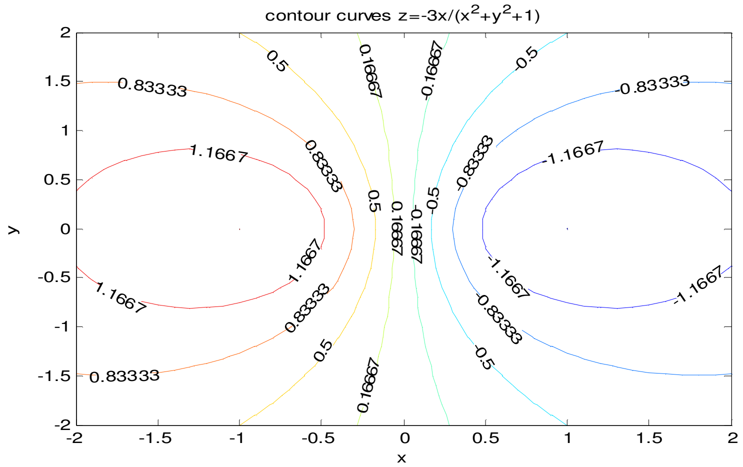
```
[x,y] = meshgrid(0:0.2:10);
z = 2*y+x;
surf(x,y,z)
xlabel('x')
ylabel('y')
zlabel('z')
title('f(x,y)=2y+x')
```



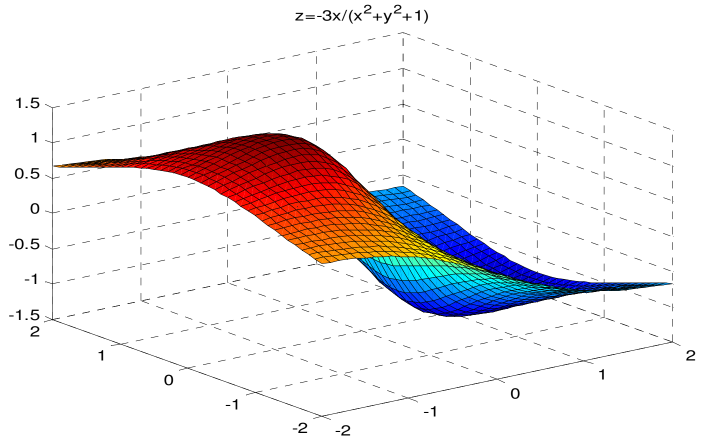
*Έστω συνάρτηση $z=f(x,y)$. Θεωρούμε ένα επίπεδο Π, με εξίσωση $z=c$, το οποίο τέμνει την γραφική παράσταση της f. Η τομή του Π με την επιφάνεια $z=f(x,y)$, θα είναι μια καμπύλη στο χώρο, η οποία έχει για σημεία της, όλα τα σημεία (x,y,z) για τα οποία ισχύει: $z=f(x,y)$ και $z=c$. Δηλαδή θα είναι όλα τα σημεία (x,y,c) για τα οποία $f(x,y)=c$. Καμπύλες αυτού του τύπου θα τις ονομάζουμε **ισοσταθμικές καμπύλες της.***

Σχεδίαση ισοσταθμικών καμπυλών της συνάρτησης $z(x,y)= -3x/(x^2+y^2+1)$

```
[x,y]=meshgrid(-2:0.1:2);
z=-3*x./(x.^2+y.^2+1);
[c,h]=contour(x,y,z,10);% σχεδιάζει 10 ισοσταθμικές καμπύλες
clabel(c,h)
title ('contour curves z=-3x/(x^2+y^2+1)')
xlabel('x')
ylabel('y')
```

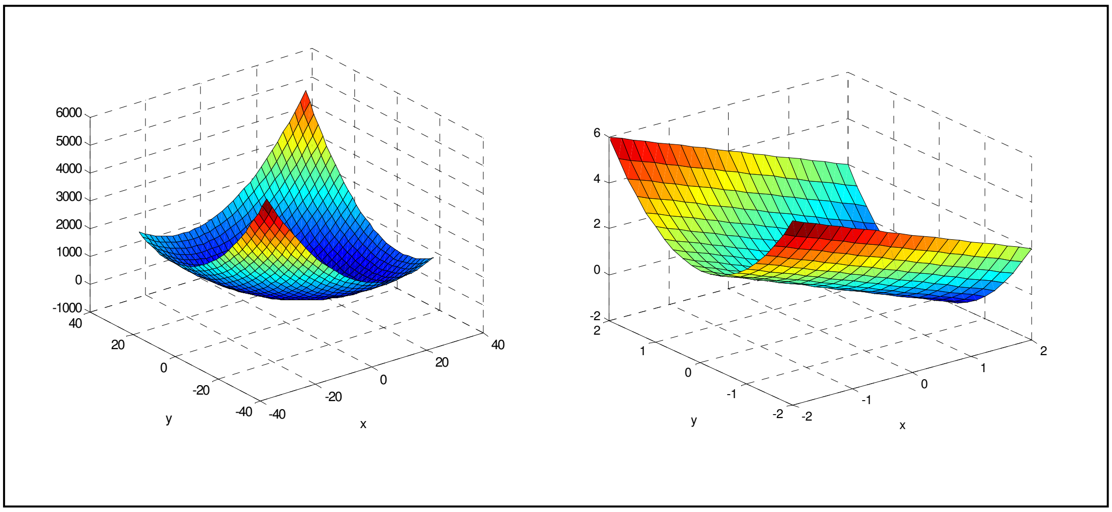



```
[x,y]=
meshgrid(-2:0.1:2);
z=-3*x./(x.^2+y.^2+1);
surf(x,y,z)
title
('z=-3x/(x^2+y^2+1)')
```



ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να σχεδιαστούν σε πολικές συντεταγμένες οι συναρτήσεις r1 = 2cos2t, r2 = 2cos(3t), r3 = 2cos(4t), r4 = 2cos(5t), r5 = 2t (σπείρα του Αρχιμήδη (spiral)). Να σχεδιαστούν με την εντολή subplot(3,3,..)
2. Να γίνει η γραφική παράσταση της κυκλοειδούς καμπύλης η οποία δίνεται παραμετρικά από τις συναρτήσεις: $x(\theta) = r(\theta\text{-}\sin(\theta))$, $y(\theta) = r(1\text{-}\cos(\theta)))$. Θέστε r = 2.
3. Να σχεδιαστεί σε τρισδιάστατο χώρο η ευθεία γραμμή με διανυσματική εξίσωση r(t)=(1+2t)i +(-1-t)j+(2+2t)k.
4. Να σχεδιαστούν στο ίδιο γράφημα οι συναρτήσεις: e^{3x}, e^{-3x},3^x,3^{-x},10^x και να αναγνωρίσετε (ονομάσετε) στο γράφημα την κάθε μια.
5. Να σχεδιαστεί η ευθεία y=(1+t)i+(-2t)j+tk
6. Να αναγνωρίσετε – αιτιολογήσετε - σχεδιάσετε τις ισοσταθμικές καμπύλες της συνάρτησης z=4x^2+y^2 καθώς και τη συνάρτηση. Να αιτιολογήσετε το σχήμα με τη βοήθεια των καμπυλών.
7. Τι είδους καμπύλες είναι οι ισοσταθμικές των παρακάτω συναρτήσεων; i) $f(x,y)=y^2-x^2$, ii) f(x,y)=4-x-2y ,iii) $f(x,y)=x^2 /9 + y^2 /4$
8. Να σχεδιαστεί η συνάρτηση f(x,y)= x^2 +y^2. Να βρεθεί η κλίση της εφαπτομένης της καμπύλης που τέμνει την επιφάνεια όταν x=3 στο σημείο (3,-5). Να υποδειχθεί τι εκφράζει μαθηματικά.
9. Να βρεθούν τα ακρότατα της συνάρτησης $z(x,y) = 2x^2 + 2xy + 2y^2 - 6x$ και να επιβεβαιωθούν αφού σχεδιάσετε το γράφημά της.
10. Να αναγνωρίσετε σε ποιο γράφημα αντιστοιχεί η συνάρτηση $z(x,y) = 2x^2 + 2xy + 2y^2 - 6x$ και να δικαιολογήσετε την άποψή σας



ΜΑΘΗΜΑ 7^{o}

Α) ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ LAPLACE (ML)
(Υπολογισμός ευθύ και αντίστροφου ML χρονοσυνεχών σημάτων)

Ο Μετασχηματισμός LAPLACE μετατρέπει ένα χρονοσυνεχές (αναλογικό) σήμα f(t) του πεδίου του χρόνου t, στο σήμα F(s) του πεδίου συχνοτήτων s, σύμφωνα με την πράξη: $L\{ f(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t)dt = F(s)$ ενώ ο **αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace:** $L^{-1}\{F(s)\} = f(t)$

Δηλ. ένα σήμα-ηλεκτρική κυματομορφή f(t) που συνήθως στις εφαρμογές εξετάζεται από τον παλμογράφο στο πεδίο του χρόνου t, χρειάζεται να γνωρίζουμε το φάσμα της F(s) στο πεδίο συχνοτήτων s για να αναλυθεί από το φασματοσκόπιο και αντίστροφα.
Έτσι στον τομέα των αναλογικών LTI Σημάτων-Συστημάτων, αυτή η αμφίδρομη πορεία μεταξύ του σήματος f(t) -(ως προς τον χρόνο t) και του αντίστοιχου φάσματος (σήματος) F(s)-(ως προς την συχνότητα s), επιτυγχάνεται μέσω του ML, που εδώ θα γνωρίσουμε πώς υπολογίζεται με χρήση του MATLAB.

Παραδείγματα υπολογισμού του μετασχηματισμού LAPLACE με τη χρήση του MATLAB

ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ	ΚΩΔΙΚΑΣ MATLAB
f = sin(150πt)	**>>syms t s** **>>f=sin(150*pi*t)** **>>F=laplace(f,t,s)** F =150*pi/(s^2+22500*pi^2)
g = $t^9e^{(t-2)}$	**>>syms t s** **>>g=t^9*exp(t-2)** **>>F=laplace(g,t,s)** F =362880*exp(-2)/(s-1)^10
d = dirac(t-5)	**syms t s** **d=dirac(t-5)** **F=laplace(d,t,s)** F =exp(-5*s)
u = u(t-2)	**syms t s** **u=heaviside(t-2)** **F=laplace(u,t,s)** F =exp(-2*s)/s
$f(t) = \begin{cases} 2, & -1 < t < 1 \\ 0, & \alpha\lambda\lambda o\acute{\upsilon} \end{cases}$ ή	**syms t s** **u=2*heaviside(1-t)*heaviside(t+1)**

$f(t)=\begin{cases}2, & \|t\|<1\\ 0, & \|t\|>1\end{cases}$	**F=laplace(u,t,s)** F = 2/s-2*exp(-s)/s
$f(t)=\begin{cases}1, & 0\le t\le 2\\ -1, & 2<t\le 4\end{cases}$	**syms t s** **f=sym('Heaviside(t)*Heaviside(-t+2)-Heaviside(t-2)*Heaviside(-t+4)'); %Δημιουργούμε την συνάρτηση f** **F=laplace(f,t,s); % Βρίσκουμε τον (M.L) της f τον οποίο ονομάζουμε F** **pretty(F)**
Σχεδίαση της $f(t)=\begin{cases}1, & 0\le t\le 2\\ -1, & 2<t\le 4\end{cases}$ Στο πρόγραμμα	**t=0:0.01:4***;% Ορίζουμε διάστημα τιμών για την μεταβλητή t* **f1=(abs(t-1)<=1***);% Δημιουργούμε μέσω λογικής πρότασης την συνάρτηση u(n)u(-n+2)* **f2=(abs(t-3)<1***);% Δημιουργούμε μέσω λογικής πρότασης την συνάρτηση u(n-2)u(-n+4)* **f=f1-f2;% Δημιουργούμε την f** **plot(t,**
$f(x)=\begin{cases}x, & 0<x<2\\ 4-x, & 2<x<4\end{cases}$ Να βρεθεί το γράφημα και η μετασχηματισμένη της κατά Laplace.	**syms t s** **f=sym('t*Heaviside(t)*Heaviside(-t+2)+(4-t)*Heaviside(t-2)*Heaviside(-t+4)');** **F=laplace(f,t,s);** **pretty(F)** **t=0:0.001:4;** **f1=(abs(t-1)<=1);** **f2=(abs(t-3)<1);** **f=t.*f1+(4-t).*f2;** **plot(t,f)**
$f(t)=\begin{cases}4, & 0<t<1\\ 0, & 1\le t<2\end{cases}$	**syms t s** **u=4*heaviside(t)*heaviside(1-t)+0*heaviside(t-1)*heaviside(2-t)** **F=laplace(u,t,s)** F = -4*(-1+exp(-s))/s
f=$e^{\alpha t}\sin(\omega t)$	**syms t s a v** **f=exp(a*t)*sin(v*t)** **F=laplace(f,t,s)** F =v/((s-a)^2+v^2)
$f(t)=\sin^2 t+2e^{3t}$.	**syms t s** **f=(sin(t))^2+2*exp(3*t)** **F=laplace(f,s,t)** **pretty(F)**

Παραδείγματα υπολογισμού του αντίστροφου μετασχηματισμού LAPLACE με τη χρήση του MATLAB

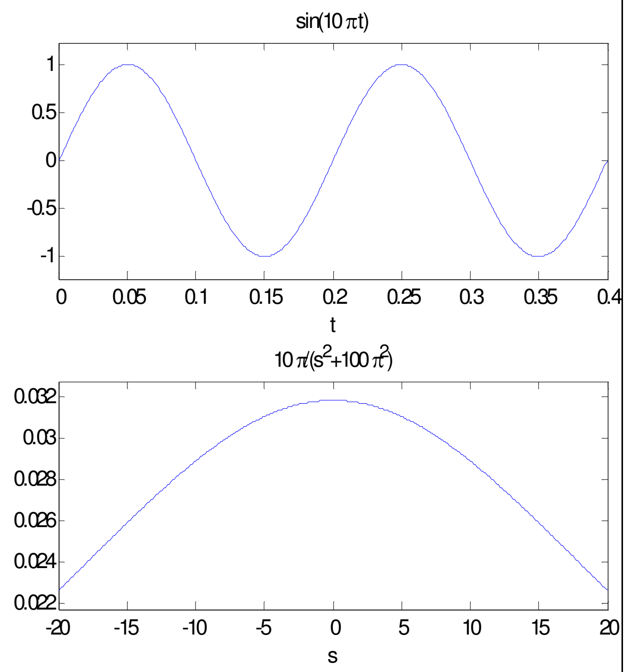
ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ	ΚΩΔΙΚΑΣ
F=1/(s^2+9)	**syms t s** **F=1/(s^2+9)** **f=ilaplace(F,s,t)** **f = 1/3*sin(3*t)**
F= $\frac{9-4s}{2s^2+8s+40}$	**syms t s** **F=(9 - 4*s)/(2*s^2+8*s+40)** **f=ilaplace(F,s,t)** *f = -2*exp(-2*t)*cos(4*t)+17/8*exp(-2*t)*sin(4*t)* **pretty(f)** *-2 exp(-2t) cos(4t) + 17/8 exp(-2t) sin(4t)*

Παράδειγμα: Να υπολογιστεί ο $\mathbf{L}^{-1}(\frac{s+1}{s^2+s+1})$ *και να γίνει η γραφική του παράσταση.*

Επίσης να διαπιστωθεί ότι $\mathbf{L}(\mathbf{L}^{-1}(\frac{s+1}{s^2+s+1}))=\frac{s+1}{s^2+s+1}$.

