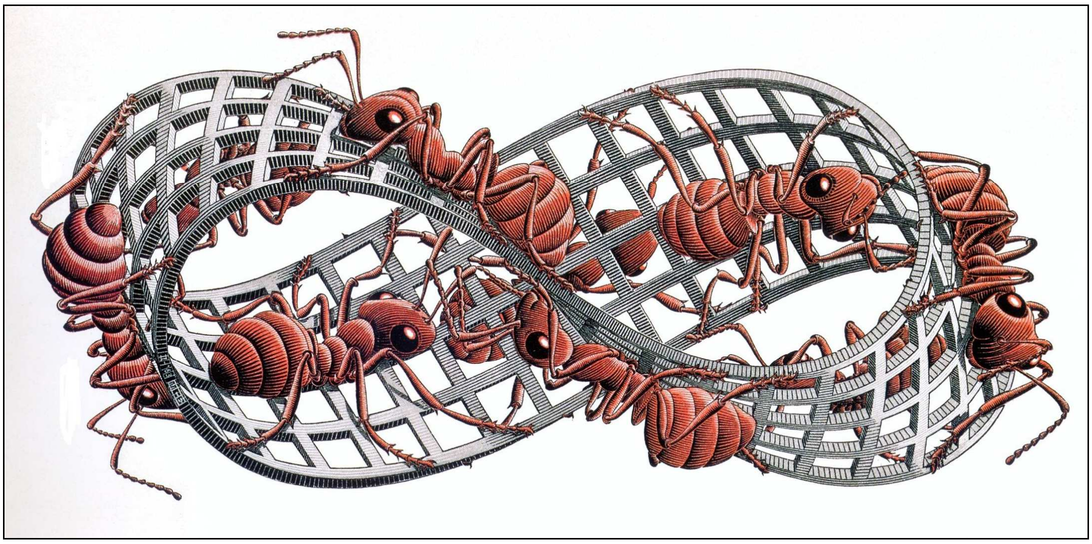
ΑΝΩΤΑΤΟ
ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟ ΙΔΡΥΜΑ
Τ.Ε.Ι. Στερεάς Ελλάδας

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΙΙ

Διδακτικές Σημειώσεις για τους Σπουδαστές του Β′ Εξαμήνου
Τμήμα ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΚΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ



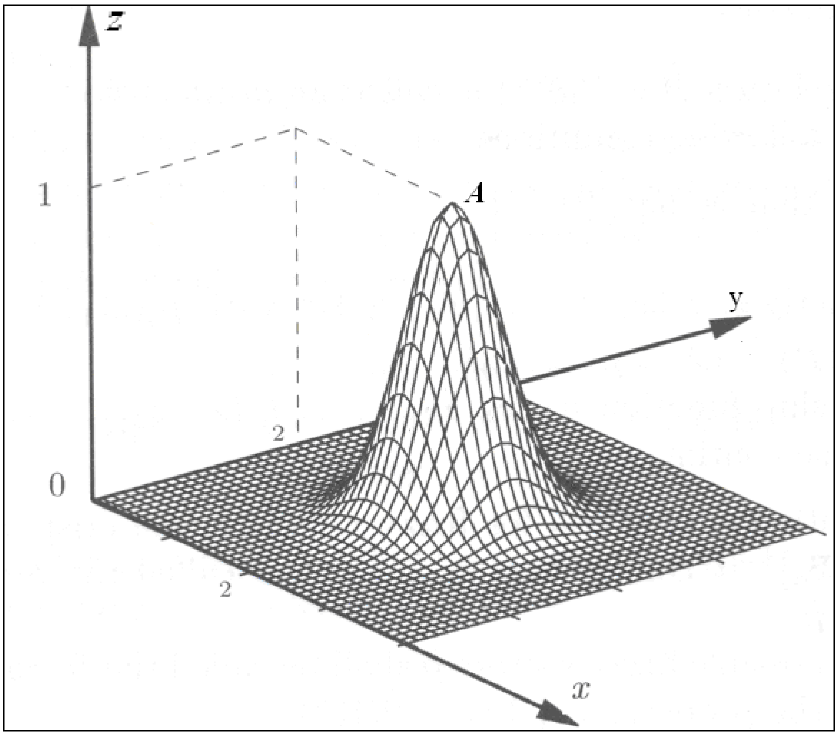
Γιάννης Θεοδώρου
Καθηγητής
(Δρ. Μαθηματικών-Στατιστικής)

Λαμία, Σεπτέμβρης 2013

<u>Συνεχής Κίνηση και αδιάκοπη Μεταβολή</u>

«Ποταμώ γαρ ουκ έστιν εμβήναι δις τώ αυτώ…».
ΗΡΑΚΛΕΙΤΟΣ

Δεν είναι δυνατόν να μπει κανείς δυο φορές μέσα στο ίδιο ποτάμι.
Γιατί τα νερά συνεχώς αλλάζουν …



ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ-ΙΙ

Μέρος 1ο

1. ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

Υπενθυμίσεις από τα ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ-Ι

Βασικές προαπαιτούμενες γνώσεις από τις
ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΜΙΑΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ

I. Βασικές Συναρτήσεις
II. Τυπολόγιο βασικών Παραγώγων
III. Υπενθυμίσεις βασικών Ολοκληρωμάτων

1. ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ I. Βασικές Συναρτήσεις

1. ΑΛΓΕΒΡΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

i) Ακέραιες Πολυωνυμικές

Είναι της μορφής :

$f(x) = a_v x^v + a_{v-1}x^{v-1} + \ldots + a_1 x + a_0$, με $a_v, \ldots, a_0 \in \Re$, $v \in N$ και π.ο.$= \Re$

π.χ.

$f(x) = 3x^2 - 2x = 5$, $f(x) = \sqrt{3}x^5 - 0{,}1x^2 - 6$.

ii) Ρητές ή κλασματικές

Είναι της μορφής :

$f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$, με $P(x)$, $Q(x)$ πολυωνυμικές συναρτήσεις και π.ο.$= \Re$ - {οι τιμές του x, που ενδεχομένως μηδενίζουν το Q(x)}.

π.χ.

$f(x) = \dfrac{5x^3 - 2x + 4}{2x^2 - 2x} \Big/ \Re - \{0,1\}$, $g(x) = \dfrac{2x^2 + 3}{x} \Big/ \Re^*$.

iii) Άρρητες

Είναι οι συναρτήσεις που έχουν παραστάσεις του x σε ριζικά.

π.χ.

$f(x) = 3 - \sqrt{x+2} / x \in [-2, +\infty)$, $g(x) = \sqrt{x^2+1} / \Re$.

IV) Πλεγμένες (ή πεπλεγμένες)

Πλεγμένη λέγεται η αλγεβρική συνάρτηση που δεν είναι λυμένη ως προς y, (όπως συνήθως).

Είναι δηλαδή μια συνάρτηση, που τα ζεύγη των αντίστοιχων τιμών των x και y ικανοποιούν μια εξίσωση δύο μεταβλητών, της μορφής :

$\varphi(x, y) = 0$

π.χ.

$\varphi(x, y) = 3x^2 - 4y^2 + 2xy = 0$,

$\sigma(x, y) = x^7 - 8x^4 + 12$.

Διακρίνουμε δύο είδη πλεγμένων συναρτήσεων : αυτές που επιλύονται ως προς y και αυτές που δεν επιλύονται ως προς y.

Κι αυτό γιατί, όπως είναι γνωστό απ' την Άλγεβρα, κάθε εξίσωση μέχρι και τετάρτου βαθμού ως προς x, μπορεί πάντοτε να λυθεί και οι ρίζες της να δοθούν από μια αναλυτική παράσταση δηλαδή μέσω ενός γενικού τύπου αναφερόμενου στους συντελεστές της εξίσωσης.

Για αλγεβρικές εξισώσεις όμως ανωτέρου του 4ου βαθμού, αυτό δε μπορεί να συμβεί γενικά.

Δηλαδή οι ρίζες εξισώσεων 5ου βαθμού και πάνω, αποδεικνύεται θεωρητικά ότι δε μπορούν να δοθούν από γενικό τύπο (όπως π.χ. συμβαίνει στις Β'βάθμιες εξισώσεις) ως προς τους συντελεστές της εξίσωσης.

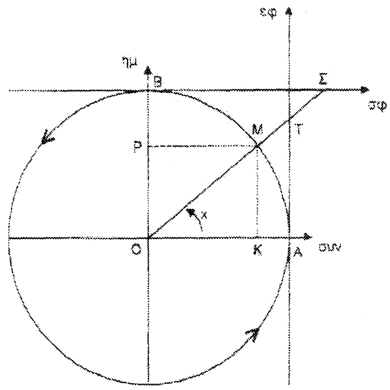
Αυτό μπορεί να γίνει μόνο σε ειδικές περιπτώσεις. Στη γενική περίπτωση δηλαδή, οι 5ου βαθμού και πάνω αλγεβρικές εξισώσεις αποδεικνύεται (Galois) ότι απαιτούν άπειρο πλήθος αλγεβρικών πράξεων για να εκφραστεί μια ρίζα της εξίσωσης υπό μορφή σειράς.

2. ΥΠΕΡΒΑΤΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

I) Τριγωνομετρικές (ή κυκλικές)

Ως γνωστό, οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις ορίζονται επί του τριγωνομετρικού κύκλου (ακτίνας μέτρου 1, και φορά περιστροφής αντίθετη των δεικτών του ρολογιού).
Οι συνήθεις τριγωνομετρικές συναρτήσεις :
ημίτονο -sinus (ημ - sin)
συνημίτονο - cosinus (συν - cos)
εφαπτομένη - tangente (εφ - tan)
συνεφαπτομένη - cotangente (σφ - cot),

ορίζονται ως γνωστό για τυχαίο $x = \overset{\frown}{AM}$,
ως εξής:



$\sin x = \overline{OP}$, $\cos x = \overline{OK}$,
$\tan x = \overline{AT}$, $\cot x = \overline{B\Sigma}$,

[*καθώς και οι απορρέουσες απ' αυτές συναρτήσεις - οι χρησιμοποιούμενες κυρίως απ' τους αγγλοσάξονες :*

$\tau\varepsilon\mu x = \sec x = \dfrac{1}{\cos x}$, *(τέμνουσα - secante)*

$\sigma\tau\varepsilon\mu x = \operatorname{cos\text{-}ec} x = \dfrac{1}{\sin x}$, *(συντέμνουσα - cosecante)*]

δηλαδή,

$\eta\mu = \sin\ :\ x \in \Re \to \eta\mu x\ \in [-1,1]$
$\sigma\upsilon\nu = \cos\ :\ x \in \Re \to \sigma\upsilon\nu x\ \in [-1,1]$
$\varepsilon\varphi = \tan\ :\ x \in \Re - \left\{\kappa\pi + \dfrac{\pi}{2},\ \kappa \in Z\right\} \to \varepsilon\varphi x\ \in \Re$
$\sigma\varphi = \cot\ :\ x \in \Re - \{\kappa\pi,\ \kappa \in Z\} \to \sigma\varphi x\ \in \Re$

Το x στις τριγωνομετρικές συναρτήσεις θεωρείται σε ακτίνια (rad). Το ακτίνιο, είναι ένα τόξο που το μήκος του (ανάπτυγμα) ισούται με το μήκος της ακτίνας του κύκλου στον οποίο ανήκει και υποδιαιρείται σε δέκατα, εκατοστά, κ.λ.π. Αν η ακτίνα του κύκλου ληφθεί ίση με 1, τότε το μέτρο του τόξου σε ακτίνια ταυτίζεται αριθμητικά με το μήκος του. Έτσι, κάθε κύκλος (με ρ=1), έχει περιφέρεια μήκους πάντα $2\pi\rho \simeq 2\cdot 3{,}14 \simeq 6{,}28$ *φορές την ακτίνα του, δηλαδή 6,28 ακτίνια (rad).*

Παρατηρήσεις (στις τριγωνομετρικές συναρτήσεις) :

1) Οι (ημ) και (συν) είναι περιοδικές με περίοδο 2π, δηλαδή $\eta\mu(x+2\pi) = \eta\mu x$ και $\sigma\upsilon\nu(x+2\pi) = \sigma\upsilon\nu x$, $\forall\ x \in \Re$, ενώ και γενικότερα οι $A\cdot\eta\mu(\omega x+\varphi)$, $A\cdot\sigma\upsilon\nu(\omega x+\varphi)$, (όπου A, ω, φ σταθερά), έχουν περίοδο $\dfrac{2\pi}{|\omega|}$.

Επίσης οι (εφ), (σφ) είναι περιοδικές με περίοδο π, δηλαδή $\varepsilon\varphi(x+\pi) = \varepsilon\varphi x$, $\forall x \in \Re - \left\{\kappa\pi + \dfrac{\pi}{2},\ \kappa \in Z\right\}$ και $\sigma\varphi(x+\pi) = \sigma\varphi x$, $\forall x \in \Re - \{\kappa\pi,\ \kappa \in Z\}$.

2) Βασικοί Τριγωνομετρικοί Τύποι - Σχέσεις

$$ημ^2x + συν^2x = 1$$

$$εφx = \frac{ημx}{συνx}, \quad σφx = \frac{συνx}{ημx}$$

$$εφx \cdot σφx = 1, \quad εφx = \frac{1}{σφx}$$

$$ημx \cdot ημy = \frac{1}{2}[συν(x-y) - συν(x+y)]$$

$$ημx \cdot συν y = \frac{1}{2}[ημ(x+y) + ημ(x-y)]$$

$$συν x \cdot συν y = \frac{1}{2}[συν(x+y) + συν(x-y)]$$

$$ημ2x = 2ημx \cdot συνx$$

$$συν2x = συν^2x - ημ^2x = 1 - 2ημ^2x = 2συν^2x - 1$$

$$εφ2x = \frac{2εφx}{1-εφ^2x}$$

$$σφ2x = \frac{σφ^2x - 1}{2σφx}$$

$$ημ(α \pm β) = ημα \cdot συνβ \pm ημβ \cdot συνα$$

$$συν(α \pm β) = συνα \cdot συνβ \mp ημα \cdot ημβ$$

$$εφ(α \pm β) = \frac{εφα \pm εφβ}{1 \mp εφα \cdot εφβ}$$

$$ημ2x = \frac{2εφx}{1+εφ^2x}, \quad \left(ή\ ημx = \frac{2εφ\frac{x}{2}}{1+εφ^2\frac{x}{2}}\right)$$

$$συν2x = \frac{1-εφ^2x}{1+εφ^2x}, \quad σφ2x = \frac{1-εφ^2x}{2εφx}$$

$$ημx = \frac{εφx}{\pm\sqrt{1+εφ^2x}}, \quad συνx = \frac{1}{\pm\sqrt{1+εφ^2x}}$$

$$ημx + ημy = 2ημ\frac{x-y}{2} \cdot συν\frac{x-y}{2}$$

$$ημx - ημy = 2συν\frac{x+y}{2} \cdot ημ\frac{x-y}{2}$$

$$συνx + συνy = 2συν\frac{x+y}{2} \cdot συν\frac{x-y}{2}$$

$$συνx - συνy = -2ημ\frac{x+y}{2} \cdot ημ\frac{x-y}{2}$$

$$εφx + εφy = \frac{ημ(x-y)}{συνx \cdot συνy}$$

$$εφx - εφy = \frac{ημ(x-y)}{συνx \cdot συνy}$$

$$1 + ημ(κx) = 2ημ^2\left(\frac{π}{4} + \frac{κx}{2}\right) = 2συν^2\left(\frac{π}{4} - \frac{κx}{2}\right)$$

$$1 - ημ(κx) = 2συν^2\left(\frac{π}{4} + \frac{κx}{2}\right) = 2ημ^2\left(\frac{π}{4} - \frac{κx}{2}\right)$$

$$1 + συν(κx) = 2συν^2\left(\frac{κx}{2}\right)$$

$$1 - συν(κx) = 2ημ^2\left(\frac{κx}{2}\right)$$

$$συν^2x = (1+συν2x)/2$$

$$ημ^2x = (1-συν2x)/2$$

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

$$ημx = ημθ \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 2κπ+θ \\ ή \\ x = (2κ+1)π-θ \end{array}\right., \quad (κ \in Z)$$

$$συνx = συνθ \Leftrightarrow x = 2κπ \pm θ, \quad (κ \in Z)$$

$$εφx = εφθ \Leftrightarrow x = κπ + θ$$

$$σφx = σφθ \Leftrightarrow x = κπ + θ$$

Πίνακας τριγων. συναρτήσεων βασικών γωνιών

x / f(x)	$30° = \frac{π}{6}$	$45° = \frac{π}{4}$	$60° = \frac{π}{3}$	$90° = \frac{π}{2}$	$0° = 0$
sinx	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1	0
cosx	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0	1
tanx	$\sqrt{3}/3$	1	$\sqrt{3}$	$\to \pm\infty$	0
cotx	$\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}/3$	0	$\to \pm\infty$

$$\left(\frac{μ}{180} = \frac{α}{π} = \frac{β}{200}\right)$$

$$ημ(3x) = 3ημx - 4ημ^3x$$

$$συν(3x) = 4συν^3x - 3συνx$$

$$εφ(3x) = \frac{3εφx - εφ^3x}{1 - 3εφ^2x}$$

$$α \cdot συν(ωt) + β \cdot ημ(ωt) = \sqrt{α^2+β^2} \cdot συν(ωt - φ) =$$

$$= \sqrt{α^2+β^2} \cdot ημ(ωt - φ), \quad \left(με\ εφφ = \frac{β}{α}\right),$$

$$συνx + ημx = \sqrt{2} \cdot συν\left(x - \frac{π}{4}\right) = \sqrt{2} \cdot ημ\left(x + \frac{π}{4}\right)$$

$$ημx - συνx = \sqrt{2} \cdot συν\left(x + \frac{π}{4}\right) = \sqrt{2} \cdot ημ\left(x - \frac{π}{4}\right)$$

$$συν(-x) = συνx, \quad ημ(-x) = -ημx$$

$$εφ(-x) = -εφx, \quad σφ(-x) = -σφx$$

$$συν\left(\frac{π}{2} - x\right) = ημx, \quad ημ\left(\frac{π}{2} - x\right) = συνx$$

$$εφ\left(\frac{π}{2} - x\right) = σφx, \quad σφ\left(\frac{π}{2} - x\right) = εφx$$

$$συνx = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \qquad ημx = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \qquad \text{(Τύποι Euler)}$$

$$συνx + iημx = e^{ix}, \quad (i = \sqrt{-1})$$

ΙΙ) Αντίστροφες Τριγωνομετρικές Συναρτήσεις

Ο όρος "αντίστροφες τριγωνομετρικές" συναρτήσεις δεν είναι ακριβής, αφού όπως γνωρίζουμε οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις είναι περιοδικές, άρα μη αμφιμονοσήμαντες (π.χ. ενώ ημx $= \frac{1}{2} = y$, το y αντιστρόφως έχει άπειρα αντίστοιχα $x = \kappa\pi + (-1)^{\kappa} \cdot \frac{\pi}{6}$, $(\kappa \in Z)$) και άρα γενικά δεν έχουν αντίστροφες.

Όμως, περιορίζοντας κατάλληλα (για λόγους πρακτικών αναγκών, κύρια) το π.ο. των τριγωνομετρικών συναρτήσεων, μπορούμε και να ορίσουμε τις αντίστροφές τους (στους περιορισμούς των τριγωνομετρικών συναρτήσεων) ως εξής :

$ημ^{-1}$ = τοξημ = arcsin : $x \in [-1,1] \to$ τοξημx $\in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$,

$συν^{-1}$ = τοξσυν = arccos : $x \in [-1,1] \to$ τοξσυνx $\in [0,\pi]$,

$εφ^{-1}$ = τοξεφ = arctg : $x \in \Re \to$ τοξεφx $\in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

$σφ^{-1}$ = τοξσφ = arcctg : $x \in \Re \to$ τοξσφx $\in (0,\pi)$.

Παρατηρήσεις

1) Όπως π.χ. ορίστηκε η αντίστροφη της ημx, στο διάστημα $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, μπορούμε να ορίσουμε ισοδύναμα την τοξημx και σε καθένα χωριστά απ' τα διαστήματα - (περιορισμούς της ημ) $\left[\kappa\pi - \frac{\pi}{2}, \kappa\pi + \frac{\pi}{2}\right]$, $\kappa \in Z$. Απ' τα άπειρα αυτά διαστήματα επιλέγουμε συνήθως το απλούστερο, για κ=0, που λέγεται χαρακτηριστικά και πρωτεύον τόξο του ημ (προς διάκριση γράφουμε $τοξ_o$ημx, έναντι $τοξ_\kappa$ημx).

Ανάλογα έχουμε και για τις υπόλοιπες τριγωνομετρικές συναρτήσεις,

δηλαδή το τοξσυν ορίζεται σε καθένα απ' τα : $[\kappa\pi, \kappa\pi+\pi]$, $\kappa \in Z$,

το τοξεφ ορίζεται σε καθένα απ' τα : $\left(\kappa\pi - \frac{\pi}{2}, \kappa\pi + \frac{\pi}{2}\right)$, $\kappa \in Z$,

το τοξσφ ορίζεται σε καθένα απ' τα : $(\kappa\pi, \kappa\pi+\pi)$, $\kappa \in Z$.

2) Ισχύουν οι σχέσεις :

τοξημx + τοξσυνx $= \frac{\pi}{2}$, $(\forall\, x \in [-1,1])$.

τοξεφx + τοξσφx $= \frac{\pi}{2}$, $(\forall\, x \in \Re)$.

3) Μεταξύ των τριγωνομετρικών συναρτήσεων και των αντιστρόφων κυκλικών ισχύουν οι ισοδυναμίες :

$$\left\{\begin{array}{l} y = τοξημx \\ x \in [-1,1] \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = ημy \\ y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \end{array}\right\}, \qquad \left\{\begin{array}{l} y = τοξσυνx \\ x \in [-1,1] \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = συνy \\ y \in [0,\pi] \end{array}\right\}.$$

Επίσης, ημ(τοξημx) = x, $\forall x \in [-1,1]$ και συν(τοξσυνx) = x, $\forall x \in [-1,1]$.

III) **Εκθετικές**

Κάθε συνάρτηση της μορφής :

$f : x \in \Re \to f(x) \overset{\text{ορ.}}{=} a^x \in \Re^*_+$, με $a > 0 \left(a \in \Re^*_+\right)$

λέγεται εκθετική συνάρτηση με βάση α.

- Προφανώς π.ο.= $\Re$ και π.τ. = $\Re^*_+$ αφού $\forall a \in \Re^*_+$ και $\forall x \in \Re$, $a^x > 0$.
- Αν $a > 1$, τότε f ↑, αφού $\forall x_1 < x_2 \Rightarrow a^{x_1} < a^{x_2} \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

  Αν $a < 1$, τότε f ↓, αφού $\forall x_1 < x_2 \Rightarrow a^{x_1} > a^{x_2} \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

  Αν α = 1, τότε f = σταθερή, με $f(x) = 1^x = 1$, $\forall x \in \Re$.
- Οι καμπύλες των $f_1(x) = a^x$ και $f_2(x) = \left(\dfrac{1}{a}\right)^x$, είναι συμμετρικές ως προς τον άξονα των y.
- Η $f(x) = a^x$, με $a \neq 1$, είναι επί, δηλαδή $f(\Re) = \Re^*_+$. Δηλαδή η εκθετική συνάρτηση με $a \in \Re^*_+ - \{1\}$, είναι γνήσια μονότονη $\left(a > 1 \Rightarrow f \uparrow,\ a < 1 \Rightarrow f \downarrow\right)$, και επί, άρα αντιστρέψιμη και ως γνωστό η αντίστροφή της είναι η λογαριθμική (για α = 1, δεν ορίζεται αντίστροφη συνάρτηση).

IV) **Λογαριθμικές**

Την αντίστροφη της εκθετικής συνάρτησης

$f : x \in \Re \to f(x) = a^x \in \Re^*_+$, με $a > 0$ και $a \neq 1$

δηλαδή την $f^{-1} : y = a^x \in \Re^*_+ \to f^{-1}(y) = x \in \Re$, $a \in \Re^*_+ - \{1\}$

(και για τον ενιαίο συμβολισμό, δι εναλλαγής των μεταβλητών)

$f^{-1} \overset{\text{ορ.}}{=} \boxed{\log_a : x \in \Re^*_+ \to \log_a(x) = y \in \Re,\ a \in \Re^*_+ - \{1\}}$

την λέμε λογαριθμική συνάρτηση με βάση α.

- Απ' τον παραπάνω ορισμό έχουμε : $\boxed{\log_a x = y \Leftrightarrow x = a^y}$
- Αν α = 10 τότε η $\log_{10} x$ λέγεται δεκαδικός λογάριθμος και συμβολίζεται logx, ενώ αν $a = e = 2{,}7182...$, τότε η $\log_e x$ λέγεται φυσικός ή νεπέρειος λογάριθμος και συμβολίζεται lnx.
- Επειδή π.ο. της log είναι το $\Re^*_+$, άρα μόνο οι θετικοί αριθμοί έχουν λογάριθμο.
- Η μονοτονία της λογάριθμικής είναι ίδια με της εκθετικής (ιδιότητα αντιστρόφων συναρτήσεων).
- Ακρότατα δεν υπάρχουν στη λογαριθμική και στην εκθετική.
- Το διάγραμμα της λογαριθμικής είναι συμμετρικό της εκθετικής, ως προς την y = x, (ως αντίστροφες συνάρτήσεις).

- Η λογαριθμική συνάρτηση επεκτείνεται απ' το $\Re$ στο C, οπότε και οι αρνητικοί πραγματικοί έχουν λογάριθμο, ως εξής : $\ln : x \in \Re \to \ln x \overset{\text{op}}{=} \begin{cases} \ln(-x) + (2\kappa+1)\pi i, & \text{αν } x \le 0 \\ \ln x, & \text{αν } x > 0 \end{cases}$.

Ιδιότητες Λογαρίθμων $\forall\, x \in \Re_+^*,\ \alpha \in \Re_+^* - \{1\}$.

1) $\log_\alpha y = x \Leftrightarrow y = \alpha^x$, $\left(\text{ή } \log_\alpha x = y \Leftrightarrow x = \alpha^y\right)$, (εξ ορισμού),

$\boxed{\ln y = x \Leftrightarrow y = e^x}$

ή

$\boxed{\ln x = y \Leftrightarrow x = e^y}$.

2) $\log_\alpha 1 = 0$, (αφού $\alpha^0 = 1$).

3) $\log_\alpha \alpha = 1$, (αφού $\alpha^1 = \alpha$).

4) $\alpha^{\log_\alpha x} = x$, $\left(\begin{matrix} \text{γιατί, έστω } \log_\alpha x = y, \text{ άρα } \alpha^{\log_\alpha x} = \alpha^y, (1), \text{αλλά} \\ \log_\alpha x = y \Leftrightarrow x = \alpha^y \ (2), \text{ οπότε } (1) : \alpha^{\log_\alpha x} = \alpha^y \overset{(2)}{=} x \end{matrix}\right)$

$\left(e^{\ln x} = x\right)$.