ΚΩΔΙΚΑΣ	ans
syms t s **F=(s+1)/(s^2+s+1**);% *Δημιουργούμε την συνάρτηση* **f=ilaplace(F,s,t)** % *Υπολογίζουμε τον αντίστροφο ML τον οποίο ονομάζουμε f*	f = exp(-1/2*t)*cos(1/2*3^(1/2)*t) +1/3*3^(1/2)*exp(-1/2*t)*sin(1/2*3^(1/2)*t)
g=laplace(f,t,s) % *Υπολογίζουμε τον ευθύ ML της f τον οποίο ονομάζουμε* **g**	g=4/3*(s+1/2)/(4/3*(s+1/2)^2+1)+2/3/(4/3*(s+1/2)^2+1)
h=simplify(g) % *Απλοποιούμε την συνάρτηση g*	h = s+1)/(s^2+s+1)
pretty(h) % *Διαπιστώνουμε g=F*	s + 1 ---------- S^2 + s + 1
ezplot(f,t)	

Σχεδίαση συνάρτησης f(t)=sin(10πt) και του μετασχηματισμού της κατά Laplace

<table>
<tr><th>ΚΩΔΙΚΑΣ</th><th>ans</th></tr>
<tr><td>syms t s
f=sin(10*pi*t)
F=laplace(f,t,s)
F= 10*pi/(s^2+100*pi^2)
subplot(2,1,1)
ezplot(f,[0,2/5])
subplot(2,1,2)
ezplot(F,[-20,20])</td><td>
</td></tr>
<tr><td colspan="2">Ποιες διαφορές παρατηρείτε στο γράφημα μιας συνάρτησης κατά τον μετασχηματισμό της από το πεδίο του χρόνου στο πεδίο των συχνοτήτων;</td></tr>
<tr><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td colspan="2">Υπολογισμός αντίστροφου Laplace της συνάρτησης F=(3cos(π/4)+s*sin(π/4))/(s²+9)
Και σχεδίαση της συνάρτησης στο πεδίο του χρόνου και στο πεδίο Laplace</td></tr>
<tr><td>syms t s
F=(3*cos(pi/4)+s*sin(pi/4))/(s^2+9);
f=ilaplace(F)
pretty(f)
laplace(f)
ezplot(t,f,[-30,30])
ezplot(s,F,[-3,3])</td><td>f =1/2*2^(1/2)*cos(3*t)
+1/2*2^(1/2)*sin(3*t)
1/2 1/2
1/2 2 cos(3 t) + 1/2 2 sin(3 t)
ans
=1/2*2^(1/2)*s/(s^2+9)+3/2*2^(1/2)/(s^2+9)</td></tr>
</table>

B) Ανάλυση χρονοσυνεχών LTI Συστημάτων μέσω του Μετασχηματισμού LAPLACE

(Ο Μετασχηματισμός LAPLACE στη λύση Γραμμικών Διαφορικών Εξισώσεων με σταθερούς συντελεστές, με χρήση του MATLAB)

Όπως είναι γνωστό, τα χρονοσυνεχή (αναλογικά) Σήματα-Συστήματα χρειάζεται συχνά στις τεχνολογικές εφαρμογές να μετασχηματίζονται από το πεδίο του χρόνου t, σε αντίστοιχα σήματα ενός νέου πεδίου –συνήθως της συχνότητας s (ή ω).
Όπου εκεί στο πεδίο συχνοτήτων, συνήθως το φάσμα τους είναι πιο "αποκαλυπτικό" και η επεξεργασία των σημάτων-συστημάτων είναι γενικά βολικότερη.
Επειδή δε τα προβλήματα των αναλογικών Σημάτων-Συστημάτων στις Τεχνολογικές Εφαρμογές καταλήγουν συνήθως να μοντελοποιούνται και να περιγράφονται μαθηματικά μέσω Γραμμικών Διαφορικών Εξισώσεων με σταθερούς συντελεστές, γίνεται φανερός πλέον ο λόγος για τον οποίο οι Τεχνολόγοι προτιμούν να λύνουν τέτοιες Δ.Ε. μέσω του Μετασχηματισμού Laplace (ή ανάλογα του Μετασχηματισμού Fourier, κλπ). Αφού μέσω των κατάλληλων Μετασχηματισμών επιτυγχάνουν ταυτόχρονα και να λύνουν τέτοιες Διαφορικές Εξισώσεις αλλά και να "μεταφέρονται" από το πεδίο του χρόνου t -στο πεδίο συχνοτήτων s και αντίστροφα.
Οι παρακάτω ιδιότητες του ML:είναι χρήσιμες στην εποίλυση διαφορικών εξισώσεων

$$L\{f'(t)\} = s\cdot\Phi(s) - f(0) \;\; \textit{ή} \;\; L\{f''(t)\} = s^2\cdot\Phi(s) - s\cdot f(0) - f'(0) \;\; \textit{κλπ}$$

Θα δούμε λοιπόν με ποιο τρόπο το MATLAB, περιγράφει και αναλύει χρονοσυνεχή συστήματα στο πεδίο του χρόνου και της συχνότητας με χρήση του Μετασχηματισμού Laplace.

<u>Παράδειγμα</u> (σελ. 154, &2.6.2., παραδ. 1)
Να υπολογιστεί η έξοδος $y(t)$ του χρονοσυνεχούς LTI συστήματος με είσοδο $x(t)=t$, που περιγράφεται μαθηματικά από τη Γραμμική Διαφορική Εξίσωση:
$y''-3y'+2y=t$, όταν $y(0)=y'(0)=0$.
Στη συνέχεια να γίνει επαλήθευση ότι στην ευρεθείσα έξοδο (output) $y(t)$ αντιστοιχεί η δοθείσα είσοδος (input) $x(t)=t$.

Λύση

```
» syms t s Y
» ode='D(D(y))(t)-3*D(y)(t)+2*y(t)=t';
» ltode=laplace(ode,t,s);
» eqn=subs(ltode,{'laplace(y(t),t,s)','y(0)','D(y)(0)'},{Y,0,0});
» Y=solve(eqn,Y);
» y=ilaplace(Y,s,t)

y =
1/2*t+3/4-exp(t)+1/4*exp(2*t)
» pretty(y)
                1/2 t + 3/4 - exp(t) + 1/4 exp(2 t)
» test=diff(y,2)-3*diff(y,1)+2*y
test =t
```

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να αποδείξετε τις παρακάτω ιδιότητες του M.L. σχεδιάζοντας κατάλληλες συναρτήσεις στο πεδίο του χρόνου και στο πεδίο Laplace:
   Μετατόπιση ως προς s: $L\{e^{\alpha t} f(t)\} = \Phi(s-a)$
   και μετατόπιση ως προς t: $L\{f(t-a)\} = e^{-as}\Phi(s)$

2. Να υπολογίσετε τους μετασχηματισμούς LAPLACE των συναρτήσεων με τη χρήση του MATLAB α) $\mathrm{L}\left\{10+12\mathrm{t}^7-20t^2-30t\right\}$,
   β) $\mathrm{L}\left\{5-\mathrm{e}^{3\mathrm{t}}+12\mathrm{t}^7\right\}$, γ) $\mathrm{L}\left\{-9\cos(9\mathrm{t})-\sin(2\mathrm{t})\right\}$, δ) $\mathrm{L}\left\{\frac{\mathrm{e}^{2\mathrm{t}}}{12}-10\sin(3\mathrm{t})\right\}$,
   ε) $\mathrm{L}\left\{10-7\cos(6\mathrm{t})+\frac{1}{3}\sin(\mathrm{t})-12\mathrm{t}^5\right\}$, στ) $\mathrm{L}\left\{2\mathrm{e}^{-3\mathrm{t}}\sin(2\mathrm{t})\right\}$, ζ) $\mathrm{L}\left\{2\mathrm{e}^{-3\mathrm{t}}\cdot\mathrm{t}^{10}\right\}$,
   η) $\mathrm{L}\left\{2\mathrm{t}-3\mathrm{te}^{-\mathrm{t}}+\frac{4}{3}t^9\right\}$, θ) $\mathrm{L}\left\{5\mathrm{e}^{-3\mathrm{t}}-6\cos(5\mathrm{t})+10\sin(4\mathrm{t})-12\mathrm{t}^6\right\}$,
   ι) $L\{u(t+4)\}$, κ) $\mathrm{L}\left\{\sinh(3\mathrm{t})-10\cosh(2\mathrm{t})\right\}$, λ) $L\{\delta(t-1)\}$,
   μ) $L\{e^{-2t}(t+1)^2\}$.

3. Να υπολογίσετε τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace των παρακάτω συναρτήσεων. α) $\frac{5}{s^2}$, β) $\frac{3}{s^5}-\frac{2}{s^4}$, γ) $\frac{3}{s+2}$, δ) $\frac{10}{(s+2)^3}$, ε) $\frac{1}{s}+\frac{1}{s+1}$,
   στ) $\frac{-6}{s^2+9}$, ζ) $\frac{1}{(s-3)^2}+\frac{1}{(s-3)^3}$, η) $\frac{s+2}{(s+2)^2+9}$, θ) $\frac{5}{(s+2)^2+9}$
   ι) $\frac{s+5}{(s+2)^2+9}$, κ) $\frac{s+4}{s^2+4s+4}$, λ) $\frac{7s+11}{s^2}$, μ) $\frac{3s^2+2s+5}{(s+1)(s^2+1)}$, ν) $\frac{1}{s^2-2s+9}$,
   ξ) $\frac{2s-1}{s^2+6s+10}$, ο) $\frac{9-4s}{2s^2+8s+40}$, π) $\frac{1}{s^2-2s+5}$

4. Να υπολογισθεί το σήμα f(t) που το φάσμα συχνοτήτων του εκφράζεται από τη συνάρτηση $\boldsymbol{F(s)=\frac{2\cos(\pi/3)+s.\sin(\pi/3)}{s^2+4}}$ και στην συνέχεια να επαληθευτεί ότι: $\mathbf{L}(\mathbf{L}^{-1}(F(s)))=F(s)$. Επίσης να γίνει η γραφική παράσταση της $f(t)=\mathbf{L}^{-1}(F(s))$ και της $\boldsymbol{F(s)=L\{f(t)\}}$.

5. Να λυθούν οι παρακάτω διαφορικές εξισώσεις με την βοήθεια του MATLAB $y'+y=\sin(t)$, y (0) = 1
   (Απ. $y(t)=3/2e^{-t}-1/2\cos(t)+1/2\sin(t)$)
   $y''+4y=0$, y (0) = 2, y΄(0) = 2
   (Απ. $y(t)=2\cos(2t)+\sin(2t)$)
   $y''-3y'+4y=0$ y(0)=1,y΄(0)=5
   $\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}+2t=\cos(3t)-17\sin(3t),\ y(0)=-1,\ y'(0)=6$
   (Απ. $y(t)=2\sin(3t)-\cos(3t)$)

6. Ομοίως α) $y''+2y'+y = sin(2t)$, όταν $y(0) = 2, y'(0) = 3.$
   b) $y'+y = 1,$ όταν $y(0) = 0.$
   c) $y'''-3y'-2y = 2\,sinh(2t),$ όταν $y''(0) = y'(0) = y(0) = 0.$
   d) $y''+2y'-1 = t,$ όταν $y(1) = 1, y'(0) = 1.$
7. Να λυθούν μέσω του MATLAB, οι ασκήσεις του βιβλίου Θεωρίας (σελ. 155): από 2, μέχρι 6.
8. Να λυθούν μέσω του MATLAB, οι ασκήσεις του βιβλίου Θεωρίας (σελ. 158): από 7, μέχρι 12.
9. Να λυθούν μέσω του MATLAB, οι ασκήσεις του βιβλίου Θεωρίας (σελ. 159):από 1, μέχρι 3.
10. Αν $f(t) = \begin{cases} 1, & 0 < t < 3 \\ 0, & 3 \le t < 6 \end{cases}$, να βρεθεί η $\mathbf{L}(f(t))$ και να γίνει η γραφική παράσταση του σήματος f.
11. (Παράδειγμα γ, σελίδα 86, για ν=1). Να βρεθεί ο (M.L) του αναλογικού σήματος $f(t) = \begin{cases} 1, & 0 < t < 3 \\ 0, & 3 \le t < 6 \end{cases}$, και να γίνει η γραφική παράσταση του σήματος f.
12. (Παράδειγμα 20, σελίδα 105). Αν $f(t) = \left\{ \begin{matrix} 0, & t < a \\ (t-a)^3, & t \ge a \end{matrix} \right\}$, να βρεθεί η $\mathbf{L}(f(t))$ ναα βρεθεί το ίδιο όταν α=5.
13. Να λυθούν οι ασκήσεις, σελ. 106 του βιβλίου θεωρίας: 24, 32, 33, 34, 37.
14. Να υπολογιστεί ο ML των χρονοσυνεχών σημάτων:a) 3u(t-7), b)7δ(t-3), c) 2u(t-4)-5sin(2t)δ(t-6), d)4cos(3t+2)u(t)u(t-2)+3sinh(t)δ(t-5)

ΜΑΘΗΜΑ 8^{o}

Α) ΣΕΙΡΕΣ FOURIER

Σειρά Fourier συναρτήσεων περιόδου T =2L,
ή ορισμένη και πληρούσα τις συνθήκες DIRICHLET στο διάστημα [-L, L], T>0.

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)+\beta_n\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\right)$$

όπου $a_n=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}f(x)\cos\left(\frac{2n\pi x}{T}\right)dx$, $\beta_n=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}f(x)\sin\left(\frac{2n\pi x}{T}\right)dx$,

και $a_o=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}f(x)dx$.

Σειρά Fourier άρτιων και περιττών συναρτήσεων ορισμένες στο διάστημα T=[-L, L]

Άρτια συνάρτηση f(x) = f(-x)	**Περιττή συνάρτηση f(x) = - f(-x)**
$a_o=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)dx$, $\beta_n=0$, $a_n=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx$	$\beta_n=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx$, $a_n=0$, $a_o=0$

Το φάσμα συχνοτήτων

Παραπάνω διαπιστώσαμε ότι εφαρμόζοντας το θεώρημα Fourier για μια περιοδική συνάρτηση μπορούμε να την εκφράσουμε σαν άθροισμα άπειρων αρμονικών όρων. Ο κάθε αρμονικός όρος της σειράς περιέχει δύο πληροφορίες:

- το πλάτος και
- την αντίστοιχη συχνότητα f (Hz) .

Αν θεωρήσουμε ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων με οριζόντιο άξονα τη συχνότητα και κατακόρυφο άξονα το πλάτος τότε, το πλάτος κάθε προσθετέου της σειράς Fourier θα παρίσταται από τμήμα ευθείας παράλληλης προς τον άξονα πλατών στο σημείο που αντιστοιχεί η συχνότητα του όρου αυτού.

Μια τέτοια απεικόνιση - ανάλυση της συνάρτησης θα λέγεται **φάσμα πλάτους - συχνότητας**. Το φάσμα είναι **γραμμικό** για την περίπτωση της περιοδικής συνάρτησης (ΣΕΙΡΑ FOURIER) ή **συνεχές** για την περίπτωση απεριοδικής ή μη περιοδικής συνάρτησης (ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ FOURIER).

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΥ ΤΗΣ ΣΕΙΡΑΣ Fourier

1) Δίδεται η συνάρτηση ή το περιοδικό σήμα: $f(x)=\begin{cases}0, & -4<x<0\\ 5, & 0<x<4\end{cases}$

α) Να σχεδιασθεί η συνάρτηση.

β) Να υπολογιστούν οι συντελεστές Fourier της Σειράς Fourier της συνάρτησης f(x) και στη συνέχεια να γραφεί ο γενικός τύπος της. Να γραφούν αναλυτικά οι πρώτοι 4 όροι της.

γ) Να γίνει γραφικά η προσέγγιση του παραπάνω περιοδικού σήματος μέσω της σειράς Fourier.

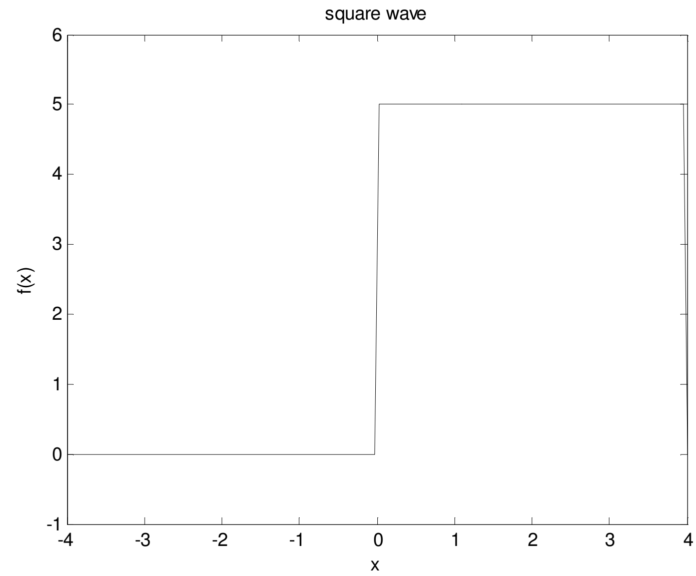
δ) Να γίνει απεικόνιση του φάσματος συχνοτήτων της για ένα μικρό αριθμό αρμονικών.

ΛΥΣΗ

α) *Σχεδιασμός της* $f(x)=\begin{cases}0, & -4<x<0\\ 5, & 0<x<4\end{cases} = \begin{cases}0, & |x+2|<2\\ 5, & |x-2|<2\end{cases}$

<table>
<tr><th>Κώδικας</th><th>Γράφημα (α)</th></tr>
<tr><td>

```
x=linspace(-4,4,200);
f1=(abs(x+2)<2);
f2=(abs(x-2)<2);
f=0*f1+5*f2;
plot(x,f,'k')
axis([-4 4 -1 6])
xlabel('x')
ylabel('f(x)')
title('square wave')
```

</td><td>


</td></tr>
<tr><td colspan="2">Βλέπουμε το γράφημα της συνάρτησης f(x) και τον κώδικα σχεδίασής της στο πρόγραμμα στο διάστημα μιας περιόδου της. Την παραπάνω συνάρτηση θα προσπαθήσουμε να την προσεγγίσουμε με την δημιουργία κατάλληλου αθροίσματος ημιτονοειδών συναρτήσεων ή μέσω της ανάλυσης της σε σειρά Fourier.</td></tr>
</table>

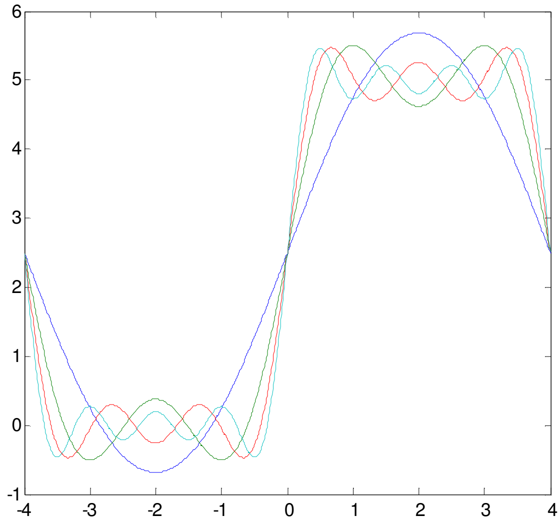
β) *Υπολογισμός των συντελεστών* α_o, α_n, β_n

<table>
<tr><td>Υπολογισμός του ολοκληρώματος $\int_0^4 5dx$
με την βοήθεια του προγράμματος:</td><td>syms x
f=5;
int(f,x,0,4)
ans = 20</td></tr>
<tr><td>Υπολογισμός του ολοκληρώματος $\left[\int_0^4 5\sin\left(\frac{2n\pi x}{8}\right)dx\right]$ με την βοήθεια του προγράμματος</td><td>syms n x
f=5*sin((2*n*pi*x)/8)
int(f,x,0,4)
ans =
-20*(cos(n*pi)-1)/n/pi
pretty(ans)</td></tr>
</table>

Για n = 1 υπολογίζω τον συντελεστή $\beta_1 = -\frac{5}{4}\cdot\frac{8}{2\pi}\cdot(-2)$ =10/π, ο πρώτος όρος της σειράς ή ο πρώτος αρμονικός όρος, συνεχίσουμε για n=2, κλπ.

Καταλήγουμε ότι, $f(x)=\frac{5}{2}+\frac{10}{\pi}\left(\sin\frac{2\pi x}{8}+\frac{1}{3}\sin\frac{6\pi x}{8}+\frac{1}{5}\sin\frac{10\pi x}{8}+...\right)$.

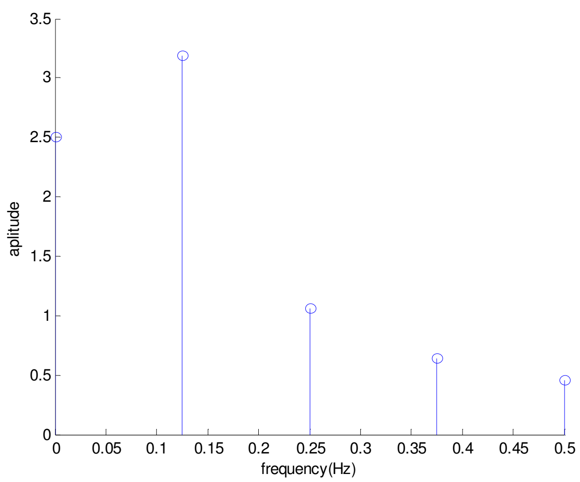
γ) Γραφική προσέγγιση της f(x) μέσω της αρμονικής ανάλυσής της

<table>
<tr><th>Κώδικας MATLAB</th><th>Γράφημα (β)</th></tr>
<tr><td>x=-4:0.01:4;
y1=5/2+10/pi*sin(2*pi*x/8);
y2=y1+10/(3*pi)*sin(6*pi*x/8);
y3=y2+10/(5*pi)*sin(10*pi*x/8
);
y4=y3+10/(7*pi)*sin(14*pi*x/8
);
plot(x,y1,x,y2,x,y3,x,y4)</td><td></td></tr>
</table>

<u>Ερώτηση:</u> Αν συγκρίνουμε τα γραφήματα (α) & (β) που καταλήγουμε;

<u>Απάντηση:</u> Θεωρητικά η συνάρτηση f(x) προσεγγίζεται από το άθροισμα άπειρων όρων αλλά φαίνεται ξεκάθαρα ότι από το άθροισμα των πρώτων τεσσάρων όρων της αρχίζει να διαφαίνεται η συνάρτηση που θέλουμε να προσεγγίσουμε.

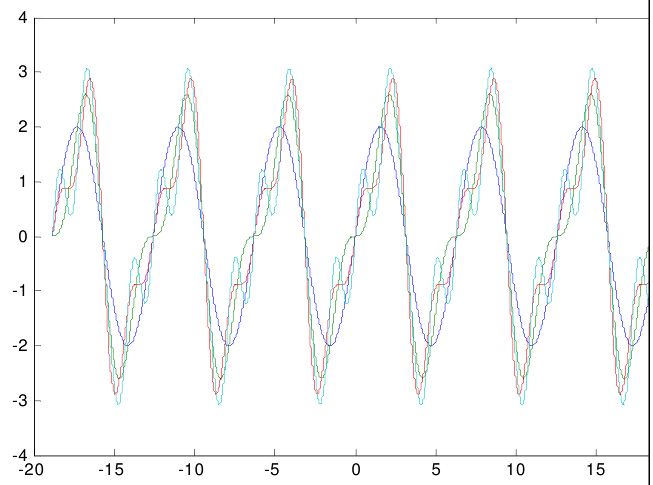
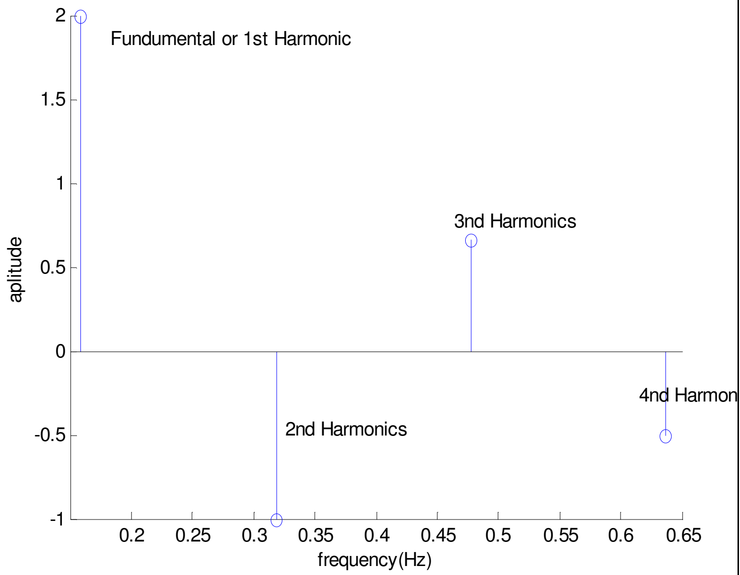
δ) *Φάσμα συχνοτήτων*

<table>
<tr><th>Κώδικας MATLAB</th><th>Γράφημα
Το διακριτό φάσμα πλάτους- συχνότητας της συνάρτησης f(x) για τους πέντε πρώτους όρους της.</th></tr>
<tr><td>>>x=linspace(0,0.5);
>>stem([0 1/8 2/8 3/8 4/8],
[5/2 10/pi 10/(3*pi) 10/(5*pi)
10/(7*pi)])
>> ylabel('aplitude')
>> xlabel('frequency(Hz)')</td><td></td></tr>
</table>

2) Δίδεται η συνάρτηση f(x) = x για x που ανήκει στο διάστημα [-π, π].
Να αποδειχθεί ότι η σειρά Fourier της συνάρτησης είναι:

$$2\sin(x) - \sin(2x) + \frac{2}{3}\sin(3x) - \frac{2}{4}\sin(4x) + \ldots .$$

Με τη βοήθεια του MATLAB να καταγραφεί προσέγγιση της συνάρτησης μέσω της ανάλυσης της σε σειράς Fourier. Να γίνει απεικόνιση του φάσματος συχνοτήτων της για ένα μικρό αριθμό αρμονικών.
Παρατήρηση: *Η συνάρτηση είναι περιττή συνάρτηση με περίοδο 2π. Άρα σύμφωνα με τα παραπάνω οι συντελεστές α_o και α_n είναι μηδέν.*

Κώδικας MATLAB	**Γράφημα**
x=-6*pi:0.01:6*pi; **>> y1=2*sin(x);** **>> y2=y1-sin(2*x);** **>> y3=y2+2/3*sin(3*x);** **>> y4=y3+2/4*sin(4*x);** **>> plot(x,y1,x,y2,x,y3,x,y4)** *Κοιτώντας 6 περιόδους της συνάρτησης που έχουμε αναλύσει σε σειρά Fourier έχουμε μια πιο ολοκληρωμένη εικόνα της ανάλυσης που επιχειρήσαμε.*	
Σχεδίαση των 4 πρώτων αρμονικών της f	
x=0:0.01:2/pi; **stem([1/(2*pi) 2/(2*pi) 3/(2*pi) 4/(2*pi)], [2 -1 2/3 -2/4]);** **ylabel('aplitude'); xlabel('frequency(Hz)')** **gtext('Fundumental or 1st Harmonic')** **gtext('2nd Harmonics')** **gtext('3nd Harmonics')** **gtext('4nd Harmonics')**	

B) ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ FOURIER

(Υπολογισμός ευθύ και αντίστροφου MF χρονοσυνεχών σημάτων)

Ο μετασχηματισμός Fourier αποτελεί την επέκταση των σειρών Fourier στη γενική κατηγορία των συναρτήσεων (περιοδικών και μη).

Ο **ορθός** ή ευθύς **μετασχηματισμός Fourier** της συνάρτησης **f(t) είναι**	$F\{\mathrm{f(t)}\} = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-i\omega \mathrm{t}} \mathrm{f(t)dt} = \Phi(\omega)\,,\ -\infty < t < +\infty$
Ο **αντίστροφος μετασχηματισμός Fourier** της συνάρτησης **Φ(ω) είναι**	$F^{-1}\{\Phi(\omega)\} = \dfrac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-i\omega \mathrm{t}} \Phi(\omega)\ \mathrm{dt}\ = \mathrm{f(t)}\,,$

Η φυσική σημασία του μετασχηματισμού Fourier στις τεχνολογικές εφαρμογές: Ο ορθός μετασχηματισμός **Fourier** αναλύει ένα απεριοδικό σήμα f(t) σε ένα φάσμα συχνοτήτων Φ(ω), ενώ ο αντίστροφος μετασχηματισμός **Fourier** συνθέτει αυτό το φάσμα και ξαναδίνει το αρχικό σήμα f(t).

Σχέση Σειράς Fourier και Μετασχηματισμού Fourier: .Όταν η κυματομορφή είναι μια μη-περιοδική συνάρτηση, δηλ. $\mathrm{T} = \square = (-\infty, +\infty)$ τότε χρησιμοποιούμε τον μετασχηματισμό **Fourier** που θεωρείται ως μια επέκταση των σειρών **Fourier.**

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

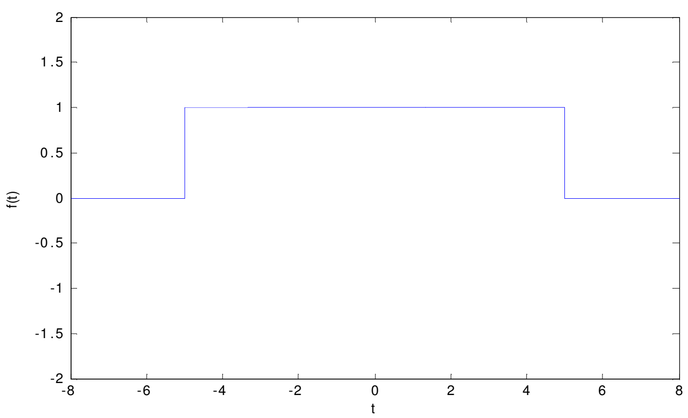
Συνάρτηση	**κώδικας**
1) $f(t) = te^{-\frac{t}{2}}$	**syms t w** **f=t*exp(-t^2**); *% Δημιουργούμε την συνάρτηση* $f(t)$ **F=fourier(f,t,w);** *% Ο μετασχηματισμός Fourier της* $f(t)$ **pretty(F)**
α) Να βρεθεί ο (M.F) της συνάρτησης $f(t) = -e^{-t}u(t) + 3\delta(d)$ β) να διαπιστωθεί, ότι $\mathbf{F}^{-1}\{\mathbf{F}\{\mathrm{f}(\mathrm{t})\}\} = f(t)$.	**syms t w** **f=sym('-exp(-t)*Heaviside(t)+3*Dirac(t)')** *%Δημιουργούμε την συνάρτηση* $f(t)$. **F=fourier(f); pretty(F)** **g=ifourier(F,w,t);** *%Βρίσκουμε τον αντίστροφο (M.F)της F* **pretty(g)** *% σε ποιο συμπέρασμα καταλήγουμε*;
$f(t) = \begin{Bmatrix} 1, & \|t\| < 1 \\ 0, & \|t\| > 1 \end{Bmatrix}$. β) Να γίνουν τα γραφήματα των $f(t),\ \Phi(\varpi) := \mathbf{F}(f(t))$.	**syms t w** **f=sym('Heaviside(t+1)*Heaviside(-t+1)');** **F=fourier(f,t,w); simplify(F)** **t=-4:0.001:4;** *% Δημιουργούμε διάστημα τιμών για την μεταβλητή t* **w=-6*pi:pi/128:6*pi; *% Δημιουργούμε διάστημα τιμών για***

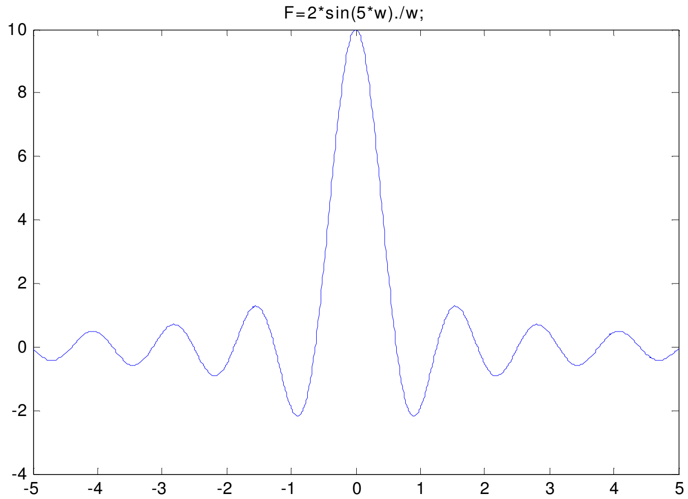
	την μεταβλητή w **f=(abs(t)<=1); % Δημιουργούμε την συνάρτηση f(t) μέσω λογικής πρότασης** **F=2.*sin(w)./w;** **subplot(2,1,1)** **plot(t,f);** **subplot(2,1,2)** **plot(w,F)**
2) $f(t)=\begin{cases} e^{-t}, & t\ge 0 \\ 0, & t<0 \end{cases}.$ α) Να βρεθεί ο (M.F.) β) Να δοθούν τα γραφήματα του φάσματος μέτρου-πλάτους'' $\left\|\Phi(\varpi)\right\|$ και του φάσματος ΄΄ορίσματος-φάσης΄΄ $\arg(\Phi(\varpi))$, ως προς ϖ.	**syms t w** **f=sym('exp(-t)*Heaviside(t)');** **F=fourier(f,t,w);** **simplify(F)** **w=-6*pi:pi/128:6*pi;** **F=1./(1+i.*w);** **F1=abs(F);** **F2=angle(F);** **subplot(2,1,1)** **plot(w,F1);** **subplot(2,1,2)** **plot(w,F2)**

3) Να βρεθεί ο μετασχηματισμός Fourier Φ(ω) της συνάρτησης παλμού

$$f(t)=\begin{cases} 1, & |t|\le 5 \\ 0, & \text{οπουδήποτε αλλού} \end{cases}$$

Να σχεδιασθούν οι συναρτήσεις f(t) και Φ(ω).