5) $\log_\alpha(x_1 \cdot x_2) = \log_\alpha x_1 + \log_\alpha x_2$

γιατί : $\left.\begin{matrix} \log_\alpha x_1 = y_1 \Leftrightarrow \alpha^{y_1} = x_1 \\ \log_\alpha x_2 = y_2 \Leftrightarrow \alpha^{y_2} = x_2 \end{matrix}\right\}$ Άρα $\begin{matrix} x_1 \cdot x_2 = \alpha^{y_1} \cdot \alpha^{y_2} = \alpha^{y_1+y_2} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \log_\alpha(x_1 \cdot x_2) = y_1 + y_2 = \log_\alpha x_1 + \log_\alpha x_2 \end{matrix}$

[Γενικά : $\log_\alpha(x_1 \cdots x_\nu) = \log_\alpha x_1 + \ldots + \log_\alpha x_\nu$]

6) $\log_\alpha\left(\frac{x_1}{x_2}\right) = \log_\alpha x_1 - \log_\alpha x_2$, γιατί $\log_\alpha\left(\frac{x_1}{x_2}\right) = \log_\alpha\left(x_1 \cdot \frac{1}{x_2}\right)$.

7) $\log_\alpha x^\omega = \omega \log_\alpha x$, $(\omega \in \Re)$,

γιατί $\log_\alpha x = \theta \Leftrightarrow \alpha^\theta = x \Leftrightarrow \left(\alpha^\theta\right)^\omega = x^\omega \Leftrightarrow \left(x^\omega\right) = (\alpha)^{\omega\cdot\theta} \overset{\text{ιδιοτ.(1)}}{\Leftrightarrow}$

$\Leftrightarrow \log_\alpha x^\omega = \omega \cdot \theta = \omega \log_\alpha x$.

8) $\log_\alpha \sqrt[\omega]{x} = \frac{1}{\omega}\log_\alpha x$, γιατί $\log_\alpha \sqrt[\omega]{x} = \log_\alpha x^{1/\omega}$.

9) $\log_\alpha x = \theta \Rightarrow \log_\alpha\left(\frac{1}{x}\right) = -\theta$.

10) $\lim\limits_{x \to x_0} \ln|f(x)| = \ln\left|\lim\limits_{x \to x_0} f(x)\right|$,

($\log_\alpha y = x$, σημαίνει : ποιος αριθμός x μπαίνει εκθέτης στο α, ώστε $\alpha^x = y$),

π.χ. $\log_3 81 = x$, σημαίνει ισοδύναμα $3^x = 81$. Άρα $x = 4$, αφού $3^4 = 81$.

11) Αλλαγή βάσης λογαριθμικού συστήματος $\left.\right\}$ $\boxed{\log_\beta x = \frac{\log_\alpha x}{\log_\alpha \beta}}$, οπότε $\boxed{\ln x = \frac{\log x}{\log e}}$.

ΣΤΟΙΧΕΙΩΔΕΙΣ ΤΥΠΟΙ

7α

1) ΛΥΣΗ ΑΛΓΕΒΡΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ

Α) Εξίσωση 2ου βαθμού : $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$

Ρίζες : $\boxed{\rho_{1,2} = \dfrac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\alpha}}$, με $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma$ = διακρίνουσα, και $\left\{\begin{array}{l} \rho_1 + \rho_2 = \dfrac{-\beta}{\alpha} \\ \rho_1 \cdot \rho_2 = \dfrac{\gamma}{\alpha} \end{array}\right\}$.

Ανάλογα με το πρόσημο της Δ, το τριώνυμο $\varphi(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$, έχει την εξής συμπεριφορά:

i) $\Delta > 0 \Rightarrow$
- Το $\varphi(x)$ έχει 2 ρίζες πραγματικές και άνισες
- Αναλύεται σε γινόμενο παραγόντων: $\varphi(x) = \alpha(x - \rho_1)(x - \rho_2)$
- Το $\varphi(x)$ είναι ομόσημο του α, όταν $x < \rho_1$ ή $x > \rho_2$ και ετερόσημο του α όταν $\rho_1 < x < \rho_2$

i) $\Delta = 0 \Rightarrow$
- Το $\varphi(x)$, έχει 1 διπλή πραγματική ρίζα $\left(\rho_{1,2} = \dfrac{-\beta}{2\alpha}\right)$.
- Είναι τέλειο τετράγωνο, δηλαδή $\varphi(x) = \alpha(x - \rho_1)^2$.
- Είναι ομόσημο του α, $\forall x \in \Re - \left\{\dfrac{-\beta}{2\alpha}\right\}$

iii) $\Delta < 0 \Rightarrow$
- Το $\varphi(x)$, έχει 2 μιγαδικές ρίζες (συζυγείς).
- Δεν αναλύεται σε γινόμενο παραγόντων, μπορεί να γραφτεί όμως σαν άθροισμα τετραγώνων ως εξής : $\varphi(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma = \alpha\left[\left(x + \dfrac{\beta}{2\alpha}\right)^2 + \left(\dfrac{\sqrt{-\Delta}}{2\alpha}\right)^2\right]$
- Είναι ομόσημο του α, $\forall x \in \Re$

Σημείωση : Το β΄βάθμιο τριώνυμο είναι, λοιπόν, σε κάθε περίπτωση ομόσημο του α, εκτός όταν Δ>0 και x μεταξύ των ριζών.

Β) Εξίσωση 3ου βαθμού : $x^3 + \alpha_1 x^2 + \alpha_2 x + \alpha_3 = 0$

Έστω : $Q = \dfrac{3\alpha_2 - \alpha_1^2}{9}$, $\qquad P = \dfrac{9\alpha_1\alpha_2 - 27\alpha_3 - 2\alpha_1^3}{54}$,

$S = \sqrt[3]{P + \sqrt{Q^3 + P^2}}$, $\qquad T = \sqrt[3]{P - \sqrt{Q^3 + P^2}}$.

Τότε, οι ρίζες είναι :

$$\boxed{\begin{array}{l} x_1 = S + T - \dfrac{1}{3}\alpha_1 \\ x_2 = -\dfrac{1}{2}(S + T) - \dfrac{1}{3}\alpha_1 + \dfrac{1}{2}i\sqrt{3}(S - T) \\ x_3 = -\dfrac{1}{2}(S + T) - \dfrac{1}{3}\alpha_1 - \dfrac{1}{2}i\sqrt{3}(S - T) \end{array}}$$

Παρατηρήσεις :

α) Αν $\Delta = Q^3 + P^2$ = διακρίνουσα, $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \Re)$, τότε :

$$\left[\begin{array}{l} -\text{ αν } \Delta > 0, \text{ έχουμε μια ρίζα πραγματική και 2 ρίζες μιγαδικές (συζυγείς).} \\ -\text{ αν } \Delta = 0, \text{ όλες οι ρίζες πραγματικές και τουλάχιστον οι 2 είναι ίσες.} \\ -\text{ αν } \Delta < 0, \text{ όλες οι ρίζες πραγματικές και άνισες.} \end{array}\right.$$

β) Αν $\Delta < 0$, τότε οι υπολογισμοί απλουστεύονται, δηλαδή :

$$\left\{\begin{array}{l} x_1 = 2\sqrt{-Q}\cdot \sigma\upsilon\nu\left(\dfrac{\theta}{3}\right) - \dfrac{\alpha_1}{3} \\ x_2 = 2\sqrt{-Q}\cdot \sigma\upsilon\nu\left(\dfrac{\theta}{3} + 120^\circ\right) - \dfrac{\alpha_1}{3} \\ x_3 = 2\sqrt{-Q}\cdot \sigma\upsilon\nu\left(\dfrac{\theta}{3} + 240^\circ\right) - \dfrac{\alpha_1}{3} \end{array}\right\}, \text{ όπου } \sigma\upsilon\nu\theta = \frac{P}{\sqrt{-Q^3}}.$$

γ) Σχέσεις ριζών - συντελεστών :

$$\left\{\begin{array}{l} x_1 + x_2 + x_3 = -\alpha_1 \\ x_1\cdot x_2 + x_2\cdot x_3 + x_3\cdot x_1 = \alpha_2 \\ x_1\cdot x_2\cdot x_3 = -\alpha_3 \end{array}\right\}.$$

π.χ. $x^3 - 3x^2 + 3 = 0$. Είναι $\Delta = Q^3 + P^2 = (-1)^3 + \left(\dfrac{-1}{2}\right)^2 = \dfrac{-3}{4} < 0$, άρα 3 ρίζες πραγματικές και άνισες.

Βρίσκουμε : $x_1 = \dfrac{14243}{5625} = 2{,}532$, $\quad x_{2,3} = \dfrac{1316}{5625} \pm \sqrt{\dfrac{44623}{36000}} = \begin{array}{l} \xrightarrow{(-)} 1{,}346 \\ \xrightarrow{(-)} -0{,}88 \end{array}$.

Γ) **Εξίσωση 4ου βαθμού :** $x^4 + \alpha_1 x^3 + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x + \alpha_4 = 0$, (1)

Έστω y_1 μια πραγματική ρίζα της 3βάθμιας ξίσωσης :

$$y^3 - \alpha_2 y^2 + (\alpha_1\alpha_3 - 4\alpha_4)y + (4\alpha_2\alpha_4 - \alpha_3^2 - \alpha_1^2\alpha_4) = 0, \qquad (2).$$

Τότε οι ρίζες της (1), είναι ρίζες της εξίσωσης :

$$z^2 + \frac{1}{2}\left[\alpha_1 \pm \sqrt{\alpha_1^2 - 4\alpha_2 + 4y_1}\right]z + \frac{1}{2}\left[y_1 \pm \sqrt{y_1^2 - 4\alpha_4}\right] = 0, \qquad (3).$$

- Αν όλες οι ρίζες της γ΄βάθμιας (2) είναι πραγματικές, τότε οι υπολογισμοί απλουστεύονται, αν χρησιμοποιήσουμε εκείνη τη ρίζα που δίνει πραγματικούς συντελεστές για τη β΄βάθμια εξίσωση (3).

- Σχέσεις ριζών - συντελεστών.

$$\left\{\begin{array}{l} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -\alpha_1 \\ x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + x_4x_1 + x_1x_3 + x_2x_4 = \alpha_2 \\ x_1x_2x_3 + x_2x_3x_4 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 = -\alpha_3 \\ x_1x_2x_3x_4 = \alpha_3 \end{array}\right\},$$

όπου x_1, x_2, x_3, x_4, είναι οι 4 ρίζες της (1).

II. ΒΑΣΙΚΟ ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ ΠΑΡΑΓΩΓΙΣΗΣ

y (συνάρτηση)	y′ (παράγωγος της συνάρτησης)	Παρατηρήσεις
(1) άθροισμα συναρτήσεων	$(f_1 \pm f_2)' = f_1' \pm f_2'$, $(c_1 f_1 + c_2 f_2)' = c_1 f_1' + c_2 f_2'$ και γενικά $(c_1 f_1 + \ldots + c_\nu f_\nu)' =$ $= c_1 f_1' + \ldots + c_\nu f_\nu'$	f_i = συναρτήσεις του x c_i = σταθερές
(2) γινόμενο συναρτήσεων	$(f_1 \cdot f_2)' = f_1' \cdot f_2 + f_1 \cdot f_2'$, $(cf)' = cf'$ και γενικά $(f_1 \cdot f_2 \cdot \ldots \cdot f_\nu)' =$ $= f_1' \cdot f_2 \cdot \ldots \cdot f_\nu + f_1 \cdot f_2' \cdot \ldots \cdot f_\nu + \ldots + f_1 \cdot f_2 \cdot \ldots \cdot f_\nu'$	f_i = συναρτήσεις του x c_i = σταθερές
(3) Δύναμη συνάρτησης	$(f^\nu)' = \nu \cdot f^{\nu-1} \cdot f'$	με $x \in \Re \wedge \nu \in N$ ή $f(x) > 0 \wedge \nu \in \Re$, και γενικά με f(x) και ν κατάλληλα
(4) Ρίζα συνάρτησης	$\left(\sqrt[\kappa]{f^m}\right)' = \left(f^{\frac{m}{\kappa}}\right)' = \frac{m}{\kappa} \cdot f^{\frac{m}{\kappa}-1} \cdot f'$ και ιδιαίτερα $(\sqrt{f})' = \frac{f'}{2\sqrt{f}}$	Όπως και παραπάνω στη δύναμη, εννοείται ότι ο εκθέτης $a = \frac{m}{\kappa}$ και το π.ο. της f, είναι κατάλληλα σύνολα.
(5) Πηλίκο συνάρτησης	$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$, $(g(x) \neq 0)$ και ιδιαίτερα $\left(\frac{1}{g}\right)' = \frac{-g}{g^2}$, $g(x) \neq 0$	
(6) Σύνθετη συνάρτηση	$f(g(x))' = f_g'(g) \cdot g_x'(x)$	
(7) Αντίστροφη συνάρτησης $y = f(x) \Leftrightarrow f^{-1}(y) = x$	$(f^{-1}(y))' = \frac{1}{f'(x)} = (f'(x))^{-1}$	Προφανώς $\left(\frac{1}{f(x)}\right)' = (f^{-1}(x))' = \frac{-f}{f^2} \neq$ $\neq \frac{1}{f'(x)} = (f'(x))^{-1} = (f^{-1}(y))'$
(8) c	0	c = σταθερή
(9) x cx	1 c	x = ανεξάρτητη μεταβλητή