Κώδικας	**Γράφημα της f(t)**
>>t=-8:0.01:8; **>> f1=abs(t)<5;** **>> plot(t,f1)** **>> axis([-8 8 -2 2])** **>> xlabel('t')** **>> ylabel('f(t)')**	
Κώδικας	**Γράφημα της Φ(ω)**

>>w=-5:0.01:5; **>>F=2*sin(5*w)./w;** **>>plot(w,F)** **>>title('F=2*sin(5*w)./w;')**	
Να δικαιολογήσετε την μέγιστη τιμή της συνάρτησης Φ (ω)	

Γ) ΚΡΟΥΣΤΙΚΗ ΑΠΟΚΡΙΣΗ ΚΑΙ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΜΕΤΑΦΟΡΑΣ χρονοσυνεχών LTI-συστημάτων μέσω του μετασχηματισμού Fourier

Αν το σήμα εισόδου ενός συστήματος είναι η συνάρτηση δ(t) τότε το σήμα εξόδου είναι η συνάρτηση h(t) (κρουστική απόκριση). Η συνάρτηση μεταφοράς Η(ω) ορίζεται ως εξής: $H(\omega)=\dfrac{G(\omega)}{\Phi(\omega)}$ όπου Φ(ω) και G(ω) είναι οι μετασχηματισμοί Fourier των συναρτήσεων f(t) και g(t) αντίστοιχα.

ΣΧΕΣΗ ΤΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ h(t) και Η(ω): Η ***κρουστική απόκριση*** του συστήματος $h(t)=F^{-1}\left\{H(\omega)\right\}$ ή $F\{h(t)\}=H(\omega)$ και η ***συνάρτηση μεταφοράς*** αποτελούν ένα ζεύγος μετασχηματισμών Fourier. $h(t)\xleftrightarrow{Fourier}H(\omega)$

ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ	ΚΩΔΙΚΑΣ
(Άσκηση 3.β), σελίδα 269) Η συνάρτηση μεταφοράς ενός LTI συστήματος είναι $H(w)=\dfrac{1}{iw+3}$. Να προσδιορισθεί η κρουστική απόκριση του συστήματος.	**syms t w** **H=1/(iw+3)*;*** *% Δημιουργούμε την συνάρτηση Η* **h=ifourier(H,w,t)*;*** *% Βρίσκουμε την κρουστική απόκριση h(t)που είναι ο αντίστροφος (M.F) της H.* **pretty(h)**
Άσκηση 3, σελίδα 264 Ένα Γραμμικό χρονο-αμετάβλητο σύστημα-(LTI), χαρακτηρίζεται από τη διαφορική εξίσωση, $\dfrac{d^2y(t)}{dt^2}+4\dfrac{dy(t)}{dt}+3y(t)=\dfrac{dx(t)}{dt}+2x(t)$.	**syms t w** **H=(2+i*w)/(3+4*(i*w)+(i*w)^2)*;*** *% Δημιουργούμε την συνάρτηση μεταφοράς H(ω)* **pretty(H)** **h=ifourier(H,w,t)*;*** *% Βρίσκουμε τον αντίστροφο (M.F) της H που είναι η*

Να υπολογιστεί η συνάρτηση μεταφοράς $H(\omega)$ και η κρουστική απόκριση $h(t)$του συστήματος	*κρουστική απόκριση* **pretty(h)**

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Έστω $f(t)=\begin{Bmatrix} -te^{-t}, & t\geq 0 \\ 0, & t<0 \end{Bmatrix}$.Να υπολογιστεί: $\Phi(\varpi)$ **:=** $\mathbf{F}\{\mathrm{f}(\mathrm{t})\}$ και στην συνέχεια να δειχτεί: $\mathbf{F}^{-1}\{\mathbf{F}\{\mathrm{f}(\mathrm{t})\}\}=f(t)$. Να γίνουν τα γραφήματα των $f(t)$, $|\Phi(\varpi)|$.

2. Έστω $f(t)=-te^{-|t|}$. Να υπολογιστεί: $\Phi(\varpi)$ **:=** $\mathbf{F}\{\mathrm{f}(\mathrm{t})\}$ και στην συνέχεια να δειχτεί: $\mathbf{F}^{-1}\{\Phi(\varpi)\}=f(t)$.Να γίνουν τα γραφήματα των $f(t)$, $\arg(\Phi(\varpi))$.

3. (Παράδειγμα 14, σελίδα 254 για Α=3, Τ=2). Για το σήμα-συνάρτηση $f(t)=\begin{cases} 3, & |t|\leq 2 \\ 0, & |t|>2 \end{cases}$, (ορθογώνιος παλμός),
   α) Να υπολογιστεί το φάσμα πλάτους.
   β) Να γίνουν οι γραφικές παραστάσεις:i) Του φάσματος της συχνότητας της $f(t)$, δηλαδή της $\Phi(\varpi)=\mathbf{F}\{f(t)\}$, ii) Του φάσματος πλάτους της $f(t)$, δηλαδή της $|\Phi(\varpi)|$, iii) της $f(t)$.

4. Να υπολογιστεί ο (M.F) των συναρτήσεων: α) $f_1(t)=e^{-2(t-1)}u(t-1)$, β) $f_2(t)=e^{|t-1|}$.Να σχεδιαστούν τα γραφήματα των $f_1(t),\ f_2(t),\ \arg\Phi_1(\varpi):=\arg\mathbf{F}\{f_1(t)\},\ \arg\Phi_2(\varpi):=\arg\mathbf{F}\{f_2(t)\}$.

5. Η συνάρτηση μεταφοράς ενός LTI συστήματος είναι $H(\omega)=\dfrac{2}{1+\omega^2}$. Να προσδιορισθεί η κρουστική απόκριση $h(t)$του συστήματος και να διαπιστωθεί, ότι $\mathbf{F}\{h(t)\}=H(\omega)$.

6. Ένα σύστημα (LTI) περιγράφεται από την Διαφορική εξίσωση: $y'(t)+3y(t)=2x(t)$. Να βρεθεί η συνάρτηση μεταφοράς Η(ω) καθώς και κρουστική απόκριση h(t) και στην συνέχεια να επαληθευτεί, ότι $\mathbf{F}\{h(t)\}=H(\omega)$

7. Ένα σύστημα (LTI) περιγράφεται από την Διαφορική εξίσωση: $y''(t)+2y'(t)+3y(t)=2x'(t)+x(t)$. Να βρεθεί η συνάρτηση μεταφοράς Η(ω) καθώς και κρουστική απόκριση h(t) και στην συνέχεια να επαληθευτεί, ότι $\mathbf{F}\{h(t)\}=H(\omega)$

8. Δίδεται η συνάρτηση $f(t)=\begin{cases} 0, -\pi < t < \dfrac{-\pi}{2} \\ 1, \dfrac{-\pi}{2} < t < \dfrac{\pi}{2} \\ 0, \dfrac{\pi}{2} < t < \pi \end{cases}$

   Να γίνει η γραφική παράσταση της συνάρτησης. Να ελεγχτεί αν η συνάρτηση είναι άρτια ή περιττή. Να βρεθεί η σειρά Fourier της συνάρτησης. Συγκεκριμένα να υπολογιστούν οι συντελεστές Fourier της Σειράς και στη συνέχεια να γραφούν οι πρώτοι 7 όροι της. Με βοήθεια του MATLAB να καταγράψετε την προσέγγιση της συνάρτησης μέσω της ανάλυσης της σε σειρά Fourier. Τέλος να γίνει το διακριτό φάσμα πλάτους - συχνότητας της συνάρτησης f(t) για τους 7 πρώτους όρους της. Να καταγράψετε αναλυτικά τις αρμονικές συχνότητες που το απαρτίζουν.

9. Δίδεται η συνάρτηση $f(t)=\begin{cases} -4, \ -\pi < t \le 0 \\ 4, \ 0 < t < \pi \end{cases}$

   Να γίνει η γραφική παράσταση της συνάρτησης. Να βρεθεί η σειρά Fourier της συνάρτησης. Συγκεκριμένα να υπολογιστούν οι συντελεστές Fourier της Σειράς και στη συνέχεια να γραφούν οι πρώτοι 4 όροι της. Τέλος να γίνει το διακριτό φάσμα πλάτους - συχνότητας της συνάρτησης f(t) για τους 4 πρώτους όρους της.

10. Δίδεται η συνάρτηση $f(t)=\begin{cases} -t, \ -\pi < t \le 0 \\ 0, \ 0 < t < \pi \end{cases}$ για t που ανήκει στο διάστημα [-π, π]. Να βρεθεί η σειρά Fourier της συνάρτησης. Συγκεκριμένα να υπολογιστούν οι συντελεστές Fourier της Σειράς και στη συνέχεια να γραφούν οι πρώτοι 10 όροι της. Τέλος να γίνει το διακριτό φάσμα πλάτους - συχνότητας της συνάρτησης f(t) για τους 10 πρώτους όρους της. Να καταγράψετε αναλυτικά την θεμελιώδη και τις υπόλοιπες αρμονικές συχνότητες στο γράφημα.

ΜΑΘΗΜΑ 9$^{\text{ο}}$

Α) ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ ΖΗΤΑ (ΜΖ)

Ευθύς Μετασχηματισμός Ζ στα χρονοδιακριτά (Ψηφιακά) Συστήματα:

Ο μετασχηματισμός Ζ όπως γνωρίζουμε από τη θεωρία, αντιστοιχίζει μια ακολουθία χρόνου n (ψηφιακό σήμα) $\{x_n\}_{-\infty}^{+\infty}$, σε μια συνάρτηση-σήμα $X(z)$ μιγαδικής μεταβλητής (συχνότητας) z , μέσω της πράξης: $\zeta\left(\{x_n\}_{-\infty}^{+\infty}\right)=\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} x_n z^{-n}=X(z)$,

(υπό τον γενικό περιορισμό, η δυναμοσειρά $X(z)$ να συγκλίνει σε μία ανοιχτή περιοχή του □).

Αντίστροφος Μετασχηματισμός Ζ στα χρονοδιακριτά (Ψηφιακά) Συστήματα:

Επίσης, όπως οι γνωστοί Γραμμικοί Μετασχηματισμοί Laplace-ML, Fourier-MF, έτσι και ο μετασχηματισμός Ζ ***αντιστρέφεται*** μέσω μιας συγκεκριμένης διαδικασίας. Δηλαδή και στον ΜΖ υπάρχει μια αντίστροφη διαδικασία ζ^{-1}, που αντιστοιχίζει συναρτήσεις $X(z)$ σε ακολουθίες $\{x_n\}$ έτσι ώστε να ισχύει:

$$\zeta(\{x_n\})=X(z)\Leftrightarrow\zeta^{-1}(X(z))=\{x_n\} \quad \text{και}$$
$$\zeta^{-1}\left(\zeta(\{x_n\})\right)=\{x_n\},\quad \zeta\left(\zeta^{-1}(X(z))\right)=X(z) \ .$$

Κατά τα γνωστά λοιπόν, όπως τα προβλήματα των χρονοσυνεχών-αναλογικών LTI σημάτων-συστημάτων αντιμετωπίζονται όπως ξέρουμε μέσω των ML και MF, όμοια και τα αντίστοιχα προβλήματα των χρονοδιακριτών-ψηφιακών LTI Σημάτων-Συστημάτων επιλύονται μέσω του ΜΖ.

Και όπως τα χρονοσυνεχή LTI Σήματα-Συστήματα μοντελοποιούνται και περιγράφονται μαθηματικά μέσω των Γραμμικών Διαφορικών Εξισώσεων με σταθερούς συντελεστές,

όμοια και τα χρονοδιακριτά LTI Σήματα-Συστήματα μοντελοποιούνται και περιγράφονται μαθηματικά μέσω των Γραμμικών Εξισώσεων Διαφορών με σταθερούς συντελεστές.

Έτσι ταυτόχρονα οι αντίστοιχοι Μετασχηματισμοί κατορθώνουν την αμφίδρομη πορεία μεταξύ του πεδίου του χρόνου (t) και του πεδίου συχνοτήτων (s, ω, ή z).

Ας δούμε λοιπόν με ποιόν ακριβώς τρόπο, το Matlab υπολογίζει τον ευθύ και τον αντίστροφο ΜΖ διαφόρων χρονοδιακριτών-ψηφιακών Σημάτων-Συστημάτων.

Ακολουθία	**Κώδικας**
1. Να προσδιορισθεί ο μετασχηματισμός Ζ (ή το φάσμα συχνοτήτων) της ακολουθίας (ή ψηφιακού σήματος) που περιγράφεται μαθηματικά: $\{x_n\}=\left\{\dfrac{2^n-(-5)^n}{7}\right\}$, $(n\geq 0)$	**syms n z** **f=2^n/7-(-5)^n/7;** % Δημιουργούμε την ακολουθία $\{x_n\}$ **G=ztrans(f,n,z);** % Βρίσκουμε τον (M.Z) της ακολουθίας $\{x_n\}$ **pretty(G)**
2. Να προσδιορισθεί ο αντίστροφος μετασχηματισμός Ζ της συνάρτησης-σήματος $h(z)=\dfrac{z}{(z-2)(z+5)}$.	**syms n z** **f=z/(z-2)/(z+5)***;* *% Δημιουργούμε την συνάρτηση* $h(z)$ **H=iztrans(f,z,n);** *% Βρίσκουμε τον αντίστροφο (M.Z) της* $h(z)$

3. Να επαληθευτεί η ταυτότητα $\zeta^{-1}\left(\zeta\left(\{x_x\}\right)\right)=\{x_k\}$ για την ακολουθία-σήμα $\{x_k\}=\{2^k-3k\}$, $(k\geq 0)$.	**syms k z** **f=2^k-3*k;** % Δημιουργούμε την ακολουθία $\{x_k\}$ **G=ztrans(f,k,z);** % Βρίσκουμε τον (Μ.Ζ) της ακολουθίας $\{x_k\}$ τον οποίο ονομάζουμε G **pretty(G);** **h=iztrans(G,z,k);** % Βρίσκουμε τον αντίστροφο (Μ.Ζ)της G,ο οποίος ταυτίζεται με την ακολουθία $\{x_k\}$. **pretty(h)**

Β) <u>Λύση Γραμ. Εξισώσεων Διαφορών μέσω του ΜΖ, ή ανάλυση χρονο-διακριτών συστημάτων μέσω του ΜΖ</u>

Ως γνωστόν τα προβλήματα επεξεργασίας ψηφιακών Σημάτων-Συστημάτων (LTI) περιγράφονται από διαφοροεξισώσεις , οι λύσεις των οποίων είναι ακολουθίες.

Η καλύτερη μέθοδος επίλυσης Διαφοροεξισώσεων (ή Εξισώσεων Διαφορών) στην Τεχνολογία στηρίζεται στον μετασχηματισμό Ζ.

Η μέθοδος αυτή υλοποιείται γενικώς ως εξής:

Εφαρμόζοντας τον (ΜΖ) στα μέλη της διαφοροεξίσωσης καταλήγουμε σε μία αλγεβρική εξίσωση ως προς τον (ΜΖ) της ζητούμενης ακολουθίας-(ο εν λόγω (ΜΖ) είναι μία συνάρτηση μιας μιγαδικής μεταβλητής s (ή z)) . Λύνοντας αυτήν την αλγεβρική εξίσωση ως προς τον (ΜΖ) τον υπολογίζουμε σαν μία συγκεκριμένη συνάρτηση της μεταβλητής s.

Η λύση της διαφοροεξίσωσης προκύπτει μέσω του αντίστροφου (Μ.Ζ) αυτής της συγκεκριμένης συνάρτησης .

Εξίσωση διαφορών	**Κώδικας επίλυσής της**
1. Να λυθεί η διαφοροεξίσωση $y_{n+2}-2y_{n+1}+y_n=2^n$ όταν $y(0)=1, y(1)=3$.	**syms n s Y** **de='y(n+2)-2*y(n+1)+y(n)=2.^n'**; *% Δημιουργούμε την διαφοροεξίσωση* **zde=ztrans(de,n,s)**; *% Δημιουργούμε τον (Μ.Ζ) της διαφοροεξίσωσης* **eqn=subs(zde,{sym('ztrans(y(n),n,s)'),sym('y(0)'),sym('y(1)')},{Y,1,3});** *%Δημιουργούμε τον (Μ.Ζ) της διαφοροεξίσωσης χρησιμοποιώντας τις ορικές συνθήκες και αντικαθιστούμε το 'ztrans(y(n),n,s)'με Y, όπου 'ztrans(y(n),n,s)' είναι ο (Μ.Ζ) της ακολουθίας $\{y(n)\}$, $n\geq 0$.)* **Y=solve(eqn,Y)**; *% Λύνουμε την προηγούμενη αλγεβρική εξίσωση ως προς Y* **pretty(Y);** **iztrans(Y,s,n)** *% Δημιουργούμε τον αντίστροφο (Μ.Ζ) της Y (είναι ακολουθία) που αποτελεί την λύση της δοθείσας διαφοροεξίσωσης.*

2. Να λυθεί το Σύστημα των Εξισώσεων Διαφορών $\begin{cases} y_{n+1} - 2x_n = 2 \\ x_{n+1} - 3y_n + x_n = 1 \end{cases}$ όταν $x_0 = y_0 = 0$.	**syms n s Y X** **de1='y(n+1)-2*x(n)=2';** **de2='x(n+1)-3*y(n)+x(n)=1';** **zde1=ztrans(de1,n,s);** **zde2=ztrans(de2,n,s);** **eqn1=subs(zde1,{sym('ztrans(x(n),n,s)'),sym('ztrans(y(n),n,s)'),sym('x(0)'),sym('y(0)')},{X,Y,0,0});** **eqn2=subs(zde2,{sym('ztrans(x(n),n,s)'),sym('ztrans(y(n),n,s)'),sym('x(0)'),sym('y(0)')},{X,Y,0,0});** **A=solve(eqn1,eqn2,X,Y);** **X=A.X;** **Y=A.Y;** **x=iztrans(X,s,n);** **y=iztrans(Y,s,n);** **x=simplify(x)** **y=simplify(y)**

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. (Άσκηση 12, σελ. 319). Αν $X(z) = \dfrac{z}{3z^2 - 4z + 1}$, $Y(z) = \dfrac{2z^2}{(z+1)(z+2)^2}$, να υπολογιστούν οι αντίστοιχες αιτιατές ακολουθίες $x(n)$, $y(n)$.
2. (Άσκηση 10, σελ. 317). Να υπολογιστεί: $\zeta^{-1}\left(\dfrac{z}{z^2 - z + 1}\right)$ και στην συνέχεια να επαληθευτεί $\zeta(\zeta^{-1}\left(\dfrac{z}{z^2 - z + 1}\right)) = \dfrac{z}{z^2 - z + 1}$.
3. (Άσκηση 2, σελ. 291). Να προσδιοριστεί ο (Μ.Ζ) $f(z)$ της ακολουθίας $\{x_k\} = \left\{\left(\dfrac{-1}{7}\right)^k\right\}$, $(k \geq 0)$ και στην συνέχεια να δειχτεί, ότι $\zeta^{-1}\left(f(z)\right) = \{x_k\}$.
4. Να λυθούν με χρήση του Matlab οι ασκήσεις του βιβλίου Θεωρίας (σελ. 292): 4, 5, 6.
5. Να λυθούν με χρήση του Matlab οι ασκήσεις του βιβλίου Θεωρίας (σελ. 299): από 2, μέχρι 6.
6. Να λυθούν με χρήση του Matlab οι ασκήσεις του βιβλίου Θεωρίας (σελ. 307): από 1, μέχρι 5.
7. Να λυθούν με χρήση του Matlab οι ασκήσεις του βιβλίου Θεωρίας (σελ. 309):από 1, μέχρι 6.
8. Να λυθούν με χρήση του Matlab οι ασκήσεις του βιβλίου Θεωρίας (σελ. 309):από 7, μέχρι 12.
9. (Άσκηση 2.β, σελ. 334). Να λυθεί η διαφοροεξίσωση $y(k+2) - 5y(k+1) + 6y(k) = 5$, όταν $y(0) = y(1) = 1$
10. (Άσκηση 2 δ, σελ. 334). Να λυθεί η διαφοροεξίσωση $y(k+3) + 4y(k+2) - y(k+1) - y(k) = 1$, όταν $y(0) = y(1) = y(2) = 0$.

Γ) Εφαρμογές σε LTI-Ψηφιακά Συστήματα

Ένα σύστημα διακριτού χρόνου επεξεργάζεται ένα σήμα εισόδου στο πεδίο του χρόνου για να δημιουργήσει ένα σήμα εξόδου με τις επιθυμητές ιδιότητες, εφαρμόζοντας έναν αλγόριθμο που αποτελείται από απλές πράξεις μεταξύ χρονικών καθυστερήσεων του σήματος εισόδου. Ο σκοπός της άσκησης είναι να δούμε την προσομοίωση από κάποια απλά συστήματα διακριτού χρόνου και να ερευνήσουμε τις ιδιότητες τους στο πεδίο του χρόνου.

Θα ασχοληθούμε με LTI (Linear Time Invariant-Γραμμικά Χρονο Αμετάβλητα) Συστήματα στα οποία η έξοδος συνδέεται με την είσοδο με την ακόλουθη σχέση:

$$\boxed{\sum_{\kappa=0}^{M} d_k \cdot y(n-k) = \sum_{\kappa=0}^{N} p_k \cdot x(n-k)}\,.$$

Παράδειγμα 1

Έστω ένα γραμμικό και χρονικά αμετάβλητο (LTI) σύστημα που περιγράφεται από την ακόλουθη εξίσωση διαφόρων:

$$y(n) + 0{,}45 \cdot y(n-2) = 0{,}2 \cdot x(n) + 0{,}3 \cdot x(n-2) + 0{,}4 \cdot x(n-1)$$

Αν το σύστημα διεγερθεί από το σήμα x(n) που αποτελεί το άθροισμα των σημάτων $x_1(n) = \cos(2 \cdot \pi \cdot 0{,}05 \cdot n)\, \kappa\alpha\iota\, x_2(n) = \cos(2 \cdot \pi \cdot 0{,}47 \cdot n)$ με $0 \leq n \leq 100$, να βρεθεί και να παρουσιαστεί γραφικά η έξοδος y(n) με τη βοήθεια του MATLAB και με χρήση της συνάρτησης 'filter'.

Λύση

Υλοποιούμε στον editor του MATLAB το ακόλουθο πρόγραμμα :

%Δημιουργία του Σήματος εισόδου στο χρονικό παράθυρο που θα μελετήσουμε

```
n=0:100;                    %Μεταβάλλουμε το χρόνο από 0 έως 100 με βήμα 1
x1=cos(2*pi*0.05*n);        %Ημιτονικό σήμα χαμηλής συχνότητας
x2=cos(2*pi*0.47*n);        %Ημιτονικό σήμα υψηλής συχνότητας
x=x1+x2;                    %Δημιουργούμε την είσοδο του συστήματος
```

%Υλοποίηση του Φίλτρου (δηλαδή της εξόδου του συστήματος)

```
B=[0.2 0.4 0.3]             %Διάνυσμα συντελεστών του x
A=[1 0 0.45]                %Διάνυσμα συντελεστών του y
y=filter(B,A,x)             %Εύρεση της εξόδου y(n)
```

%Παρουσίαση των σημάτων εισόδου x1(n) και x2(n)

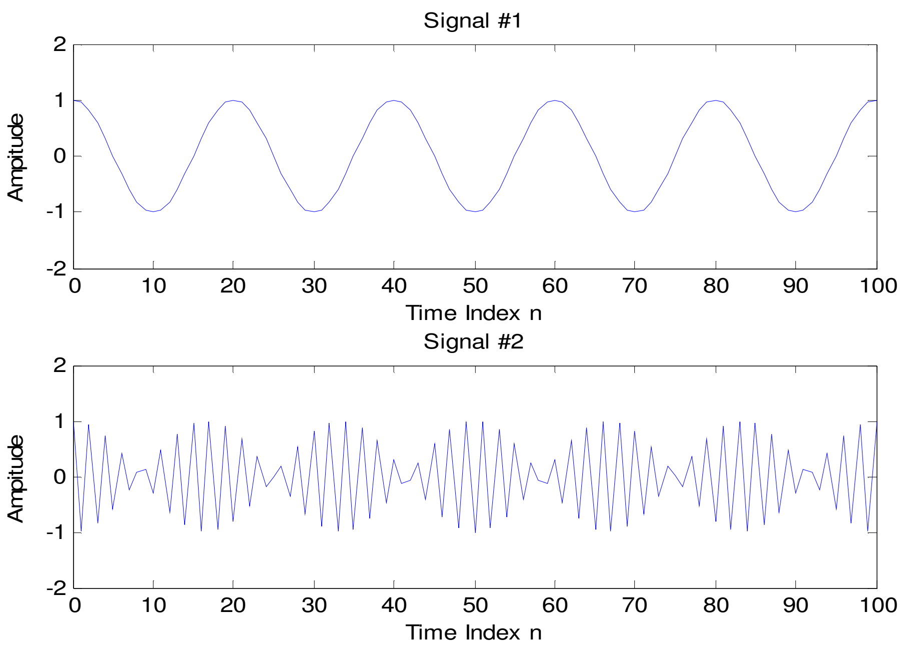
```
figure(1)             %Ανοίγουμε ένα παράθυρο εικόνας

subplot(2,1,1);       %Χωρίζουμε το figure(1) σε 2 μέρη , γράφουμε στο πρώτο
plot(n,x1);           %Σχεδιάζουμε το x1(n) συναρτήσει του n
```

```
axis([0,100,-2,2])          %Ορίζουμε τα όρια των αξόνων
xlabel('Time Index n');%Επιγραφή του άξονα x της 1ης γραφικής παράστασης
ylabel('Amplitude');        %Επιγραφή του άξονα y της 1ης γραφικής παράστασης
title('Signal #1')          %Βάζουμε τίτλο στην 1η γρ. παράσταση
subplot(2,1,2);             %Χωρίζουμε το figure σε 2 μέρη και γραφούμε στο 2ο
plot(n,x2);                 %Σχεδιάζουμε το x2(n) συναρτήσει του n
axis([0 ,100,-2,2]);        %Ορίζουμε τα όρια των αξόνων
xlabel('Time Index n');%Επιγραφή του άξονα x της 2ης  γραφικής παράστασης
ylabel('Amplitude');        %Επιγραφή του άξονα y της 2ης  γραφικής παράστασης
title('Signal #2')          %Βάζουμε τίτλο στη 2η γρ .παράσταση
```

%Παρουσίαση των σημάτων εισόδου και εξόδου x(n) και y(n)

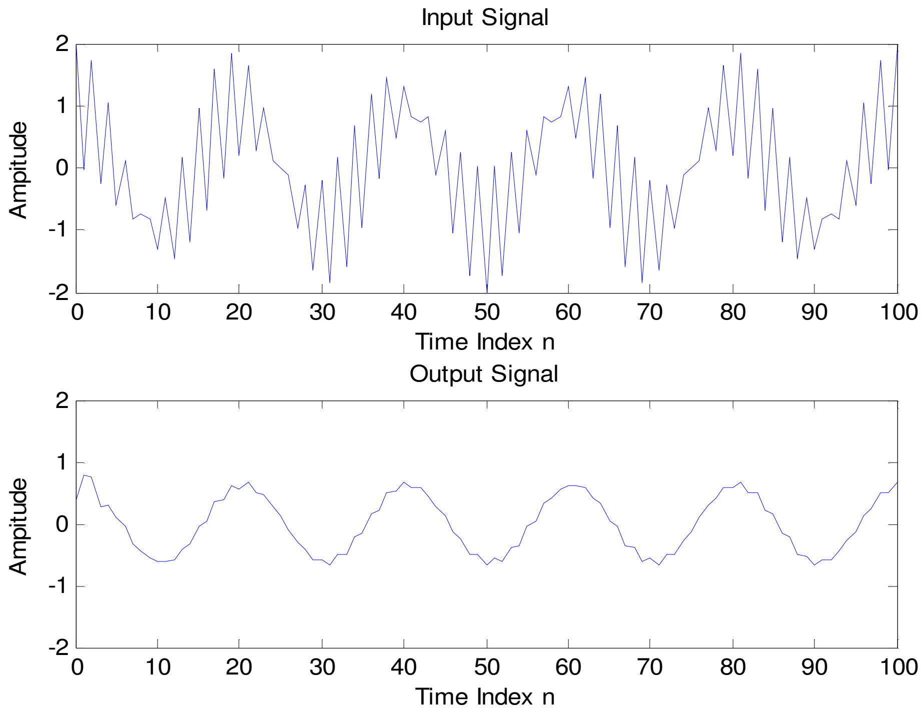
```
figure(2)                   %Ανοίγουμε 2ο παράθυρο εικόνας
subplot(2,1,1);             %Χωρίζουμε το figure(1) σε 2 μέρη , γράφουμε στο πρώτο
plot(n,x);                  %Σχεδιάζουμε το x(n) = x1(n) + x2(n) συναρτήσει του n
axis([0,100,-2,2])          %Ορίζουμε τα όρια των αξόνων
xlabel('Time Index n');%Επιγραφή του άξονα x της 1ης γραφικής παράστασης
ylabel('Amplitude');        %Επιγραφή του άξονα y της 1ης γραφικής παράστασης
title('Input Signal')       %Βάζουμε τίτλο στην 1η γρ. παράσταση
subplot(2,1,2);             %Χωρίζουμε το figure σε 2 μέρη και γραφούμε στο 2ο
plot(n,y);                  %Σχεδιάζουμε το y(n) συναρτήσει του n
axis([0 ,100,-2,2]);        %Ορίζουμε τα όρια των αξόνων
xlabel('Time Index n');%Επιγραφή του άξονα x της 2ης γραφικής παράστασης
ylabel('Amplitude');        %Επιγραφή του άξονα y της 2ης γραφικής παράστασης
title('Output Signal')      %Βάζουμε τίτλο στην 2η  γρ. παράσταση
```

Παρατηρήσεις: Οι γραφικές παραστάσεις των σημάτων εισόδου που προκύπτουν κατά την εκτέλεση του προγράμματος φαίνονται στο σχήμα 1.Είναι εύκολο να διακρίνουμε το σήμα υψηλής συχνότητας από το σήμα χαμηλής συχνότητας.



Σχήμα 1: Τα σήματα εισόδου $x_1(n)=\cos(2\cdot\pi\cdot 0{,}05\cdot n)$ και $x_2(n)=\cos(2\cdot\pi\cdot 0{,}47\cdot n)$

Το σήμα που προκύπτει από την υπέρθεση των δύο αρχικών σημάτων και το οποίο εφαρμόζεται στην είσοδο του φίλτρου που υλοποιήσαμε καθώς και η έξοδος του φίλτρου φαίνονται στο σχήμα 2.



Σχήμα 2: Τα σήματα εισόδου $x(n)=x_1(n)+ x_2(n)$ *και εξόδου* $y(n)$

Ερωτήσεις

1. Τρέξτε το πρόγραμμα για να δημιουργήσετε το σήμα εξόδου για είσοδο $x(n)=x_1(n)+ x_2(n)$. Προσπαθήστε να καταλήξετε στις ανωτέρω γραφικές παραστάσεις.
2. Ποια κατά τη γνώμη σας είναι η λειτουργία του συγκεκριμένου φίλτρου; Δώστε κάποια παραδείγματα σημάτων υψηλών συχνοτήτων που προέρχονται από συσκευές καθημερινής χρήσης.