y (συνάρτηση)	y΄ (παράγωγος της συνάρτησης)	Παρατηρήσεις
(10) x^v $(f)^v$	$v \cdot x^{v-1}$ $v \cdot f^{v-1} \cdot f'$	με $x \in \Re_- \wedge v \in N$ ή $x \in \Re_+ \wedge v \in \Re$, με $v \in \Re \wedge f(x) > 0$ και γενικά με v και f(x) κατάλληλα
(11) $\sqrt{x}$ $\sqrt[\kappa]{x^m} = x^{\frac{m}{\kappa}}$ $\sqrt{f}$ $\sqrt[\kappa]{f^m} = f^{\frac{m}{\kappa}}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$ $\frac{m}{\kappa} \cdot x^{\frac{m}{\kappa}-1}$ $\frac{f'}{2\sqrt{f}}$ $\frac{m}{\kappa} \cdot f^{\frac{m}{\kappa}-1} \cdot f'$	ότι ισχύει για τη (10)
(12) $\ln x$ $\log_a x$ $\ln f$ $\log_a f$	$\frac{1}{x}$ $\frac{1}{x \ln a}$ $\frac{f'}{f}$ $\frac{f'}{f} \cdot \log_a e$	$x \in \Re_+^*$ $f > 0$, $a \in \Re_+^* - \{1\}$, $x \in \Re_+^*$
(13) e^x, e^f a^x, a^f	e^x, $e^f(f')$ $a^x \ln a$, $(a^f)(\ln a)(f')$	$x \in \Re$, $a > 0$ f = συνάρτηση του x
γενικά : $y = f(x)^{u(x)}$ (y = γενικευμένη εκθετική συνάρτηση)	$u \cdot f^{u-1} \cdot f' + f^u \cdot u' \ln f$	$f = f(x)$, $u = u(x)$
(14) ημx sinx	συνx	$x \in \Re$, ημx $\in [-1,1]$
συνx cosx	-ημx	$x \in \Re$, συνx $\in [-1,1]$
εφx tanx	$\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x} = 1 + \varepsilon\varphi^2 x$	$x \in \Re - \{\kappa\pi + \frac{\pi}{2}, \kappa \in Z\}$ εφx $\in \Re$
σφx cotanx	$-\frac{1}{\eta\mu^2 x} = -1 + \sigma\varphi^2 x$	$x \in \Re - \{\kappa\pi, \kappa \in Z\}$ σφx $\in \Re$
(15) ημf	$(\sigma\upsilon\nu f) \cdot f'$	f = συνάρτηση του x (Τριγωνομετρικές συναρτήσεις)
συνf	$(-\eta\mu f) \cdot f'$	
εφf	$\frac{f'}{\sigma\upsilon\nu^2 f}$	
σφf	$-\frac{f'}{nu^2 f}$	

y (συνάρτηση)	y′ (παράγωγος της y)	Παρατηρήσεις $f = f(x) =$ (συνάρτηση του x)
(16) $\arcsin(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	**Αντίστροφες Τριγωνομετρικές συναρτήσεις** $x \in [-1,1]$, $\arcsin(x) \in [\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$,
$\arcsin(f)$	$\frac{1}{\sqrt{1-f^2}}f'$	$\sin(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$, (τύπος Euler)
(17) $\arccos(x)$	$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$x \in [-1,1]$, $\arccos(x) \in [0,\pi]$,
$\arccos(f)$	$\frac{-1}{\sqrt{1-f^2}}f'$	$\cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$, (τύπος Euler)
(18) $\arctan(f)$	$\frac{1}{1-f^2}f'$	$x \in \mathbb{R}$, $\arctan(x) \in (\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$
(19) $\operatorname{arcot}(f)$	$\frac{-1}{1-f^2}f'$	$x \in \mathbb{R}$, $\operatorname{arcot}(x) \in (0,\pi)$
(20) $\sinh(f)$	$f'\cosh(f)$	**Υπερβολικές συναρτήσεις** $\sinh(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$, $x\in\mathbb{R}$
(21) $\cosh(f)$	$f'\sinh(f)$	$\cosh(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$, $x\in\mathbb{R}$
(22) $\tanh(f)$	$\frac{f'}{\cosh^2(f)}$	$\tanh(x) = \frac{sh(x)}{ch(x)} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$, $x \in \mathbb{R}$
(23) $\coth(f)$	$\frac{-f'}{\sinh^2(f)}$	$\coth(x) = \frac{ch(x)}{sh(x)} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$, $x \in \mathbb{R}^*$
(24) $\operatorname{arsinh}(f)$	$\frac{f'}{\sqrt{f^2+1}}$	**Αντίστροφες Υπερβολικές συναρτήσεις** $x\in\mathbb{R}$
(25) $\operatorname{arcosh}(f)$	$\frac{f'}{\sqrt{f^2-1}}$	$x>1$
(26) $\operatorname{artanh}(f)$	$\frac{f'}{1-f^2}$	$x\in(-1,1)$
(27) $\operatorname{arcoth}(f)$	$\frac{-f'}{1-f^2}$	$\frac{1}{x}\in(-1,1)$

III. ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΩΝ (ΑΟΡΙΣΤΩΝ)

Γνωρίζουμε ότι αν F(x) είναι μια παραγωγίσιμη συνάρτηση με παράγωγο $F'(x)=f(x)$, τότε η F(x) απ' την οποία παράγεται η f(x), λέγεται μια παράγουσα της f(x), ενώ υπάρχουν άπειρες παράγουσες της f(x) που διαφέρουν κατά αυθαίρετη σταθερά c, λέγονται συνολικά αόριστο ολοκλήρωμα της f(x) και συμβολίζουμε :

$$\int f(x)dx = F(x)+c, \text{ όταν } F'(x)=f(x).$$

Ας σημειωθεί ότι μεταξύ μιας **συγκεκριμένης** (ορισμένης) παράγουσας F(x) και της $f(x)=F'(x)$, ισχύει :

$$F'(x)=f(x) \text{ και } F(x)=\int f(x)dx,$$

ενώ το πρόβλημα της εύρεσης του αορίστου ολοκληρώματος μιας δοσμένης συνάρτησης f(x), μπαίνει απ' τη σχέση :

$$f(x)=F'(x)=\frac{dF}{dx}, \text{ ή αλλιώς } dF=f(x)dx, \text{ή}$$

ή $\int dF = \int f dx$ ή $F=\int f dx$, που είναι ουσιαστικά μια εξίσωση (διαφορική).

Συμπερασματικά λοιπόν, η διαδικασία εύρεσης της συνάρτησης, της οποίας ξέρουμε την παράγωγό της ή το διαφορικό της λέγεται, λέγεται ολοκλήρωση (το αντίστροφο δηλαδή της διαφόρισης), αποδεικνύεται δε θεωρητικά ότι ισχύουν οι επόμενοι βασικοί τύποι ολοκλήρωσης :

1. ΒΑΣΙΚΟΙ ΤΥΠΟΙ ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗΣ

1) $\int dx = x+c$, **[Διαφορικό και ολοκλήρωμα αναιρούν άλληλα, π.χ.** $\int d\eta\mu x = \eta\mu x$**].**

2) $\int e^x dx = e^x + c$

3) $\int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1}+c$ **όπου** $m \neq -1$, **ενώ για** $m=-1 \rightarrow$ **(4), (και** $\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1}$, $x \in \Re_+$, $a \in \Re - \{1\}$**).**

4) $\int \frac{dx}{x} = ln|x|+c$, **(γενικά :** $\int \frac{f'(x)dx}{f(x)} = ln|f(x)|+c$**).**

5) $\int \sigma\upsilon\nu x dx = \eta\mu x + c$

6) $\int \eta\mu x dx = -\sigma\upsilon\nu x + c$

7) $\int \frac{dx}{\sigma\upsilon\nu^2 x} = \int (1+\varepsilon\varphi^2 x)dx = \varepsilon\varphi x + c$

8) $\int \frac{dx}{\eta\mu^2 x} = \int (1+\sigma\varphi^2 x)dx = -\sigma\varphi x + c$

9) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \tau o\xi\eta\mu x + c$

10) $\int \frac{dx}{1+x^2} = \tau o\xi\varepsilon\varphi x + c$

11) $\int \varepsilon\varphi x dx = -\ln \sigma\upsilon\nu x + c$

12) $\int \sigma\varphi x dx = \ln \eta\mu x + c$

13) $\int a dx = ax + c$

14) $\int shx dx = chx + c$

15) $\int chx dx = shx + c$

16) $\int thx dx = \ln chx$

17) $\int cthx dx = \ln shx$

18) $\int \frac{dx}{sh^2 x} = cthx + c$

19) $\int \frac{dx}{ch^2 x} = thx + c$

20) $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a}$, όπου $x \in (-\infty, +\infty)$ και $a \in \Re_+ - \{1\}$.

21) $\int \frac{f'(x)dx}{\sqrt{f(x)}} = 2\sqrt{f(x)} + c$

22) $\int \frac{dx}{\eta\mu x} = \ln\left|\varepsilon\varphi \frac{x}{2}\right| + c$

23) $\int \frac{dx}{\sigma\upsilon\nu x} = \ln\left|\varepsilon\varphi\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| + c$

24) $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + c$

25) $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \tau o\xi\eta\mu \frac{x}{a} + c$

26) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + \lambda}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 + \lambda}\right| + c$

Ο **Gottfried Wilhelm von Leibniz** γεννήθηκε το 1675. Χρησιμοποίησε για πρώτη φορά το $\int$ και το d σε μια επιστολή όπου εξηγούσε τη διαδικασία της ολοκλήρωσης.

Σημείωση : Όλοι οι παραπάνω στοιχειώδεις τύποι εννοούνται στο κατάλληλο πεδίο ορισμού, όπου δεν αναφέρεται.

2. ΚΑΝΟΝΕΣ ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗΣ

1) Αν δύο συναρτήσεις ή δύο παράγωγοι (ή διαφορικά) είναι ίσες, τότε τα αόριστα ολοκληρώματα - παράγουσές τους μπορούν να διαφέρουν μόνο κατά μια αυθαίρετη σταθερά. Αντίστροφα, για ν' αποδειχτεί ότι 2 συναρτήσεις διαφέρουν κατά μια σταθερά, αρκεί να δειχτεί ότι οι παράγωγοί τους (ή τα διαφορικά τους) είναι ίσες.

2) Διαφορικό και ολοκλήρωμα αλληλοαναιρούνται, δηλαδή :

$$\int df(x) = f(x),$$

όπως επίσης, ολοκλήρωση και παραγώγιση, αλληλοαναιρούνται, δηλαδή :

$$\left(\int f(x)dx\right)' = f(x).$$

3) Στο αόριστο ολοκλήρωμα ισχύει η γραμμικότητα, δηλαδή το ολοκλήρωμα αθροίσματος ισούται με το άθροισμα των ολοκληρωμάτων των προσθετέων :

$$\int \big(g(x) \pm f(x)\big)dx = \int g(x)dx \pm \int f(x)dx.$$

4) Σταθερός παράγοντας A, μπορεί να βγεί εκτός ολοκληρώματος :

$$\int A \cdot f(x)dx = A \cdot \int f(x)dx.$$

5) Στο διαφορικό μπορούμε να προσθαφαιρούμε οποιαδήποτε σταθερά (αφού παράγωγος σταθεράς είναι 0). Μπορούμε επίσης να πολλαπλασιάσουμε το διαφορικό μ' όποια σταθερά, αρκεί ταυτόχρονα να πολλαπλασιάζουμε και το ολοκλήρωμα με την αντίστροφη της σταθεράς, δηλαδή :

$$\int f(x)dx = \frac{1}{\kappa}\int f(x)d(\kappa x \pm \alpha),$$ (όπου κ, α, σταθερές).

6) Αν το διαφορικό είναι ή μπορεί να γίνει ίδιο με τον παρονομαστή της ολοκληρωτέας παράστασης, τότε το ολοκλήρωμα ισούται με τον ln του παροναμαστή,

π.χ. $\int \frac{d(\cos x)}{\cos x} = \ln|\cos x| + c,\quad \int \frac{dx}{2x+3} = \frac{1}{2}\int \frac{d(2x+3)}{2x+3} = \frac{1}{2}\ln|2x+3| + c.$

7) Αν η παράγωγος του παρονομαστή είναι ή μπορεί να γίνει ίση με τον αριθμητή της ολοκληρωτέας παράστασης, τότε το ολοκλήρωμα ισούται με τον ln του παρονομαστή,

π.χ. $\int \frac{\cos x dx}{\sin x} = \ln|\sin x| + c,\quad \int \frac{d(2x-2)dx}{x^2-2x+7} = \ln|x^2-2x+7| + c.$

8) Στα τριγωνομετρικά ολοκληρώματα (αυτά δηλαδή που οι ολοκληρωτέες παραστάσεις περιέχουν τριγωνομετρικές συναρτήσεις), θα πρέπει το διαφορικό να είναι το ίδιο με το τόξο, π.χ.

$$\int \eta\mu(3x)dx = \frac{1}{3}\int \eta\mu(3x)d(3x) = -\frac{1}{3}\sigma\upsilon\nu(3x) + c$$

$$\int \sigma\upsilon\nu(\alpha x+\beta)\,dx = \frac{1}{\alpha}\int \sigma\upsilon\nu(\alpha x+\beta)d(\alpha x+\beta) = \frac{1}{\alpha}\eta\mu(\alpha x+\beta) + c,$$ (α, β = σταθερές).

$$\int \sigma\upsilon\nu\frac{2x}{3}dx = \frac{3}{2}\int \sigma\upsilon\nu\frac{2x}{3}d\left(\frac{2x}{3}\right) = \frac{3}{2}\eta\mu\left(\frac{2x}{3}\right) + c$$

9) Αν η ολοκληρωτέα παράσταση είναι δύναμη του e, πρέπει το διαφορικό να είναι ίσο με τον εκθέτη του e, π.χ.

$$\int e^{3x}dx = \frac{1}{3}\int e^{3x}d(3x) = \frac{1}{3}e^{3x}$$

$$\int e^{-\frac{x}{2}}dx = -2\int e^{-\frac{x}{2}}d\left(-\frac{x}{2}\right) = -2e^{-\frac{x}{2}}.$$

10) Στο διαφορικό μπορεί να μπει οποιαδήποτε παράσταση, αρκεί όμως πρώτα να ολοκληρωθεί.