Παράδειγμα 2

Θεωρούμε ένα σύστημα διακριτού χρόνου που περιγράφεται από την ακόλουθη εξίσωση διαφορών :

$$y(n) - 0.4 \cdot y(n-1) + 0{,}75 \cdot y(n-2) = 2.2403 \cdot u(n) + 2.4908 \cdot u(n-1) + 2.2403 \cdot u(n-2)$$

όπου y(n) η έξοδος του συστήματος και u(n) η είσοδος

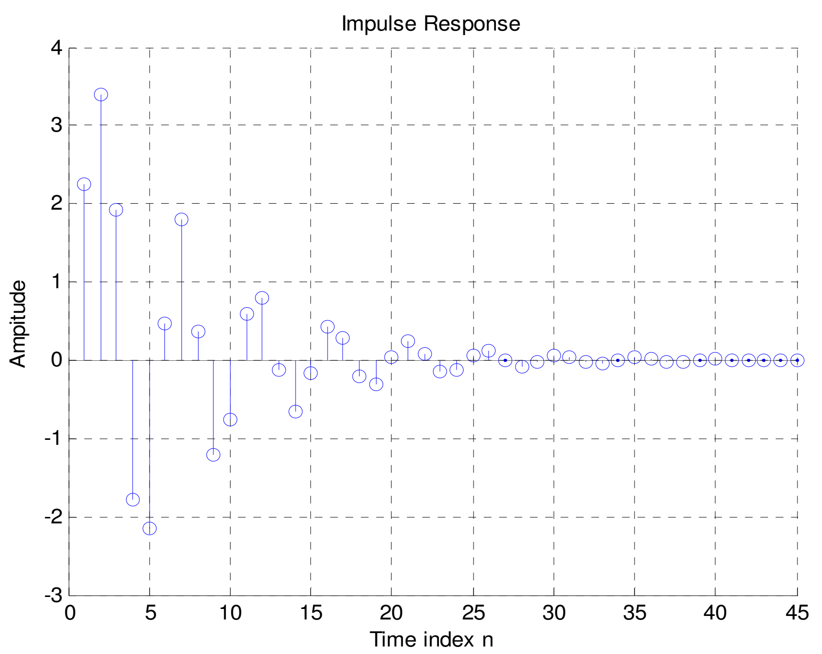
Χρησιμοποιώντας την εντολή y = impz (num,den,N) και stem(y) του MATLAB να υπολογίσετε και να σχεδιάσετε την κρουστική απόκριση του συστήματος.

Σημείωση : Στις ανωτέρω εντολές το num είναι οι συντελεστές του σήματος εισόδου σε μορφή πίνακα και den είναι οι συντελεστές του σήματος εξόδου επίσης σε μορφή πίνακα, κατά αύξοντα βαθμό καθυστέρησης. Το N είναι ο αριθμός των δειγμάτων που θα πάρει το πρόγραμμα βάσει του οποίου θα σχεδιάσει την κρουστική απόκριση.

Λύση

Υλοποιούμε στον editor του MATLAB το ακόλουθο πρόγραμμα :

```
N=45                          %Αριθμός δειγμάτων της κρουστικής απόκρισης
num=[2.2403 2.4908 2.2403];   %Συντελεστές σήματος εισόδου
den=[1 -0.4 0.75];            %Συντελεστές σήματος εξόδου
y=impz(num,den,N);            %Δημιουργούμε την κρουστική απόκριση
figure(1)                     %Δίνουμε εντολή να ανοίξει ένα figure
stem(y);                      %Σχεδιάζουμε την κρουστική απόκριση
xlabel('Time index n');       %Βάζουμε επιγραφή στον οριζόντιο άξονα
ylabel('Ampitude');           %Βάζουμε επιγραφή στον κατακόρυφο άξονα
title('Impulse Response');    %Βάζουμε τίτλο στην γραφική παράσταση
grid;                         %Βάζουμε <<πλέγμα>> στη γραφική παράσταση
```



Σχήμα 1: Η ζητούμενη κρουστική απόκριση του συστήματος

Ερωτήσεις -Ασκήσεις

1. Χρησιμοποιήστε διαφορετικούς συντελεστές στα σήματα εισόδου και εξόδου με χρήση της εντολής input. Μεταβάλλεται η κρουστική απόκριση ή όχι; Ποια μορφή νομίζεται ότι είναι πιο επιθυμητή;
2. Θεωρήστε ένα σύστημα διακριτού χρόνου που περιγράφεται από την ακόλουθη εξίσωση διαφόρων:

   $$y(n)-2\cdot y(n-1)+1.31\cdot y(n-2)-0.28\cdot y(n-3)=y(n)$$
3. Σχεδιάστε την κρουστική απόκριση του παραπάνω συστήματος, τροποποιώντας κατάλληλα το αρχικό πρόγραμμα.

<u>ΜΑΘΗΜΑ 10^ο^</u>

Ανάλυση χρονοδιακριτών (ψηφιακών) και χρονοσυνεχών (αναλογικών) LTI Σημάτων-Συστημάτων: a) στο πεδίο του χρόνου, και b) στο πεδίο της συχνότητας.

Ένα σύστημα διακριτού χρόνου επεξεργάζεται ένα σήμα εισόδου στο πεδίο του χρόνου για να δημιουργήσει ένα σήμα εξίσου με πιο επιθυμητές ιδιότητες.

Ένα αποτελεσματικό μαθηματικό μοντέλο (από άποψη υπολογισμών) για να εκφράσουμε την απόκριση ενός LTI συστήματος συναρτήσει των παραλθοντικών τιμών της εξόδου μαζί με τις τρέχουσες και τις παρελθούσες τιμές της διέγερσης , είναι όπως έχουμε δει αυτό των γραμμικών εξισώσεων Διαφορών με Σταθερούς συντελεστές.

Η συμπεριφορά ενός LTI συστήματος μπορεί δηλαδή να περιγραφή από μια εξίσωση διαφορών της μορφής:

$$\sum_{\kappa=0}^{N} \alpha_k \cdot y(n-k) = \sum_{r=0}^{M} b_r \cdot x(n-r)$$

Επειδή συνήθως γίνεται κανονικοποίηση ως προς τον συντελεστή α_o οι μορφές που θα συναντάμε έχουν ως εξής :

$$y(n) + \sum_{p=1}^{N} \alpha_p \cdot y(n-p) = \sum_{l=0}^{M} b_l \cdot x(n-l)$$

Έχουμε δει την κρουστική απόκριση ενός LTI συστήματος η οποία περιγράφει πλήρως το σύστημα. Μια αντίστοιχη περιγραφή στο πεδίο της συχνότητας όμως μας την παρέχει η απόκριση συχνότητας η οποία είναι ο διακριτός μετασχηματισμός Fourier (DTFT) της κρουστικής απόκρισης.

Έτσι αν $X(e^{j\omega})$ και $Y(e^{i\omega})$ είναι οι μετασχηματισμοί Fourier διέγερσης και απόκρισης αντίστοιχα , αποδεικνύεται ότι η απόκριση συχνότητας είναι:

$$H(e^{j\omega}) = \frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})} = \frac{\sum_{l=0}^{M} b_l \cdot e^{-j\omega l}}{1 + \sum_{p=1}^{N} a_p \cdot e^{-j\omega p}}$$

Η απόκριση συχνότητας είναι μια μιγαδική συνάρτηση της συχνότητας ω και είναι περιοδική με περίοδο 2π. Η γραφική παράσταση της απόκρισης συχνότητας έχει μεγάλη σημασία για την ανάλυση των LTI συστημάτων. Μπορεί να εκφραστεί δε συναρτήσει του πραγματικού και του φανταστικού μέρους αφού είναι εν γένει ένας μιγαδικός αριθμός:

$$H(e^{j\omega}) = H_R(e^{j\omega}) + j \cdot H_I(e^{j\omega}) \; ,$$

ή συναρτήσει του πλάτους και της φάσης:

$$H(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})| \cdot e^{j\varphi_n(\omega)} \; ,$$

όπου

$$\left|H\left(e^{j\omega}\right)\right|^2=H\left(e^{j\omega}\right)\cdot\dot{H}\left(e^{j\omega}\right)=H_R^2\left(e^{j\omega}\right)+H_I^2\left(e^{j\omega}\right)$$

και

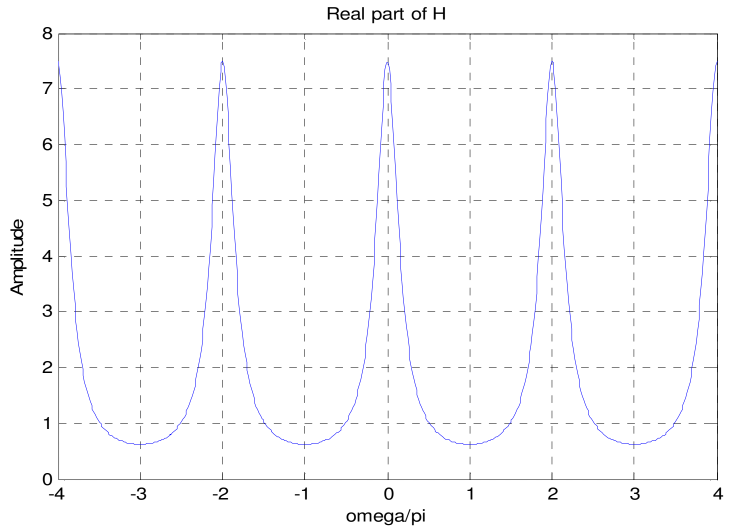
$$\varphi_n(\omega)=arg\{H(e^{j\omega})\}=\tan^{-1}\frac{H_I(e^{j\omega})}{H_R(e^{j\omega})}\quad .$$

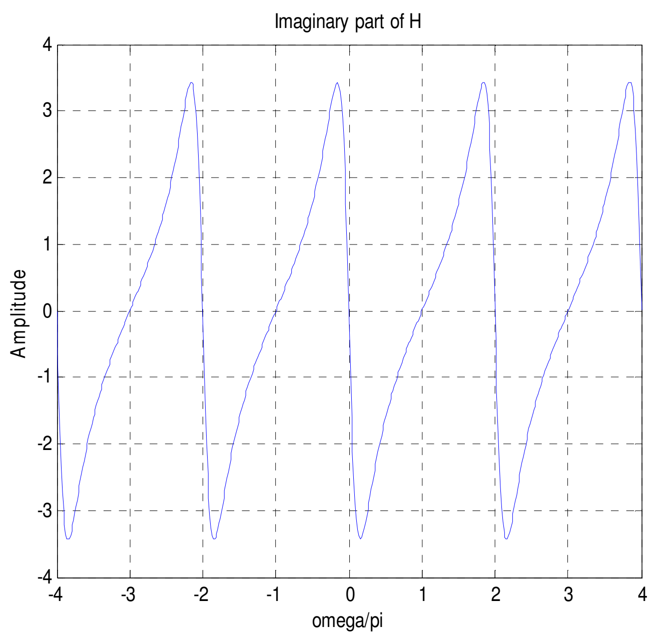
Στον προγραμματισμό με MATLAB θα χρησιμοποιήσουμε την εντολή freqz(b,a,w) όπου ο πίνακας b θα περιέχει τους συντελεστές b_l , ο a τους a_p και ο w θα μας προσδιορίζει την περιοχή συχνοτήτων που επιθυμούμε.

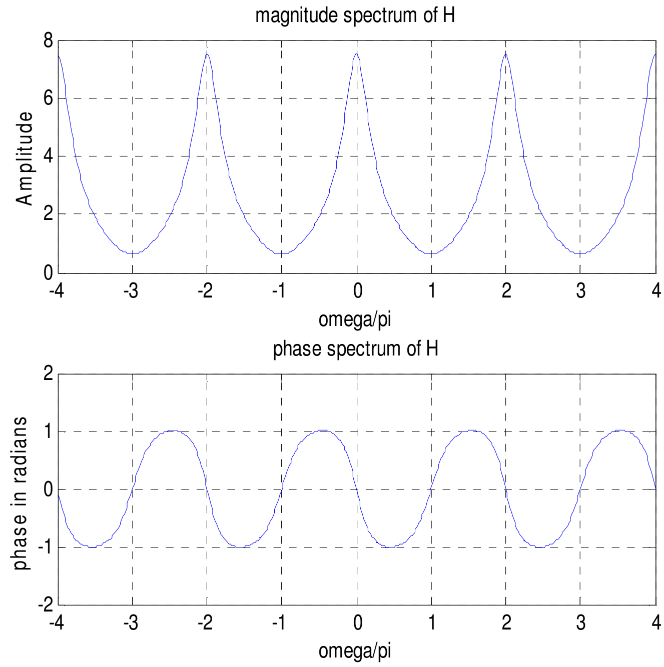
<u>Παράδειγμα 1</u>

Να γραφεί στον editor του MATLAB το παρακάτω πρόγραμμα

ΚΩΔΙΚΑΣ	ΓΡΑΦΗΜΑ
Σχήμα 1: Το πραγματικό και φανταστικό μέρος της απόκρισης συχνότητας H	

**clf;
w=-4*pi:8*pi/511:4*pi;
num=[2,1];
den=[1,-0.6];
h = freqz (num,den,w);
plot(w/pi,real(h));
grid on;
title('Real part of H');
xlabel('omega/pi');
ylabel('Amplitude')
pause**
	

**w=-4*pi:8*pi/511:4*pi;
num=[2,1];
den=[1,-0.6];
h = freqz (num,den,w);
plot (w/pi,imag(h));
grid on;
title('Imaginary part of H');
xlabel('omega/pi');
ylabel('Amplitude')
pause**
	

<table>
<tr><th colspan="2">Σχήμα 2: Το πλάτος και η φάση της απόκρισης συχνότητας H</th></tr>
<tr><td>subplot(2,1,1)
plot(w/pi , abs(h));
grid;
title('magnitude spectrum of H');
xlabel('omega/pi');
ylabel ('Amplitude');
subplot (2,1,2)
plot(w/pi , angle(h));
grid;
title('phase spectrum of H');
xlabel('omega/pi');
ylabel('phase in radians');</td><td>
</td></tr>
</table>

Ερωτήσεις

1. Από ποια εξίσωση διαφορών περιγράφεται το σύστημα του οποίου την απόκριση συχνότητας βλέπετε;
2. Δώστε σε κλειστή μορφή την $H(e^{j\omega})$
3. Τροποποιήστε το πρόγραμμα ώστε να υπολογίσετε την απόκριση συχνότητας για το ακόλουθο σύστημα που περιγράφεται από την ακόλουθη εξίσωση διαφορών, στα όρια του $0 \le \omega \le 3\pi$:

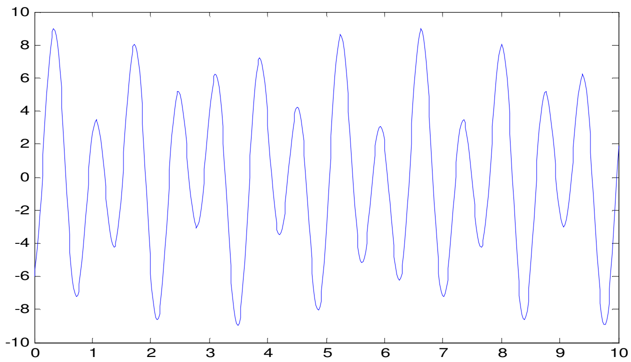
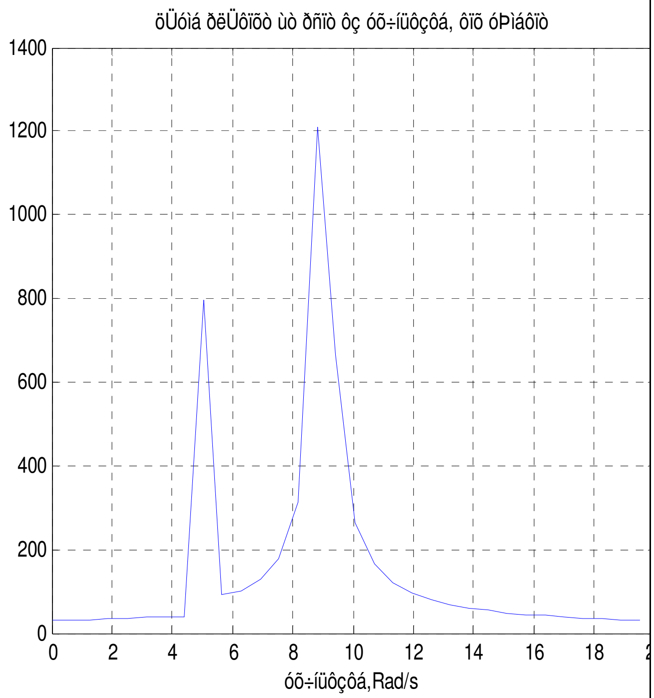
   $$y(n)-2\cdot y(n-1)+1.31\cdot y(n-2)-0.28\cdot y(n-3)=x(n)-5\cdot x(n-1)+10\cdot x(n-2)$$