π.χ. αν έχουμε την παράσταση x^2dx και θέλουμε το x^2 να μπει στο διαφορικό, τότε επειδή $\int x^2dx = \frac{x^3}{3}$, άρα : $x^2dx = d\left(\frac{x^3}{3}\right)$.

Παραδείγματα :

α) $\int\left(e^x + \eta\mu x\right)dx = \int e^x dx + \int \eta\mu x dx = e^x - \sigma\upsilon\nu x + c$.

β) $\int\left(x^3 + 2\right)dx = \int x^3dx + \int 2dx = \frac{x^4}{4} + 2x + c$.

γ) $\int \frac{e^x + e^{-x}}{2}dx = \frac{1}{2}\int e^xdx + \frac{1}{2}\int e^{-x}dx = \frac{1}{2}e^x - \frac{1}{2}\int e^{-x}d(-x) = \frac{1}{2}e^x - \frac{1}{2}e^{-x} + c = \frac{e^x - e^{-x}}{2} + c$.

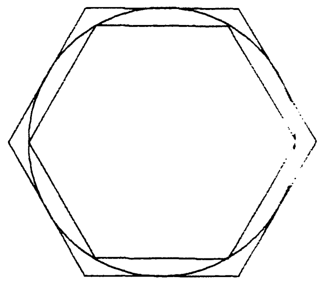
δ) $\int \eta\mu(\omega t + \varphi)dt = -\frac{1}{\omega}\sigma\upsilon\nu(\omega t + \varphi)$.

ε) $\int\left(\alpha x^2 + \beta x + \gamma\right)dx = \frac{1}{3}\alpha x^3 + \frac{1}{2}\beta x^2 + \gamma x$.

ζ) $\int \sqrt{x}dx = \int x^{1/2}dx = \frac{x^{3/2}}{3/2} = \frac{2}{3}\sqrt{x^3}$

η) $\int \frac{dx}{\alpha x + \beta} = \frac{1}{\alpha}\ln(\alpha x + \beta)$.

Ο **Ludolph van Ceulen,** υπολόγισε το π χρησιμοποιώντας μεθόδους του Αρχιμήδη.



θ) $\int \frac{dx}{x^2 + \alpha^2} = \frac{1}{\alpha^2}\int \frac{dx}{1 + \left(\frac{x}{\alpha}\right)^2} = \frac{1}{\alpha^2}\cdot \alpha \cdot \tau o\xi\varepsilon\varphi\left(\frac{x}{\alpha}\right) = \frac{1}{\alpha}\tau o\xi\varepsilon\varphi\left(\frac{x}{\alpha}\right)$.

ι) $\int \frac{dx}{1 + \alpha^2x^2} = \frac{1}{\alpha}\tau o\xi\varepsilon\varphi(\alpha x)$.

κ) $\int \frac{dx}{\alpha^2 + \beta^2x^2} = \frac{1}{\alpha\beta}\tau o\xi\varepsilon\varphi\left(\frac{\beta x}{\alpha}\right)$.

λ) $\int \varepsilon\varphi^2 x dx = \int \frac{1 - \sigma\upsilon\nu^2 x}{\sigma\upsilon\nu^2 x}dx = \int \frac{dx}{\sigma\upsilon\nu^2 x} - \int dx = \varepsilon\varphi x - x$.

Σημείωση : Προφανώς, για επαλήθευση, παραγωγίζοντας τα αποτελέσματα - παράγουσες, θα πρέπει να βρίσκουμε τις ολοκληρωτέες παραστάσεις. Εξάλλου συχνά, χάριν ευκολίας, δεν αναγράφεται η αυθαίρετη σταθερά c, υπονοώντας ότι εμπεριέχεται στο σύμβολο της ολοκλήρωσης.

3. ΜΕΘΟΔΟΙ ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗΣ

Α. **Μέθοδος Αντικατάστασης** (αλλαγή μεταβλητής).

Η μέθοδος στηρίζεται στην αντικατάσταση της μεταβλητής από μια νέα μεταβλητή, τέτοια όμως που να προκύπτει απλούστερη ολοκληρωτέα παράσταση. Γενικός κανόνας δεν υπάρχει. Συνήθως εφαρμόζεται σε ολοκληρώματα, με παρονομαστή, που είναι άθροισμα δύο τετραγώνων, ή που έχουν ριζικά που εξαλείφονται με την αλλαγή της μεταβλητής, κ.λ.π. Η εμπειρία σ' αυτή τη μέθοδο είναι ο καλύτερος σύμβουλος.

Παρατήρηση : Όταν αλλάζουμε μεταβλητή, βρίσκουμε και το παλιό διαφορικό συναρτήσει του νέου.

Σημείωση : Και στη μέθοδο αυτή, αλλά και γενικά, αν η ολοκληρωτέα παράσταση είναι ρητή όπου ο βαθμός του αριθμητή είναι ίσος ή μεγαλύτερος του βαθμού του παρονομαστή, τότε πριν εφαρμόσουμε οποιαδήποτε μέθοδο ολοκλήρωσης, πρώτα διαιρούμε τον αριθμητή διά του παρονομαστή.

Παραδείγματα

1) $\int \frac{dx}{x^2+\alpha^2}$, θέτω $x=\alpha t$, διαφορίζω $dx=\alpha dt$, αντικαθιστώ :

$$\int \frac{\alpha\, dt}{\alpha^2t^2+\alpha^2}=\int\frac{\cancel{\alpha}dt}{\cancel{\alpha^2}(t^2+1)}=\frac{1}{\alpha}\int\frac{dt}{t^2+1}=\frac{1}{\alpha}\text{τοξεφ}t=\frac{1}{\alpha}\text{τοξεφ}\left(\frac{x}{\alpha}\right).$$

2) $\int(\alpha x+\beta)^m dx=$ (για $m\in\Re-\{1\}$), $\left[\text{θέτω : } \alpha x+\beta=t\Rightarrow d(\alpha x+\beta)=dt\Leftrightarrow \alpha dx=dt\Leftrightarrow dx=\frac{dt}{\alpha}\right]$

$$=\int t^m\frac{dt}{\alpha}=\frac{1}{\alpha}\int t^m dt=\frac{1}{\alpha}\cdot\frac{t^{m+1}}{m+1}=\frac{1}{\alpha}\cdot\frac{(\alpha x+\beta)^{m+1}}{m+1}+c.$$

Β. **Μέθοδος Ολοκλήρωσης Ρητών Συναρτήσεων.**

Ως γνωστό, ρητή συνάρτηση f(x) λέμε, το λόγο 2 πολυωνυμικών συναρτήσεων της ίδιας μεταβλητής, δηλαδή της μορφής :

$$f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{\alpha_\nu x^\nu+\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}+\ldots+\alpha_1x+\alpha_0}{\beta_\mu x^\mu+\beta_{\mu-1}x^{\mu-1}+\ldots+\beta_1x+\beta_0},\ \text{με } \alpha_i,\ \beta_i\in\Re \text{ και } \nu,\ \mu\in Z_+.$$

Αποδεικνύεται θεωρητικά, ότι κάθε ρητή συνάρτηση, μπορεί ν' αναλυθεί πάντοτε, ισοδύναμα και κατά μοναδικό τρόπο, σε άθροισμα ρητών συναρτήσεων των εξής 3 μορφών:

i) αx^λ, ii) $\frac{A}{(x-\rho)^\kappa}$, iii) $\frac{Bx+\Gamma}{(x^2+\beta x+\gamma)^\kappa}$, με $\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma<0$.

Έτσι, ο υπολογισμός του αόριστου ολοκληρώματος μιας ρητής συνάρτηση ανάγεται στον υπολογισμό των αόριστων ολοκληρωμάτων των παραπάνω 3 μορφών συναρτήσεων.

Συγκεκριμένα η πρώτη μορφή, αx^λ, υπάρχει μόνον όταν βαθ. $P(x)\geq$ βαθ. $Q(x)$, δηλαδή $\nu\geq\mu$, λέγεται ακέραιο μέρος της f(x) και είναι το πηλίκο π(x), που προκύπτει απ' την εκτέλεση της διαίρεσης $\frac{P(x)}{Q(x)}\equiv\pi(x)+\frac{U(x)}{Q(x)}$, $\left[\begin{matrix}\text{ταυτότητα}\\ \text{της διαίρεσης}\end{matrix}\right]$, είναι δε προφανώς άμεσα ολοκληρώσιμη αφού : $\int \alpha x^\lambda dx=\alpha\frac{x^{\lambda+1}}{\lambda+1}$.

Οι δύο άλλες μορφές (ii) και (iii), προκύπτουν απ' την ανάλυση του $\frac{U(x)}{Q(x)}$ ή αλλιώς απ' την ανάλυση του $\frac{P(x)}{Q(x)}$ όταν είναι βαθ. $P(x)<$ βαθ. $Q(x)$, (δηλαδή $\nu<\mu$, οπότε και λέμε ότι η f(x) βρίσκεται στην κανονική της μορφή), λέγονται απλά κλάσματα της ρητής συνάρτησης και η ολοκλήρωσή τους, όπως και η ακριβής μορφή τους, εξαρτάται απ' το είδος των ριζών του διαιρέτη $Q(x)$.

Συμπερασματικά, προϋποθέτωντας ότι βαθ. $P(x) < $ βαθ. $Q(x)$ (ειδάλλως διαιρούμε $P(x)$ διά $Q(x)$, οπότε $\pi(x) = ax^{\lambda}$, άμεσα ολοκληρώσιμο), μια ρητή συνάρτηση $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, ολοκληρώνεται, αφού πρώτα αναλυθεί σε άθροισμα απλών κλασμάτων των παραπάνω μορφών (ii) και (iii), μια ανάλυση μοναδική, που εξαρτάται απ' το αν οι ρίζες του παρονομαστή $Q(x)$ είναι πραγματικές ή μιγαδικές, απλές ή πολλαπλές.

Η όλη διαδικασία ανάλυσης σε απλά κλάσματα και ολοκλήρωσης μιας ρητής συνάρτησης έχει ως εξής :

Διακρίνουμε 4 περιπτώσεις.

Περίπτωση 1η : [$Q(x)$, ρίζες πραγματικές απλές].

Αν ο παρονομαστής $Q(x)$ έχει ρίζες μόνο πραγματικές απλές, έστω $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_\mu$, οπότε ως γνωστό, $Q(x) = (x-\rho_1)(x-\rho_2)\ldots(x-\rho_\mu)$, τότε η ρητή συνάρτηση $\frac{P(x)}{Q(x)}$ αποδεικνύεται ότι αναλύεται σε απλά κλάσματα (μονοσήμαντα), ως εξής :

$$\boxed{\frac{P(x)}{Q(x)} \equiv \frac{A_1}{x-\rho_1} + \frac{A_2}{x-\rho_2} + \ldots + \frac{A_\mu}{x-\rho_\mu}}, \quad (1)$$

όπου οι σταθερές $A_1, A_2, \ldots, A_\mu$, προσδιορίζονται (μονοσήμαντα) απ' την ιδιότητα, ότι δύο εκ ταυτότητας ίσα πολυώνυμα έχουν τους συντελεστές των ομοιόβαθμων όρων τους, ίσους, (απ' όπου προκύπτει σύστημα μ εξισώσεων με μ αγνώστους, $A_1, \ldots, A_\mu$).

π.χ. $\frac{2x}{(x-1)(x-3)} \equiv \frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2}{x-3}$, $\frac{5x^2-2x+1}{(x+2)(x+5)(x-4)} \equiv \frac{A_1}{x+2} + \frac{A_2}{x+5} + \frac{A_3}{x-4}$.

Τότε η ολοκλήρωση θα είναι του τύπου : $\boxed{\int \frac{A dx}{x-\rho} = A\ln(x-\rho) + c}$ (2).

Παράδειγμα :

Να ολοκληρωθεί, $\int \frac{7x-5}{x^3+x^2+6x}dx$.

Λύση

Κατ' αρχή, είναι βαθ. $P(x) = 1 <$ βαθ. $Q(x) = 3$, ενώ εξάλλου :

$Q(x) = x^3 + x^2 - 6x = x(x^2+x-6) = x(x-2)(x+3)$, δηλαδή έχει ρίζες πραγματικές και απλές, $\rho_1 = 0$, $\rho_2 = 2$, $\rho_3 = -3$. Άρα κατά τον (1), θα έχουμε την ανάλυση :

$$\boxed{\frac{7x-5}{x(x-2)(x+3)} \equiv \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x-2} + \frac{A_3}{x+3}}, \quad (1α), \text{ οπότε :}$$

$$7x-5 \equiv A_1(x-2)(x+3)+A_2(x-3)x+A_3(x-2)x, \quad (1\beta) \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \text{μετά τις πράξεις και} \\ \text{κατατάσοντας ως προς x} \end{bmatrix}$$

$$7x-5 \equiv (A_1+A_2+A_3)x^2+(A_1-3A_2-2A_3)x-6A_1 \Rightarrow \begin{bmatrix} \text{Οι συντελεστές των ομοιόβαθμων} \\ \text{όρων οφείλουν να είναι ίσοι} \end{bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} A_1+A_2+A_3=0 \\ A_1+3A_2-2A_3=7 \\ -6A_1=-5 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} A_1=5/6 \\ A_2=9/10 \\ A_3=-26/15 \end{Bmatrix}$$, (1γ), οπότε αντικαθιστώντας στην (1α), έχουμε :

$$\frac{7x-5}{x(x-2)(x+3)} \equiv \frac{5/6}{x}+\frac{9/10}{x-2}+\frac{-26/15}{x+3} \Rightarrow$$

$$\int\frac{(7x-5)dx}{x(x-2)(x+3)}=\int\left(\frac{5/6}{x}+\frac{9/10}{x-2}+\frac{-26/15}{x+3}\right)dx=$$

$$\frac{5}{6}\int\frac{dx}{x}+\frac{9}{10}\int\frac{dx}{x-2}-\frac{26}{15}\int\frac{dx}{x+3}=\frac{5}{6}\ln x+\frac{9}{10}\ln(x-2)-\frac{26}{15}\ln(x+3)+c.$$

Σημείωση : Οι σταθερές A_1, A_2, A_3, μπορούν ισοδύναμα να βρεθούν ως εξής : παίρνουμε 3 αυθαίρετες τιμές του x και τις αντικαθιστούμε στην(1β), οπότε παίρνουμε πάλι ένα σύστημα 3 εξισώσεων με 3 αγνώστους A_1, A_2, A_3, απ' όπου ξαναβρίσκουμε τις τιμές (1γ). Το ίδιο μπορούμε να κάνουμε και στις επόμενες περιπτώσεις. Στην 1η περίπτωση όμως, η διαδικασία έτσι είναι πιο απλή, αν μάλιστα βάλουμε τιμές του x που να μηδενίζουν τους παρονομαστές των απλών κλασμάτων. Έτσι στο παραπάνω παράδειγμα βάζοντας $x=0$, $x=2$, $x=-3$, παίρνουμε το σύστημα $\begin{Bmatrix} -5=-6A_1 \\ 9=10A_2 \\ -26=15A_3 \end{Bmatrix}$, οπότε άμεσα έχουμε τα A_1, A_2, A_3.

Περίπτωση 2η : [Q(x), ρίζες πραγματικές πολλαπλές].

Αν Q(x) έχει ρίζες πραγματικές πολλαπλές - (εδώ ας σημειωθεί ότι μια απλή πραγματική ρίζα, μπορεί να θεωρηθεί σαν πολλαπλή πολλαπλότητας 1, άρα η 1η περίπτωση περιλαμβάνεται στη 2η), έστω ρ_1 (πολλαπλότητας κ_1) και ρ_2 (πολλαπλότητας κ_2), $\left[Q(x)=(x-\rho_1)^{\kappa_1}\cdot(x-\rho_2)^{\kappa_2}\right]$, τότε η ρητή συνάρτηση, αναλύεται (μονοσήμαντα), ως εξής :

$$\boxed{\frac{P(x)}{Q(x)} \equiv \frac{A_1}{x-\rho_1}+\frac{A_2}{(x-\rho_1)^2}+\ldots+\frac{A_{\kappa_1}}{(x-\rho_1)^{\kappa_1}}+\frac{B_1}{(x-\rho_2)}+\frac{B_2}{(x-\rho_2)^2}+\ldots+\frac{B_{\kappa_2}}{(x-\rho_2)^{\kappa_2}}} \quad (3)$$

Μετά τον προσδιορισμό των σταθερών A_i, B_i, όπως και στην 1η περίπτωση, η ολοκλήρωση των προκυπτόντων απλών κλασμάτων θα είναι του τύπου :

$$\boxed{\int\frac{A dx}{(x-\rho)^{\kappa}}=-\frac{1}{\kappa-1}\frac{A}{(x-\rho)^{\kappa-1}}+c, \quad (\kappa>1)} \quad (4)$$

π.χ. $\frac{3x+5}{(x-3)^2} \equiv \frac{A_1}{x-3}+\frac{A_2}{(x-3)^2}$, $\quad \frac{7x+12}{x^2(x-1)(x+2)^3} \equiv \frac{A_1}{x}+\frac{A_2}{x^2}+\frac{B}{x-1}+\frac{\Gamma_1}{x+2}+\frac{\Gamma_2}{(x+2)^2}+\frac{\Gamma_3}{(x+2)^3}$.

Παράδειγμα : $\int \frac{(x^3+1)dx}{x^4-3x^3+3x^2-x}$.

Λύση

Είναι $Q(x)=x^4-3x^3+3x^2-x=x(x-1)^3$, δηλαδή έχει ρίζες πραγματικές μια απλή $x=0$ και μια τριπλή $x=1$, άρα κατά τον (3) :

$$\frac{x^3+1}{x^4-3x^3-3x^2-x}\equiv\boxed{\frac{x^3+1}{x(x-1)^3}\equiv\frac{A}{x}+\frac{B_1}{x-1}+\frac{B_2}{(x-1)^2}+\frac{B_3}{(x-1)^3}},\quad (3\alpha),\ \text{οπότε :}$$

$$x^3+1\equiv A(x-1)^3+B_1(x-1)^2x-B_2(x-1)x+B_3x \Leftrightarrow$$

$$x^3+1\equiv(A+B_1)x^3+(-3A+B_2-2B_1)x^2+(3A-B_3-B_2+B_1)x-A,$$

απ' όπου εξισώνοντας τους συντελεστές των ομοιόβαθμων όρων του x :

$$\left\{\begin{aligned} A+B_1&=1\\ -3A+B_2-2B_1&=0\\ 3A+B_3-B_2+B_1&=0\\ -A&=1\end{aligned}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{aligned}A&=-1\\ B_1&=2\\ B_2&=1\\ B_3&=2\end{aligned}\right\},\ \text{οπότε : }\int\frac{x^3+1}{x(x-1)^3}dx=\int\left(\frac{-1}{x}+\frac{2}{x-1}+\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{2}{(x-1)^3}\right)dx=$$

$$-\int\frac{dx}{x}+2\int\frac{dx}{x-1}+\int\frac{dx}{(x-1)^2}+2\int\frac{dx}{(x-1)^3}=$$

$$=-\ln x+2\ln(x-1)+\frac{(x-1)^{-1}}{-1}-\cancel{2}\frac{(x-1)^{-2}}{-\cancel{2}}=\ln\frac{(x-1)^2}{x}-\frac{1}{x-1}-\frac{1}{(x-1)^2}+c.$$

Περίπτωση 3η : [Q(x), ρίζες μιγαδικές απλές].

Αν ο παρονομαστής Q(x) έχει ρίζες μιγαδικές απλές, οπότε ο Q(x) αναλυόμενος σε γινόμενο παραγόντων θα περιέχει ένα τουλάχιστον παράγοντα που θάναι 2βάθμιο τριώνυμο $(\alpha x^2+\beta x+\gamma)$, με $\Delta<0$, [χωρίς άρση της γενικότητας θα γράφαμε : $x^2+\beta x+\gamma$] τότε η ανάλυση της ρητής συνάρτησης $\frac{P(x)}{Q(x)}$ σε απλά κλάσματα, θα δίνει για τον παραπάνω 2βάθμιο παράγοντα και απλό κλάσμα του τύπου :

$$\boxed{\frac{Mx+N}{\alpha x^2+\beta x+\gamma},\ \text{με}\ \Delta=\beta^2-4\alpha\gamma<0}\quad (5)$$

π.χ. $\frac{x+2}{(x^2+1)(x^2+x+1)}\equiv\frac{M_1x+N_1}{x^2+1}+\frac{M_2x+N_2}{x^2+x+1}$, $\frac{2x+1}{x(x^2+1)}\equiv\frac{A}{x}+\frac{Mx+N}{x^2+1}$.

Περίπτωση 4η : [Q(x), ρίζες μιγαδικές πολλαπλές].

Αν ο Q(x) έχει ρίζες μιγαδικές πολλαπλές, οπότε ως γνωστό το Q(x) αναλυόμενο σε γινόμενο παραγόντων θα περιέχει β'βάθμιους παράγοντες το τύπου :

$$(\alpha x^2+\beta x+\gamma)^\kappa,\quad \kappa\neq1,\quad \Delta=\beta^2-4\alpha\gamma<0,$$

τότε η ανάλυση της ρητής συνάρτησης $\frac{P(x)}{Q(x)}$, σε απλά κλάσματα θα δίνει για κάθε τέτοιο παράγοντα $(\alpha x^2+\beta x+\gamma)^\kappa$, ένα άθροισμα απλών κλασμάτων του τύπου :

$$\boxed{\frac{M_1x+N_1}{\alpha x^2+\beta x+\gamma}+\frac{M_2x+N_2}{(\alpha x^2+\beta x+\gamma)^2}+\ldots+\frac{M_\kappa x+N_\kappa}{(\alpha x^2+\beta x+\gamma)^\kappa}},\quad (6),\ \Delta=\beta^2-4\alpha\gamma<0$$

π.χ. $\frac{3x+1}{(x^2+2)^2(x^2+1)}\equiv\frac{M_1x+N_1}{x^2+2}+\frac{M_2x+N_2}{(x^2+2)^2}+\frac{Mx+N}{x^2+1}$, $\frac{3x+7}{x(x^2+1)^2}\equiv\frac{A}{x}+\frac{M_1x+N_1}{x^2+1}+\frac{M_2x+N_2}{(x^2+1)^2}$.

Γ. Μέθοδος Ολοκλήρωσης κατά Παράγοντες

Αν f και g, συναρτήσεις του x, ορισμένες και διαφορίσιμες στο ίδιο διάστημα Α, τότε ισχύει :

$\boxed{\int fdg = f \cdot g - \int gdf}$, **(τύπος ολοκλήρωσης κατά παράγοντες).**

Απόδειξη *: Ως γνωστό* $d(f \cdot g) = fdg + gdf$ *ή*

$$fdg = d(f \cdot g) - gdf \overset{\text{ολοκληρ.}}{\Rightarrow} \int fdg = \int d(f \cdot g) - \int gdf \quad ή$$

$$\int fdg = fg - \int gdf \ .$$

Οι συνήθεις μορφές συναρτήσεων που ολοκληρώνονται κατά παράγοντες, είναι :

I) $\int f(x)ημλx dx$, (1)

$\int f(x)συνλx dx$, (2)

$\int f(x)τοξημλx dx$, (3)

$\int f(x)τοξεφλx dx$, (4)

II) $\int e^{κx}συνλx dx$, (5)

$\int e^{κx}ημλx dx$, (6)

III) $\int f(x)e^{κx} dx$, (7)

$\int f(x)\ln φ(x) dx$, (8)

Παρατηρήσεις :

α) Για να εφαρμοστεί ο τύπος κατά παράγοντες, πρέπει προφανώς να έχουμε μία μόνο ολοκληρωτέα συνάρτηση. Αν έχουμε δύο ολοκληρωτέες συναρτήσεις, τότε η μία απ' αυτές μπαίνει στο διαφορικό (αφού βέβαια ολοκληρωθεί). Έτσι, στις παραπάνω μορφές συναρτήσεων, έχουμε :

Στις περιπτώσεις (1), (2), στο διαφορικό μπαίνει το ημλx ή συνλx - στις (3), (4), ή f(x) - στις (5), (6), (7), το $e^{κx}$ - και στην (8) το f(x).

β) Τα ολοκληρώματα της περίπτωσης III, μπορεί να ολοκληρώνονται και με τη μέθοδο αντικατάστασης. Η δυνατότητα αυτή εξετάζεται θέτοντας για το (7), $e^{κx} = t$, και για το (8), $\ln φ(x) = t$.

Παραδείγματα : (Για περισσότερα, βλ. ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ-Ι).

1) $\int$ **xημxdx** =

{*μορφή (1) με f(x) = x και λ = 1, στο διαφορικό μπαίνει το ημx (αφού ολοκληρωθεί),*

$= \int xd(-συνx) = x(-συνx) - \int (-συνx)dx =$

$= -xσυνx + ημx + c.$

2) $\int$ **x²συνdx** $= \int x^2 d(ημx) = x^2ημx - \int ημx d(x^2)$

$= x^2ημx - \int ημx \cdot (2x)dx = x^2ημx - 2\int xημx d(x^2) =$

$= x^2ημx - 2\int xd(-συνx) = x^2ημx - 2\left[x(-συνx) - \int(-συνx)dx\right] =$

$= x^2ημx + 2xσυνx - 2ημx + c.$

Γενικότερο είναι:

$$\int e^{ax} \sin bx\,dx = \frac{e^{ax}(a\sin bx - b\cos bx)}{a^2+b^2}$$

και

$$\int e^{ax} \cos bx\,dx = \frac{e^{ax}(a\cos bx + b\sin bx)}{a^2+b^2}$$

3) $\int e^{2x}ημx dx = \frac{1}{2}\int e^{2x}ημx d(2x) = \frac{1}{2}\int ημx d(e^{2x}) =$

$= \frac{1}{2}\left[e^{2x}ημx - \int e^{2x}d(ημx)\right] = \frac{1}{2}e^{2x}ημx - \frac{1}{2}\int e^{2x}συνx dx =$

$= A - \frac{1}{4}\int e^{2x}συνx d(2x) = A - \frac{1}{4}\int συνx d(e^{2x}) =$

$= A - \frac{1}{4}\left[e^{2x}συνx - \int e^{2x}d(συνx)\right] = A - \underbrace{\frac{1}{4}e^{2x}συνx}_{B} + \frac{1}{4}\int e^{2x}(-ημx)dx =$

$A - B - \frac{1}{4}\underbrace{\int e^{2x}ημx dx}_{Γ}$, το Γ όμως είναι το αρχικό ολοκλήρωμα, οπότε μεταφέροντάς το στο α΄ μέλος έχω :

$\int e^{2x}ημx dx + \frac{1}{4}\int e^{2x}ημx dx = A - B \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{5}{4}\int e^{2x}ημx dx = A - B \Leftrightarrow \int e^{2x}ημx dx = \frac{4}{5}\left(\frac{1}{2}e^{2x}ημx - \frac{1}{4}e^{2x}συνx\right).$

4) $\int \ln x dx = (\ln x)\cdot(x) - \int xd(\ln x) = x\ln x - \int x \cdot \frac{1}{x}dx =$

$= x\ln x - x + c.$

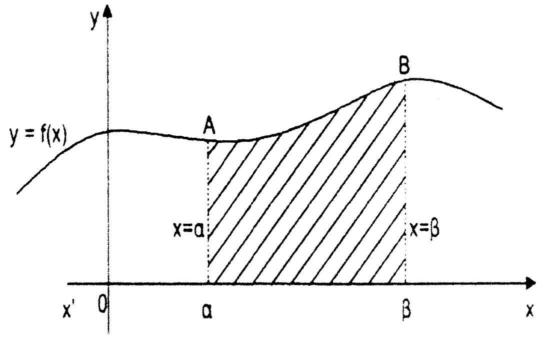
ΟΡΙΣΜΕΝΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ

Ορισμένο ολοκλήρωμα μιας συνάρτησης y = f(x), με όρια τα α και β (α το κατώτερο και β το ανώτερο όριο), ονομάζουμε τον αριθμό :

$$\boxed{\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = F(x)\Big|_{\alpha}^{\beta} = F(\beta) - F(\alpha)}, \quad (1)$$

όπου F(x) είναι το αόριστο ολοκλήρωμα της f(x).