   Δώστε τις τέσσερις γραφικές παραστάσεις που προαναφέραμε για το σύστημα που περιγράφεται από την ακόλουθη απόκριση συχνότητας:

   $$H(e^{j\omega})=\frac{0{,}634-0{,}634\cdot e^{-j\omega}}{1-0{,}268\cdot e^{-j\omega}}$$

<u>Παράδειγμα 2</u>

Στην Ανάλυση σημάτων (Signals Analysis), το Matlab μπορεί να μελετά και να αναλύει ένα σήμα ως προς τη συχνότητά του (ή φάσμα-spectra), ή να κατασκευάζει και να σχεδιάζει φίλτρα. Ας δούμε ένα συγκεκριμένο παράδειγμα:

ΚΩΔΙΚΑΣ	ΓΡΑΦΗΜΑ
syms t s **t=linspace(0,10,500); % t=άξονας χρόνου** **x=3*sin(5*t)-6*cos(9*t);** *% το σήμα* **plot(t,x)** *% δώσε το γράφημα του σήματος x ως προς τον χρόνο t*	
X=fft(x); *% υπολόγισε την περιγραφή του σήματος x στο πεδίο συχνοτήτων* **Ts=t(2)-t(1)** *% Ts= περίοδος δειγματοληψίας του x* ***Ts =*** ***0.0200*** **Ws=2*pi/Ts*;*** *% δειγματοληψία συχνότητας του x* **Wn=Ws/2** *% συχνότητα Nyquist* Wn = 156.7655 **w=linspace(0,Wn,length(t)/2);** *%άξονες του πεδίου συχνοτήτων στο γράφημα* **Xp=abs(X(1:length(t)/2));** *%μέτρο των θετικών συνιστωσών συχνοτήτων* **plot(w,Xp)** *%δώσε το γράφημα του φάσματος πλάτους-μέτρου ως προς τη συχνότητα* **i=find(w<=20);** *% διάλεξε τις επιθυμητές συχνότητες* **plot(w(i),Xp(i))** *%δώσε το γράφημα μόνον της επιλογείσας περιοχής* **grid** **xlabel('συχνότητα,Rad/s')** **title('φάσμα πλάτους ως προς τη συχνότητα, του σήματος')**	

<u>Παρατήρηση:</u> Στο παραπάνω (τελευταίο) γράφημα-φάσμα του σήματος x, παρατηρήστε ότι οι συχνότητες παρουσιάζουν εμφανή κορύφωση στα 5 και 9 Rad/sec του πεδίου συχνοτήτων , πράγμα που δεν διακρίνεται εύκολα στο αντίστοιχο (πρώτο γράφημα του x) στο πεδίο του χρόνου. Έτσι και από το παραπάνω παράδειγμα γίνεται φανερό ότι, στο πεδίο συχνοτήτων είναι συνήθως πιο "αποκαλυπτική" η ενδοσυμπεριφορά ενός Συστήματος, απ' ότι στο πεδίο του χρόνου. Για τον λόγο αυτό και είναι πολύ χρήσιμοι οι Γραμμικοί Μετασχηματισμοί(μαθηματικά μοντέλα) ML-MF-MZ στις Τεχνολογικές Εφαρμογές, αφού διευκολύνουν αυτήν την αμφίδρομη περιγραφή και Ανάλυση των Σημάτων-Συστημάτων μεταξύ των πεδίων του χρόνου και της συχνότητας.

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΟ ΜΑΘΗΜΑ (11ο και 12ο)

Σύντομη Επανάληψη-Περίληψη όλων των προηγούμενων μαθημάτων (Σύνοψη όλων των βασικών μαθηματικών πράξεων και εντολών).

1) Παραγώγιση	**2) Ολοκλήρωση**	**3) Σειρές Taylor, Mac-Laurin**
» syms x a b c » f=(a*x^2+b*x+c-cos(x)) f =a*x^2+b*x+c-cos(x) » diff(f) % Παράγωγος της f ως προς x ans =2*a*x+b+sin(x) » diff(f,a) % Παραγώγιση της f ως προς a ans =x^2 » diff(f,2) % Δεύτερη παράγωγος της f ως προς x ans =2*a+cos(x) » diff(f,a,2) % Δεύτερη παράγωγος της f ως προς a	» syms x y m n » f=3*x^2-2*y^3; » int(f) % αόριστο ολοκλήρωμα της f ως προς x ans =x^3-2*y^3*x » int(f,y)% αόριστο ολοκλήρωμα της f ως προς y ans 3*x^2*y-1/2*y^4 » int(f,1,pi) %ορισμένο ολοκλήρωμα της f ως προς x, από 1 μέχρι π ans =pi^3-1-2*y^3*(pi-1) int(f,y,1,pi)%ορισμένο ολοκλήρωμα της f ως προς y, από 1 μέχρι π ans =3*x^2*(pi-1)-1/2*pi^4+1/2 » int(f,m,n) ans =n^3-m^3-2*y^3*(n-m) » int(f,y,m,n) ans = 3*x^2*(n-m)-1/2*n^4+1/2*m^4	» syms x » f=exp(x); » taylor(f) ans = 1+x+1/2*x^2+1/6*x^3+1/24*x^4+1/120*x^5 » pretty(ans) 2 3 4 5 1 + x + 1/2 x + 1/6 x + 1/24 x + 1/120 x » taylor(f,2) ans = 1+x » taylor(f,-2) ans =exp(-2)+exp(-2)*(x+2)+1/2*exp(-2)*(x+2)^2+1/6*exp(-2)*(x+2)^3+1/24*exp(-2)*(x+2)^4+1/120*exp(-2)*(x+2)^5 » pretty(ans) 2 3 exp(-2) + exp(-2) (x + 2) + 1/2 exp(-2) (x + 2) + 1/6 exp(-2) (x + 2) 4 5 + 1/24 exp(-2) (x + 2) + 1/120 exp(-2) (x + 2) » f=cos(x); » taylor(f) ans =1-1/2*x^2+1/24*x^4 » f=sin(x); » taylor(f) ans = x-1/6*x^3+1/120*x^5 » pretty(ans) 3 5 x - 1/6 x + 1/120 x » taylor(f,-2) ans = -sin(2)+cos(2)*(x+2)+1/2*sin(2)*(x+2)^2-1/6*cos(2)*(x+2)^3-1/24*sin(2)*(x+2)^4+1/120*cos(2)*(x+2)^5 » taylor(f,2) ans = x

4) Πολυώνυμα

```
» syms x
» f=x^4+3*x^3-15*x^2-2*x+9;
» pretty(f)
                    4      3       2
                   x  + 3 x  - 15 x
- 2 x + 9
» f1=[1 3 -15 -2 9]
f1 =
    1    3   -15    -2    9
» polyval(f1,2) % η τιμή του πολυωνύμου f γραμμένο στη μορφή πίνακα f1, γιά x=2
ans = -15
» roots(f1)% ρίζες του f1
ans =
   -5.5745
    2.5836
    0.7860
   -0.7951
```

5) Πίνακες

```
» A=[1 2 3
4 5 6
7 8 9]
» size(A)
ans =     3     3
» A(2,1) %το στοιχείο της γραμμής 2 και της στήλης 1
ans =   4
» A(2,1)=0 %το στοιχείο της γραμμής 2 και της στήλης 1, να είναι 0
A =     1     2     3
    0     5     6
    7     8     9
» A*A
ans =    22    36    42
    42    73    84
    70   126   150
» A^2
ans =    22    36    42
    42    73    84
    70   126   150
» A^3
ans =       316         560         660
         630        1121        1320
        1120        1970        2316
» A^0
ans =     1     0     0
     0     1     0
     0     0     1
» det(A)
ans =     -24
» det(A^0)
ans =     1 ans =    0.1250   -0.2500    0.1250
   -1.7500    0.5000    0.2500
    1.4583   -0.2500   -0.2083
» A' % ανάστροφος
ans =     1     0     7
     2     5     8
     3     6     9
» A*(inv(A))
ans =    1.0000         0         0
   -0.0000    1.0000         0
         0         0    1.0000
B =   -1.0000    0.3000    2.0000   -0.5000
    7.0000    7.0000    1.0000    1.0000
    0.6667    5.0000    6.0000    4.0000
» A*B
» 5*A
ans =     5    10    15
     0    25    30
    35    40    45
» B=[-1 0.3 2 -0.5
7 7 1 1
2/3 5 6 2^2]
» inv(A)% αντίστροφος (inverse)
ans =   15.0000   29.3000   22.0000   13.5000
   39.0000   65.0000   41.0000   29.0000
   55.0000  103.1000   76.0000   40.5000
» B'
ans =
   -1.0000    7.0000    0.6667
    0.3000    7.0000    5.0000
    2.0000    1.0000    6.0000
   -0.5000    1.0000    4.0000
» size(B)
ans =     3     4
» rank(A)
ans =     3
» rank(B)
ans =     3
» trace(A)
ans =    15
» trace(B)
ans =    12
» norm(A)
ans =   16.0059
» norm(B)
ans =11.8228
» eig(A)% ιδιοτιμές-ιδιοδιανύσματα (eigenvalue-eigenvector)
ans =
   -1.5440
    1.0000
   15.5440
» eig(B)
```

6) Λύση Γραμμικού Συστήματος Εξισώσεων: {3x-2y=4, 7x+5y=19}	**7) Μιγαδικοί Αριθμοί**	**8) Διαφορικές Εξισώσεις**
» A=[3 -2 7 5] A = 3 -2 7 5 » B=[4 19] B = 4 19 » xy=inv(A)*B xy = 2.0000 1.0000	» z1=3-4i z1 = 3.0000 - 4.0000i » abs(z1) ans = 5 » angle(z1) ans = -0.9273 » angle(z1)*180/pi ans = -53.1301 » real(z1) ans = 3 » imag(z1) ans = -4 » conj(z1) ans = 3.0000 + 4.0000i » compass(z1) » feather(z1) » A=[1 2 3]+i*[-4 3 2] % Πίνακας 3 μιγαδικών αριθμών A = 1.0000 - 4.0000i 2.0000 + 3.0000i 3.0000 + 2.0000i » abs(A) ans = 4.1231 3.6056 3.6056 » angle(A)*180/pi ans = -75.9638 56.3099 33.6901 » compass(A) » feather(A) » » x=linspace(-2*pi,2*pi); » z=1-i*2 z = 1.0000 - 2.0000i » plot(x,angle(z)) » plot(x,abs(z)) » z1=(1-i*2)*tan(x*pi);	» syms x y » y=dsolve('x^2*D2y+7*x*Dy+5*y=10-4/x,y(1)=1,Dy(1)=0','x') y = 1/4*(8*x-4*log(x)+1)/x-5/4/x » pretty(y) 8 x - 4 log(x) + 1 1/4 ------------------ - 5/4 1/x x » y=dsolve('D2y+2*Dy+y=3*x*exp(-x),y(0)=4,Dy(0)=-2','x') y = 1/2*x^3*exp(-x)+4*exp(-x)+2*x*exp(-x) » pretty(y) 3 1/2 x exp(-x) + 4 exp(-x) + 2 x exp(-x) » syms x y t » y=dsolve('D2y+2*Dy+y=3*t*exp(-t),y(0)=4,Dy(0)=-2','t') y = 1/2*t^3*exp(-t)+4*exp(-t)+2*t*exp(-t) » pretty(y) 3 1/2 t exp(-t) + 4 exp(-t) + 2 t exp(-t) » y=simple(y) y = 1/2*exp(-t)*(t^3+8+4*t) » pretty(y) 3 1/2 exp(-t) (t + 8 + 4 t) » y=dsolve('D2y+y=8*cos(t), y(0)=4,Dy(0)=-2','t') *y =* *(4*sin(t)*cos(t)+4*t)*sin(t)-4*sin(t)^2*cos(t)-2*sin(t)+4*cos(t)* » y=dsolve('D2y+y=8*cos(t),y(0)=1,Dy(0)=-1','t') y = (4*sin(t)*cos(t)+4*t)*sin(t)-4*sin(t)^2*cos(t)-sin(t)+cos(t) » pretty(y) 2 (4 sin(t) cos(t) + 4 t) sin(t) - 4 sin(t) cos(t) - sin(t) + cos(t)

	» plot(x,angle(z1)) » plot(x,abs(z1)) » plot(x,real(z)) » plot(x,real(z1)) » plot(x,imag(z1)) » plot(x,imag(z)) » compass(z) » compass(z1)	» y=simple(y) y = 4*sin(t)*t-sin(t)+cos(t) » pretty(y) 4 sin(t) t - sin(t) + cos(t) » ezplot(y) » ezplot(y,[-10,10])

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Έστω κύκλωμα R, L, C σε σειρά εναλλασσομένου ρεύματος. Να υπολογιστεί η εμπέδηση του κυκλώματος και η διαφορά φάσης μεταξύ εφαρμοζόμενης τάσης και έντασης. Δίδονται R=120Ω, L=0,5H, C=100μF, .f=50Hertz. Να σχεδιαστεί η εμπέδηση του κυκλώματος. Δίνεται ο τύπος: $Z = R + i(L\omega - \frac{1}{C\omega})$, $\omega = 2\pi f$
2. Δίνεται η εμπέδηση ενός κυκλώματος από τον παρακάτω τύπο: $Z_A = \frac{Z_1 Z_2 + Z_2 Z_3 + Z_3 Z_1}{Z_2}$ Να υπολογιστεί η Z_A όταν Z_1 = 12 Ω, Z_2 = (5-10j) Ω, Z_3=(-10 + 10 j) Ω.
3. Δίνονται οι τύποι μιγαδικών αριθμών σε εφαρμογή φυσικής: $Z_0 = \sqrt{\frac{R + j\omega L}{G + j\omega C}}$ $\gamma = \sqrt{(R + j\omega L)\cdot(G + j\omega C}$ όπου R = 25Ω, L = 5.10^{-3}H,G = 80.10^{-6}siemens, C = $0{,}04.10^{-6}$f, ω=2000π, βρείτε τους μιγαδικούς αριθμούς και σχεδιάστε τους.
4. Να λυθεί το παρακάτω σύστημα, να υπολογιστούν οι μιγαδικοί αριθμοί και να παρασταθούν σε μιγαδικό επίπεδο συντεταγμένων.
$$\begin{bmatrix} 0{,}5\angle 48^o & -0{,}25\angle 0^o & 9\angle 50^o \\ 10\angle 10^o & 18\angle -22^o & 10\angle 30^o \\ 9\angle 62^o & 0{,}8\angle 12{,}3^o & 10{,}8\angle 90^o \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1\angle\varphi_1 \\ z_2\angle\varphi_2 \\ z_3\angle\varphi_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 25\angle 0^o \\ 12\angle -49^o \\ 23\angle -10^o \end{bmatrix}$$
5. Σε ένα κύκλωμα R L C σε σειρά δίνονται R=20, L=0,1H, C=20mf και όλα είναι συνδεδεμένα με πηγή εναλλασσόμενης τάσης V=14ημ314t Volt. Υπολογίστε την εμπέδηση του κυκλώματος Z και την διαφορά φάσης μεταξύ εφαρμοζόμενης τάσης V(t) και έντασης του ρεύματος I(t). Δίνονται οι παρακάτω τύποι: I(t)=Ioημωt, V(t)=Voημ(ωt-θ(rad)), Z=Io/Vo, Z=R+(Lω-1/Cω)i. Επίσης να σχεδιαστούν στον ίδιο πίνακα οι συναρτήσεις σημειώνοντας δίπλα σε κάθε γράφημα τον τίτλο της συνάρτησης.
6. Να σχεδιαστεί σε τρισδιάστατο χώρο η ευθεία γραμμή με διανυσματική εξίσωση r(t)=(2t)i +(-10t)j+(-2+2t)k.
7. Να υπολογιστεί η ορίζουσα του πίνακα M= $\begin{bmatrix} U & -R & 0 \\ 0 & R - ix & -R \\ R & U & 2R - ix \end{bmatrix}$

8. Να υπολογίσετε τις τιμές που μηδενίζουν τη ορίζουσα του πίνακα: $A = \begin{bmatrix} t & \sin t \\ \cos t & 0 \end{bmatrix}$.

9. Να λυθεί η τριγωνομετρική εξίσωση: $\sqrt{3}\cos\theta - \sin\theta = 1$.

10. Να λυθεί η εκθετική εξίσωση: $4(3^{2x+1}) + 17 \cdot (3)^x - 7 = 0$.