Το ορισμένο ολοκλήρωμα (που είναι αριθμός κι όχι συνάρτηση όπως το αόριστο), εκφράζει το εμβαδόν που περιλαμβάνεται μεταξύ της καμπύλης της f(x), του άξονα των x και των ευθειών x = α και x = b, [θεωρείται εδώ $f(x) \geq 0,\ \forall x \in [\alpha, \beta]$] δηλαδή το $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$ στο διπλανό σχήμα μας δίνει το εμβαδόν, του γραμμοσκιασμένου μεικτόγραμμου χωρίου αΑΒβ, $\left(E_{\alpha AB\beta} = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx\right)$.



ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΟΥ ΟΡΙΣΜΕΝΟΥ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΟΣ

α) $\int_{\alpha}^{\alpha} f(x)dx = 0$

β) $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = -\int_{\beta}^{\alpha} f(x)dx$

γ) $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = \int_{\alpha}^{\gamma} f(x)dx + \int_{\gamma}^{\beta} f(x)dx$,

όπου γ τυχόν σημείο, εντός ή και εκτός του διαστήματος [α, β].

(Γενικότερα ισχύει : $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = \int_{\alpha}^{\gamma_1} f(x)dx + \int_{\gamma_1}^{\gamma_2} f(x)dx + \ldots + \int_{\gamma_\nu}^{\beta} f(x)dx$).

δ) $\int_{\alpha}^{\beta} \kappa \cdot f(x)dx = \kappa \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$, κ = σταθερό.

ε) $\int_{\alpha}^{\beta} [f_1(x) + f_2(x) - f_3(x)]dx = \int_{\alpha}^{\beta} f_1(x)dx + \int_{\alpha}^{\beta} f_2(x)dx - \int_{\alpha}^{\beta} f_3(x)dx$,

(και γενικότερα για ν πεπερασμένους προσθετέους).

2. ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ ΠΟΛΛΩΝ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ

(Μερικές Παράγωγοι, Ολικά Διαφορικά,
Ακρότατα πολυμεταβλητών συναρτήσεων)

1. ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΠΟΛΛΩΝ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ.

Γνωρίζουμε ότι, μονότιμη (ή μονοσήμαντη) πραγματική συνάρτηση f, μιας πραγματικής μεταβλητής x, από το $A \subseteq R$ στο $B \subseteq R$, λέγεται κάθε αντιστοιχία μεταξύ των στοιχείων του $A \neq 0$ και $B \neq 0$, τέτοια ώστε, σε κάθε $x \in A$ να αντιστοιχεί ένα και μοναδικό $y \in B$, συμβολίζουμε δε,

$$f: x \in A \subseteq R \longrightarrow f(x) = y \in B \subseteq R.$$

Αν δε για κάθε τιμή του x, αντιστοιχίζονται περισσότερες από μια τιμές του y, τότε η f λέγεται πολυσήμαντη (ή πλειότιμη ή πολύτιμη), π.χ. $y = \pm 2x$, δίτιμη.

Κατά τον ίδιο ακριβώς τρόπο, μιλάμε για συνάρτηση πολλών μεταβλητών, όπου όμως το σύνολο A, είναι υποσύνολο του $R^{\nu} = R \times R \times \cdots \times R$ (ν φορές) και συμβολίζουμε:

$$\boxed{\mathbf{f: (x_1, x_2, \ldots, x_\nu) \in A \subseteq R^{\nu} \longrightarrow f(x_1, x_2, \ldots, x_\nu) = y \in B \subseteq R}}$$

Έχουμε δηλαδή μια πολυμεταβλητή συνάρτηση από το R^{ν} στο R, όπου αντιστοιχίζουμε κάθε διατεταγμένη ν-άδα $(x_1, x_2, \ldots, x_\nu)$, από το καρτεσιανό γινόμενο (ν φορές) $R \times R \times \cdots \times R \overset{op}{=} R^{\nu}$, σε ένα στοιχείο $y \in R$.

Αν το αντίστοιχο στοιχείο y, κάθε ν-άδας είναι μοναδικό, τότε μιλάμε και εδώ για μονότιμη ή μονοσήμαντη συνάρτηση πολλών μεταβλητών, ειδάλλως μιλάμε για πολυσήμαντη ή πολύτιμη, πολυμεταβλητή συνάρτηση .

Συμπέρασμα:

f: $R \longrightarrow R$ Συνάρτηση μιας πραγματικής μεταβλητής (μονότιμη ή πολύτιμη)

f: $R^{\nu} \longrightarrow R$ Συνάρτηση πολλών (ν) πραγματικών μεταβλητών (μονότιμη ή πολύτιμη)

Σημείωση: Στα επόμενα, θα ασχοληθούμε μόνο με μονότιμες πραγματικές πολυμεταβλητές συναρτήσεις (εκτός όταν δηλώνουμε τούτο διαφορετικά).

Παραδείγματα (πολυμεταβλητών συναρτήσεων):

Η συνάρτηση V, που ορίζει τον όγκο ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου όπου (x_1, x_2, x_3) είναι οι 3 διαστάσεις του (μήκος, πλάτος, ύψος) αντίστοιχα, είναι μια συνάρτηση 3 μεταβλητών, δηλαδή:

$$V: (x_1, x_2, x_3) \in R^3 \overset{\text{op}}{=} R \times R \times R \longrightarrow V(x_1, x_2, x_3) = x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = y \in R.$$

Ανάλογα το εμβαδόν Ε ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου, με διαστάσεις (x_1, x_2), είναι μια συνάρτηση 2 μεταβλητών, δηλαδή:

$$E: (x_1, x_2) \in R^2 = R \times R \longrightarrow E(x_1, x_2) = x_1 \cdot x_2 = y \in R.$$

Παρατηρήσεις:

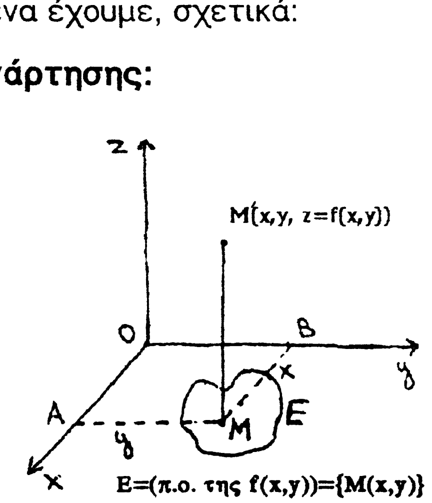
α) Ο συμβολισμός $f = f(x, y, z)$, σημαίνει πως η συνάρτηση f, είναι συνάρτηση τριών ανεξάρτητων μεταβλητών, των x, y, z, ενώ γενικότερα $f = f(x_1, x_2, \ldots, x_v)$, σημαίνει ότι η f είναι συνάρτηση ν ανεξάρτητων μεταβλητών, των $x_1, x_2, \ldots, x_v$.

β) Ας σημειωθεί, ότι και για τις πολυμεταβλητές συναρτήσεις (ή αλλιώς και πολυδιάστατες - functions multidimensional), ορίζονται ανάλογα οι έννοιες που αναφέρονται στις συναρτήσεις μιας μεταβλητής (όπως π.ο., όριο, συνέχεια, κ.λ.π.),, π.χ. το π.ο. της $f = f(x, y) = \sqrt{9 - (x^2 + y^2)}$, πρέπει να πληρεί την $x^2 + y^2 \leq 9$, δηλαδή η f έχει νόημα, όταν οι ανεξάρτητες μεταβλητές της x,y, ικανοποιούν την συνθήκη $x^2 + y^2 \leq 3^2$, οπότε θεωρώντας τις x,y σαν ορθογώνιες καρτεσιανές συντεταγμένες, το π.ο. της συνάρτησης f, θα περικλείεται σε κύκλο κέντρου O(0,0) και ακτίνας 3, περιλαμβανομένων και των σημείων της περιφέρειάς του.

Γεωμετρικά, το π.ο. της $f = f(x, y)$, εκφράζεται από το σύνολο των σημείων του επιπέδου xOy, δηλαδή μια διμεταβλητή συνάρτηση έχει π.ο. κάποιο υποσύνολο, του συνόλου των διατεταγμένων ζευγών (x,y) ή αλλιώς σημεία M(x,y) του R^2, γι' αυτό και λέγεται και "συνάρτηση σημείου". Συγκεκριμένα έχουμε, σχετικά:

γ) **Γεωμετρική παράσταση 2-μεταβλητής συνάρτησης:**

Έστω μια συνάρτηση 2 μεταβλητών, $z = f(x, y)$, με π.ο. την επίπεδη επιφάνεια Ε, στο επίπεδο $(xOy) = R^2$. Αν για κάθε σημείο $M(x, y) \in E \subseteq R^2$, παίρνουμε την κάθετη στο Μ επίπεδο xOy και επί της καθέτου παίρνουμε τμήμα (προσανατολισμένο). $MM' = z = f(x, y)$,



(που είναι η τιμή της συνάρτησης για τις συντεταγμένες x,y, του σημείου M), τότε τα διάφορα (έτσι) σημεία M′ του χώρου R^3, δίνουν το γράφημα (διάγραμμα) της συνάρτησης $z = f(x,y)$, που συνήθως είναι επιφάνεια. Ας σημειωθεί, ότι κάθε κάθετο τμήμα MM′ επί του xOy, δεν μπορεί να συναντά το διάγραμμα, παρά σε ένα μόνο σημείο (μιας και μιλάμε για μονότιμες πολυμεταβλητές συναρτήσεις).

Ανάλογα, όταν έχουμε ν-μεταβλητή συνάρτηση (αν έχουμε 3-μεταβλητή συνάρτηση, το διάγραμμά της, σε ποιάς διάστασης χώρο θα βρίσκεται;).

δ) Όριο (σύγκλιση)-Συνέχεια, πολυμεταβλητής συνάρτησης:

Έστω (χάριν απλότητας) μια 2-μεταβλητή συνάρτηση f(x,y) με π.ο. $E \subseteq R^2$ και $(x_0,y_0) \in E$ ένα σημείο συσσώρευσης (δηλαδή $\forall$ περιοχή $\pi(x_0,y_0)$ υπάρχει ένα τουλάχιστον σημείο (α,β) με $(\alpha,\beta) \in \pi(x_0,y_0)$ και $(\alpha,\beta) \neq (x_0,y_0)$).

Θα λέμε ότι η f έχει όριο τον ℓ, του (x,y) τείνοντας στο (x_0,y_0) όταν,

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0$, τέτοιο ώστε: $\forall (x,y) \in E$ με $0 < |(x,y) - (x_0,y_0)| < \delta(\varepsilon) \Rightarrow$

$\Rightarrow |f(x,y) - \ell| < \varepsilon$ $\qquad \left[\text{δηλαδή } (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 > \delta^2(\varepsilon)\right]$

και γράφουμε:

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = \ell.$$

(Η σχέση $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 > \delta^2(\varepsilon)$, εκφράζει γεωμετρικά, ότι η ακτίνα του κύκλου με κέντρο το σημείο $K(x_0,y_0)$, πρέπει να είναι μικρότερη από την τιμή δ(ε) - που εξαρτάται από την εκλογή του ε).

Επίσης, μια συνάρτηση $f(x,y)/E \subseteq R^2$, ονομάζεται **συνεχής** στο σημείο συσώρευσης $(x_0,y_0) \in E$, αν υπάρχει το $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ και συμπίπτει με τη τιμή $f(x_0,y_0)$, δηλαδή αν ισχύει: $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0,y_0)$.

Έτσι, αν η f είναι συνεχής σε κάθε σ.σ. ενός διαστήματος $I \subseteq E$, λέγεται συνεχής στο I.

Ανάλογα, γενικεύονται τα παραπάνω για ν-μεταβλητή συνάρτηση.

Ας σημειωθεί, ότι μια πολυμεταβλητή συνάρτηση, μπορεί να είναι συνεχής ως προς κάθε μεταβλητή χωριστά, χωρίς αυτό να συνεπάγεται την συνέχειά της ως προς τις μεταβλητές της συνολικά. (Ο αντίθετος ισχυρισμός του Cauchy επί 50 χρονιά, ανατράπηκε από το κλασσικό αντιπαράδειγμα $f(x,y)=\frac{2xy}{x^2+y^2}$, που ενώ είναι συνεχής ως προς x και ως προς y, δεν είναι και ως προς x, y).

π.χ. η $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2-y^2}{1+x^2+y^2}, & \text{αν } x^2+y^2>0\\ 0, & \text{αν } x=y=0\end{cases}$, είναι συνεχής στο σημείο M(0,0), αφού

για $x\to 0$ και $y\to 0$ το όριο της f, ισούται με τη τιμή της f (που είναι 0, για $x=y=0$), δηλαδή $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=f(0,0)=0$, ενώ η συνάρτηση

$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2-y^2}{1+x^2+y^2}, & x^2+y^2>0\\ 1, & \text{αν } x=y=0\end{cases}$ είναι ασυνεχής στο M(0,0), αφού

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0\neq f(0,0)=1$.