11. Να λυθεί το σύστημα: $\begin{matrix} \log_y x = 2 \\ 5y = x + 12\log_x y \end{matrix}$

12. Να λυθεί η εξίσωση $P_L = \dfrac{100}{(10 + R_L)^2} R_L$. Να σχεδιαστεί η συνάρτηση, δίνοντας τίτλο και χαρακτηρίζοντας τους άξονες.

13. Να αναπτυχθεί κατά τις δυνάμεις του x οι συναρτήσεις: $y = \dfrac{e^{2x} + e^{-2x}}{e^x}$ και g= $\ln\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$

14. Να λυθεί η εξίσωση: $4^x - 2^{x+1} - 3 = 0$.

15. Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα της συνάρτησης $F = 10\sin(\omega t) \cdot e^{-\frac{2t}{RC}}$ ως προς τη μεταβλητή t.

16. Να υπολογισθεί το ορισμένο ολοκλήρωμα της συνάρτησης $\int_{-5}^{5} \dfrac{e^{-t} - e^{t}}{2} dt$.

17. Δίνονται οι συναρτήσεις: $f = x\char`^3 + 2 * x\char`^2 - x - 2$ $g = x\char`^4 + x\char`^3 - 3 * x\char`^2 - 4 * x - 4$. Να υπολογισθούν τα παρακάτω: f + g, f – g, f*g, f/g, f(g(x)), g(f(x)), οι πρώτοι παράγωγοι των συναρτήσεων f, g, οι ρίζες των, τα γραφήματά των, τα ακρότατά και τέλος τα σημεία καμπής των. Να επιβεβαιωθεί η μονοτονία των συναρτήσεων και τα ακρότατα γραφικά.

18. Θεωρώ τη διαφορική εξίσωση: $\dfrac{d^2x}{dt^2} + \dfrac{k}{m}x(t) = 0$. Να επαληθευτεί ότι η συνάρτηση: $x(t) = A\cos\left(t\sqrt{\dfrac{k}{m}} - \phi\right)$ είναι λύση της.

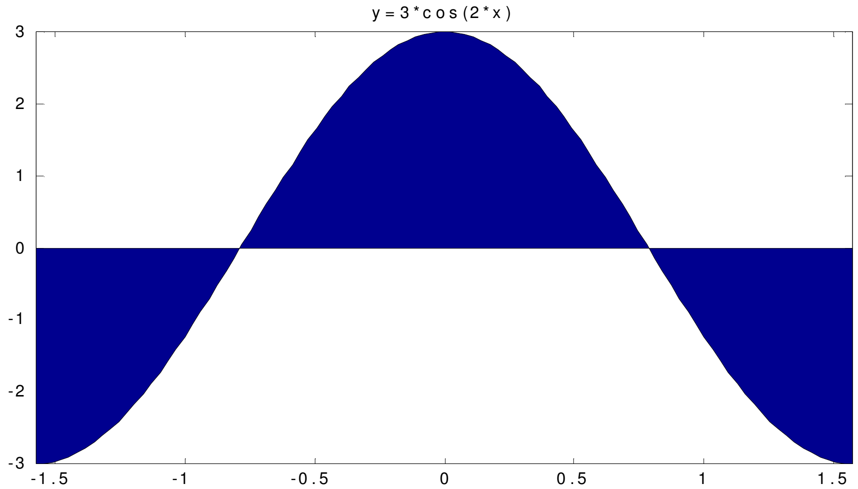
19. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα $\int \cos 10x \cdot \cos 30x \, dx$

$\int_1^2 \dfrac{(2x+1)\cdot(3x+4)}{x} dx$ $\int x^4 \cdot \ln x \, dx$

$\dfrac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \cos^2(nx)dx$ 3. $\int_0^{2\pi} \sin(nx)\cdot\cos(mx)dx$ *(Σημ. Στην περίπτωση 2 και 3 m, n είναι φυσικοί αριθμοί και* $m \neq n$ *).*

20. Να υπολογιστεί η ενεργός τιμή της τάσης εναλλασσομένου ημιτονικού ρεύματος $V(t) = 340 \cdot \sin 2t$ στο διάστημα $[0, \pi]$.

21. Να βρεθεί το μέτρο και το πρωτεύον όρισμα (σε μοίρες) του μιγαδικού αριθμού $z = \frac{2}{(1+j)^4}$ και να σχεδιαστεί στο μιγαδικό επίπεδο. Το γράφημα επαληθεύει τις τιμές που βρήκατε;
22. Να υπολογιστεί η ενεργός τιμή της έντασης εναλλασσομένου ημιτονικού ρεύματος $I(t) = I_O \cdot \sin 100\pi t$ στο διάστημα $[0, 10\text{ms}]$ γνωρίζοντας ότι η παραπάνω συνάρτηση παρουσιάζει μέγιστο στην τιμή 30Α. Στη συνέχεια να σχεδιάσετε τη συνάρτηση σε καρτεσιανό επίπεδο συντεταγμένων.
23. Βρείτε το εμβαδόν του χωρίου (Ω) που δημιουργεί η συνάρτηση $y(x) = 5x - x^2$ με τον άξονα x΄x. Σχεδιάστε τη συνάρτηση και υποδείξτε το ζητούμενο χωρίο.
24. Να αποδείξετε γραφικά την προσέγγιση της e^x από τη συνάρτηση: $1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots$ που είναι η ανάπτυξή της σε σειρά Taylor.
25. Να υπολογίσετε το γραμμοσκιασμένο εμβαδόν που ορίζεται από τη συνάρτηση και τον άξονα χ΄χ.

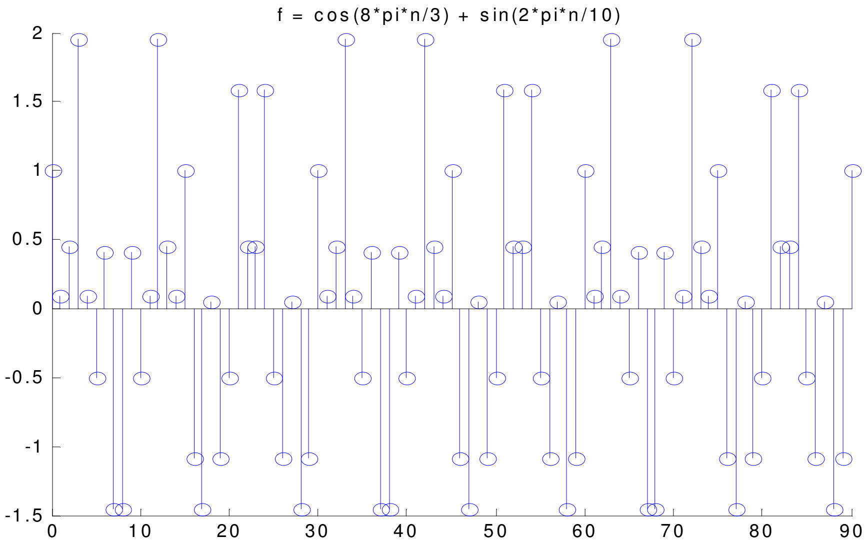


26. Να υπολογιστούν τα ορισμένα ολοκληρώματα στον πρόγραμμα *και να επαληθεύσετε τα αποτελέσματα* $\int_{-1}^{1} -\frac{3}{4}t^2 dt$ $\int_0^1 3e^{3t} dt$

$\int_1^4 \frac{3}{4u} du$ $\int_4^8 \frac{x dx}{\sqrt{x^2 - 15}}$ $\int_3^4 \frac{dx}{25 - x^2}$

27. Να αποδείξτε ότι: $\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(\eta \cdot x)\, dx = \pi$ $\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2(\eta \cdot x)\, dx = \pi$, όπου *η ακέραιος.*
28. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα*:* $\int_O^R e^{-sx} x^2 dx$ $\int_0^R e^{-sx} \sin(\alpha x) dx$
29. Να λυθεί η δ.ε. με δύο τρόπους: $y'' + 4y = 0$, όταν οι αρχικές συνθήκες της είναι y(0) = 2, y΄(0) = 2. Να επαληθεύσετε τη λύση της και να τη σχεδιάσετε σε καρτεσιανό επίπεδο συντεταγμένων.

30. Να βρεθεί ο μετασχηματισμός Fourier της συνάρτησης παλμού $f(t)=\begin{cases} 2, & |t|\le 10 \\ 0, & \text{οπουδήποτε αλλού} \end{cases}$. Να σχεδιασθεί η F{f(t)}. Να υπολογισθεί η τιμή της όταν $\omega\to 0$.
31. Δίδεται η περιοδική συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} 0, & -4<x<0 \\ 5, & 0<x<4 \end{cases}$ Η συνάρτηση αυτή έχει αναλυθεί σε σειρά Fourier ως εξής: $f(x)=\frac{5}{2}+\frac{10}{\pi}\left(\sin\frac{2\pi x}{8}+\frac{1}{3}\sin\frac{6\pi x}{8}+\frac{1}{5}\sin\frac{10\pi x}{8}+\ldots\right)$. Ποια είναι η θεμελιώδης συχνότητά της και ποιες είναι οι αρμονικές της συνιστώσες; Να σχεδιάσετε στο MATLAB το φάσμα συχνοτήτων της f(x).
32. Να λύσετε τη διαφορική εξίσωση: $y'+y=\sin(t)$, y (0) = 1 με δύο τρόπους.
33. Να βρεθεί ο μετασχηματισμός Fourier της συνάρτησης $f(t)=\begin{cases} 1, & |t|\le 5 \\ 0, & \text{οπουδήποτε αλλού} \end{cases}$ με τη βοήθεια του βασικού τυπολογίου. Να σχεδιασθεί η συνάρτηση f(t) στο χαρτί και ο μετασχηματισμός της (F{f(t)})στο πρόγραμμα. Να δικαιολογήσετε με όποιο τρόπο μπορείτε την τιμή της F{f(t)} όταν $\omega\to 0$.
34. Στο παρακάτω σχήμα δίνεται το σήμα f = cos(8πn/3) + sin(2πn/10). Να χαρακτηρίσετε το σήμα (χρονοσυνεχές/χρονοδιακριτό, πραγματικό/μιγαδικό, περιοδικό/μη περιοδικό). Στην περίπτωση που αποτελεί περιοδικό σήμα να υπολογίσετε την περίοδό του. (N=N1N2/ΜΚΔ(N1,N2))



35. Να υπολογισθεί ο αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace της συνάρτησης $\frac{s^2+6s+1}{s^3+2s^2+s}$
36. Έστω η συνάρτηση g(t) = cos(1000πt). (α) Να υπολογιστεί ο μετασχηματισμός Fourier της συνάρτησης. (β). Να γίνει ένα πρόχειρο γράφημά της g(t) και της G(ω), όπου $G(\omega)=F\left\{g(t)\right\}$). Τι παρατηρείτε;
37. Να υπολογισθεί ο μετασχηματισμός Laplace των παρακάτω συναρτήσεων. $\mathrm{L}\left\{5e^{-3t}-6\cos(5t)+10\sin(4t)-12t^{6}\right\}$

38. Δίδεται η συνάρτηση $f(t)=\begin{cases} 0, -\pi < t < \frac{-\pi}{2} \\ 1, \frac{-\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2} \\ 0, \frac{\pi}{2} < t < \pi \end{cases}$ Να γίνει η γραφική παράσταση της συνάρτησης. Να ελέγχει αν η συνάρτηση είναι άρτια ή περιττή. Να βρεθεί η σειρά Fourier της συνάρτησης. Συγκεκριμένα να υπολογιστούν οι συντελεστές Fourier της Σειράς και στη συνέχεια να γραφούν οι πρώτοι 4 όροι της.
39. Να χαρακτηρίσετε τα είδη και τη κατηγορία των σημάτων των οποίων οι μαθηματικοί τύποι σαν δίνονται παρακάτω. Να εξετάσετε την περιοδικότητά τους. Στην περίπτωση που αποτελούν περιοδικά σήματα να υπολογίσετε την περίοδό τους. Να σχεδιάσετε το κάθε σήμα στο πρόγραμμα MATLAB χρησιμοποιώντας κατάλληλο πεδίο ορισμού σχεδίασης.
    $f_1(t) = 2 + \sin(5\pi t - \pi/6) + 12\cos(20\pi t + \pi/3) - 4\sin(15\pi t + \pi/6)$
    $f_2(t) = \sin(\pi t - \pi/6) - \sin(2\pi t + \pi/3) + 0.5\cos(6\pi t)$
    $f_3(t) = 3\sin(2t - \pi/6) + 12\cos(9\pi t + \pi/3)$
    $f_4(t) = 3\sin(t - \pi/6) + 12\cos(10\pi t + \pi/3) - 4 + 6\cos(5\pi t)$
    $f5(n) = -3\sin(5\pi n) + 12\cos(20\pi n) - 4\sin(15\pi n + \pi/6)$
    $f_6(n) = \sin(100\pi n - \pi/6) + 12\cos(120\pi n)$
    $f_7(t) = \cos(\pi n - \pi/6) + 12\cos(20n + \pi/3)$
    $f_8(t) = \mathrm{real}(12\, e^{20\pi i t})$
    $f_9(t) = \mathrm{imag}(12\, e^{20\pi i t})$
    $f_{10}(t) = \mathrm{real}(e^{120\pi i t}) + \mathrm{imag}(e^{120\pi i t})$
40. Να υπολογισθεί η μερική παράγωγος της συνάρτησης f(x,y)= $(x^2+y^2)^{1/2}$ ως προς x στα σημεία (2,1) και (-2,1) και να δείξετε τι εκφράζει στο γράφημα της συνάρτησης που θα σχεδιάσετε στο MATLAB.
41. Θεωρούμε την συνάρτηση $f(x,y)=4/3x^3+4xy^3-4x^2-4y^2+1$. Να υπολογιστούν τα ακρότατα και τα σαγματικά σημεία της συνάρτησης και αν επαληθευτούν στο γράφημα της
42. Να υπολογισθεί το διπλό ολοκλήρωμα της συνάρτησης $\iint_{\Omega} 3x^2y^2\,dxdy$ στην περιοχή ολοκλήρωσης $\Omega: y=|x|, y=-|x|, x\in[-1,1]$.
43. Έστω ΓΧΑ σύστημα που περιγράφεται από τη Δ.Ε $y'(t)+a\cdot y(t)=x(t)$ Όπου x(t) και y(t) η συνάρτηση εισόδου και εξόδου αντίστοιχα του συστήματος. Να βρεθεί η συνάρτηση μεταφοράς και η κρουστική απόκριση του συστήματος.
44. Εστω ΓΧΑ σύστημα που περιγράφεται από τη Δ.Ε $y''(t)+7y'(t)+10y(t)=x'(t)+5x(t)$ Όπου x(t) και y(t) η συνάρτηση εισόδου και εξόδου αντίστοιχα του συστήματος. Να βρεθεί η συνάρτηση μεταφοράς και η κρουστική απόκριση του συστήματος.
45. Να λυθεί η διαφοροεξίσωση $y(k+2)-y(k+1)+6y(k)=\left(\frac{1}{2}\right)^k$,όταν $y(0)=y(1)=0$.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

ΕΛΛΗΝΙΚΗ

MATLAB για Μηχανικούς, Ευάγγελου Β. Χατζίκου, Εκδόσεις Τζιόλα, Θεσ/κη (2009).

***Γενικά Μαθηματικά**,* Ayres F., Μετάφραση: Σ. Περσίδης & Χ. Τερζίδης. ΕΣΠΙ, Αθήνα (1983).

ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΙ LAPLACE, FOURIER, ΖΗΤΑ *(ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ*, Εφαρμογές στα Σήματα-Συστήματα), Ν. Γαγαλής, Ι. Θεοδώρου, Π. Κικίλιας κ.α., Εκδόσεις ΔΗΡΟΣ, Αθήνα (2001).

ΑΓΓΛΙΚΗ

Bird, J. (1999). *Engineering Mathematics*. Newness: Oxford.

James, G. (1996). *Modern Engineering Mathematics*. Addison – Wesley: Harlow.

Libbey, R. (1991). *Handbook of Circuit Mathematics for Technical Engineers*. CRC Press: Boston.

Muotoe, L. & Barry, M. (1998). *Mathematics in Engineering and Science*. I. Wiley & Sons Ltd.: Baffins Lane.

Salas, S. & Hille E. (1986). *Calculus one and Several Variables.* J. Wiley and Sons.(Eds.): New York.

The Student Edition of MATLAB. (1995). Prentice Hall: Englewood Cliffs.

Zill, D. (1993). *Calculus*. PWS Publishing Company: Boston.