1.1. ΜΕΡΙΚΕΣ ΠΑΡΑΓΩΓΟΙ

Ονομάζουμε μερική παράγωγο μιας συνάρτησης $f = f(x,y)$, ως προς την ανεξάρτητη μεταβλητή x, τη παράγωγο της f, θεωρώντας το y σταθερό, δηλαδή

$$\boxed{f'_x(x,y) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x}, (y = \text{σταθερά})}$$

και συμβολίζουμε: $f'_x(x,y)$, ή $\frac{\vartheta f}{\vartheta x}$, ή $\frac{\vartheta f(x,y)}{\vartheta x}$, ή $D_x f(x,y)$.

Ανάλογα, έχουμε και τη μερική παράγωγο της f(x,y) ως προς y, θεωρώντας το x σταθερό, δηλαδή:

$$\boxed{f'_y(x,y) = \frac{\vartheta f}{\vartheta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x,y)}{\Delta y}, (x = \text{σταθερά})}$$

Επίσης ανάλογα, έχουμε για μια τρισδιάστατη συνάρτηση f(x,y,z):

$$\frac{\vartheta f(x,y,z)}{\vartheta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y, z) - f(x,y,z)}{\Delta x}$$, (y και z = σταθερά), και γενικότερα:

$$\frac{\vartheta f(x_1, x_2, \ldots, x_\nu)}{\vartheta x_\kappa} = \lim_{\Delta x_\kappa \to 0} \frac{f(x_1, \ldots, x_\kappa + \Delta x_\kappa, \ldots, x_\nu) - f(x_1, \ldots, x_\nu)}{\Delta x_\kappa}$$

όπου $x_1, \ldots, x_{\kappa-1}, x_{\kappa+1}, \ldots, x_\nu$, σταθερές.

παρατήρηση:

Η έκφραση $\frac{\vartheta f}{\vartheta x}$ πρέπει να θεωρείται σαν απλό σύμβολο μόνο και όχι σαν πηλίκο, ειδάλλως θα οδηγηθούμε σε λάθη, (αντίθετα με το $\frac{df(x)}{dx}$ που μπορεί όπως γνωρίζουμε να θεωρείται σαν πηλίκο).

π.χ. Έστω $u = xy$, οπότε $x = \frac{u}{y}$ και $y = \frac{u}{x}$, τότε:

$$\frac{\vartheta u}{\vartheta x} = y, \quad \frac{\vartheta x}{\vartheta y} = -\frac{u}{y^2}, \quad \frac{\vartheta y}{\vartheta u} = \frac{1}{x}, \text{ από όπου:}$$

$$\frac{\vartheta u}{\vartheta x} \cdot \frac{\vartheta x}{\vartheta y} \cdot \frac{\vartheta y}{\vartheta u} = y \cdot \left(\frac{-u}{y^2}\right) \cdot \frac{1}{x} = \frac{-u}{yx} = \frac{-u}{u} = -1, \text{ και όχι:}$$

$$\frac{\vartheta u}{\vartheta x} \cdot \frac{\vartheta x}{\vartheta y} \cdot \frac{\vartheta y}{\vartheta u} = 1, \text{ (που είναι λάθος).}$$

1.2. ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΜΕΡΙΚΩΝ ΠΑΡΑΓΩΓΩΝ

α) **Οι μερικές παράγωγοι πολυμεταβλητής συνάρτησης, υπολογίζονται με βάση τους γνωστούς κανόνες πραραγώγισης συναρτήσεων μιας μεταβλητής.**

π.χ. Αν $f(x,y,z) = 2x^2 + y^2 - 3z^2 - 3xy - 2xz$, τότε:

$$\frac{\vartheta f}{\vartheta x} = 4x - 3y - 2z,\ \frac{\vartheta f}{\vartheta y} = 2y - 3x,\ \frac{\vartheta f}{\vartheta z} = -6z - 2x,$$

ενώ οι μερικές παράγωγοι της f στο σημείο M(0,0,1), είναι αντίστοιχα:

$f'_x(0{,}0{,}1) = -2$, $f'_y(0{,}0{,}1) = 0$, $f'_z(0{,}0{,}1) = -6$.

Έτσι, είναι φανερό, ότι γενικά θα έχουμε:

$$\left[\frac{\vartheta \mathbf{c}}{\vartheta \mathbf{x}_\kappa} = \mathbf{0},\ \mathbf{c} = \boldsymbol{\sigma\tau\alpha\theta}.\right],\ \left[\frac{\vartheta \mathbf{x}_\kappa}{\vartheta \mathbf{x}_\kappa} = 1\right],\ \left[\frac{\vartheta \mathbf{x}_\kappa}{\vartheta \mathbf{x}_\mu} = 0\right].$$

β) **Κάθε πολυμεταβλητή συνάρτηση μπορεί να έχει και μερικές παραγώγους ανώτερης τάξης**, δηλαδή η $\frac{\vartheta f}{\vartheta x} = f'_x$, να έχει και αυτή μια μερική παράγωγο ως προς x και μια άλλη ως προς y, δηλαδή

$\frac{\vartheta^2 f}{\vartheta x^2} = \left(f'_x\right)'_x = f''_{x^2}$ = (β′ μερική παράγωγος της f(x,y) ως προς x),

$\frac{\vartheta^2 f}{\vartheta y^2} = \left(f'_y\right)'_y = f''_{y^2}$ = (β′ μερική παράγωγος της f(x,y) ως προς y),

όπως επίσης και τις λεγόμενες **μικτές παραγώγους** $\frac{\vartheta^2 f}{\vartheta x \vartheta y} = \left(f'_x\right)'_y = f''_{xy}$ και $\frac{\vartheta^2 f}{\vartheta y \vartheta x} = \left(f'_y\right)'_x = f''_{yx}$, που συνήθως όμως, αποδεικνύεται πως είναι ίσες, δηλαδή

$\boxed{\frac{\vartheta^2 \mathbf{f}}{\vartheta \mathbf{x} \vartheta \mathbf{y}} = \frac{\vartheta^2 \mathbf{f}}{\vartheta \mathbf{y} \vartheta \mathbf{x}}}$ και γενικά $\boxed{\frac{\vartheta^{(\mu+\nu)} \mathbf{f}}{\vartheta \mathbf{x}^\mu \vartheta \mathbf{y}^\nu} = \frac{\vartheta^{(\mu+\nu)} \mathbf{f}}{\vartheta \mathbf{y}^\nu \vartheta \mathbf{x}^\mu}}$ ή $\frac{\vartheta^{(\mu+\nu+\rho)} \mathbf{f}}{\vartheta \mathbf{x}^\mu \vartheta \mathbf{y}^\nu \vartheta \mathbf{z}^\rho} = \frac{\vartheta^{(\mu+\nu+\rho)} \mathbf{f}}{\vartheta \mathbf{y}^\nu \vartheta \mathbf{z}^\rho \vartheta \mathbf{x}^\mu}$, κ.λ.π.

Θεώρημα Schwartz: Αν οι μερικές μικτές παράγωγοι είναι συνεχείς, τότε συμπίπτουν, (η σειρά δηλαδή των παραγωγίσεων δεν έχει σημασία- πράγμα που συνήθως συμβαίνει στην πράξη).

Σχετικά με τους συμβολισμούς έχουμε:

$f'''_{z^2y}(x,y,z) =$ [γ′ μερική παράγωγος της f(x,y,z), 2 φορές ως προς z και 1 φορά ως προς y],

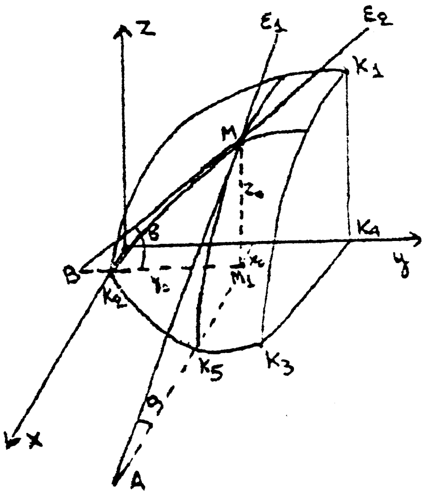
$\dfrac{\vartheta^3 f}{\vartheta x^2 \vartheta y} = \left(f'_y\right)''_{x^2} = f'''_{x^2y} =$ [γ′ μερική παράγωγος της f, 2 φορές ως προς x και 1 φορά ως προς y],

[η σειρά παραγώγισης όπως είπαμε, δεν παίζει ρόλο, εφόσον βέβαια αναφερόμαστε, σε **συνεχείς** συναρτήσεις με **συνεχείς** μερικές παραγώγους.]

γ) Αν μια ν-μεταβλητή συνάρτηση $f(x_1, x_2, \ldots, x_\nu)$, επιδέχεται στο σημείο $M(x_{11}, x_{21}, \ldots, x_{\nu 1})$, **συνεχείς** μερικές παραγώγους, τότε η f, είναι **συνεχής** στο M.

παρατήρηση: Η ύπαρξη των μερικών παραγώγων μιας συνάρτησης σε ένα σημείο, δεν συνεπάγεται ότι και η συνάρτηση θα είναι συνεχής στο σημείο αυτό, (ενώ αντίθετα, όπως ξέρουμε για τις συναρτήσεις μιας μεταβλητής, η ύπαρξη της παραγώγου σε ένα σημείο συνεπάγεται και τη συνέχεια της συνάρτησης σ' αυτό το σημείο).

δ) Γεωμετρική ερμηνεία της μερικής παραγώγου.



Έστω $z = f(x, y)$ μια επιφάνεια με διάγραμμα όπως στο διπλανό σχήμα και $M(x_0, y_0, z_0)$ ένα σημείο της. Το επίπεδο $y = y_0$ (δηλαδή το MM_1A) τέμνει το διάγραμμα της f, κατά τη γραμμή MK_5 με εξίσωση: $z = f(x, y)$ και $y = y_0$. Τότε όμως, σύμφωνα με τη γεωμετρική ερμηνεία της παραγώγου-συνάρτησης μιας μεταβλητής, θα είναι: $\dfrac{\vartheta z}{\vartheta x} = \dfrac{\vartheta f(x_0, y_0)}{\vartheta x} = \varepsilon\varphi\alpha$, όπου α είναι η γωνία που σχηματίζει η εφαπτομένη MA (δηλαδή ε_1) της τομής-καμπύλης γραμμής MK_5 με το άξονα των x, (δηλαδή η γωνία κλίσης α της εφαπτομένης ε_1, στη τομή MK_5, στο σημείο της τομής $M(x_0, y_0, z_0)$).

Όμοια, η μερική παράγωγος της f ως προς y, στο σημείο $M(x_0, y_0, z_0)$ ισούται με τη γωνία κλίσης β της εφαπτομένης ε_2, στη καμπύλη K_2M.

1.3. Παραδείγματα (στις μερικές παραγώγους).

1) Να βρεθούν όλες οι διαφορετικές μερικές παράγωγοι β' τάξης, της $f(x,y) = 3x^2 - 2xy^3$.

Λύση

Αυτές θα είναι: $\dfrac{\vartheta^2 f}{\vartheta x^2},\ \dfrac{\vartheta^2 f}{\vartheta y^2},\ \dfrac{\vartheta^2 f}{\vartheta x \vartheta y} = \dfrac{\vartheta^2 f}{\vartheta y \vartheta x}$,

δηλαδή: $\dfrac{\vartheta^2 f}{\vartheta x^2} = \dfrac{\vartheta}{\vartheta x}\left(\dfrac{\vartheta f}{\vartheta x}\right) = \dfrac{\vartheta}{\vartheta x}\left(6x - 2y^3\right) = 6$,

[Οι συναρτήσεις που ασχολούμαστε θεωρούνται κατά κανόνα, ότι έχουν μικτές παραγώγους ίσες (ότι πληρούν δηλαδή τις συνθήκες του θεωρήματος Schwartz).]

$$\frac{\vartheta^2 f}{\vartheta y^2} = \frac{\vartheta}{\vartheta y}\left(\frac{\vartheta\left(3x^2 - 2xy^3\right)}{\vartheta y}\right) = \frac{\vartheta}{\vartheta y}\left(-6xy^2\right) = -12xy,$$

$$\frac{\vartheta^2 f}{\vartheta x \vartheta y} = \frac{\vartheta}{\vartheta y}\left(\frac{\vartheta\left(3x^2 - 2xy^3\right)}{\vartheta x}\right) = \frac{\vartheta}{\vartheta y}\left(6x - 2y^3\right) = -6y^2 = \frac{\vartheta^2 f}{\vartheta y \vartheta x}.$$

2) Να βρεθούν οι μερικές παράγωγοι α' τάξης, της $f(x,y) = \text{τοξεφ}\,\dfrac{y}{x}$, *στο σημείο (1,2).*

Λύση

$$\frac{\vartheta f}{\vartheta x} = \frac{\vartheta\left(\text{τοξεφ}\,\frac{y}{x}\right)}{\vartheta x} = \frac{\frac{-y}{x^2}}{1 + \frac{y^2}{x^2}} = -\frac{y}{x^2 + y^2} \Longrightarrow \frac{\vartheta f(1,2)}{\vartheta x} = -\frac{2}{5} \text{ και}$$

$$\frac{\vartheta f}{\vartheta y} = \frac{\vartheta\left(\text{τοξεφ}\,\frac{y}{x}\right)}{\vartheta y} = \frac{\frac{1}{x}}{1 + \frac{y^2}{x^2}} = \frac{x}{x^2 + y^2} \Longrightarrow \frac{\vartheta f(1,2)}{\vartheta y} = \frac{1}{5}.$$

Υπενθυμίζεται ότι:

$(\text{τοξεφ}(f))' = (\arctan(f))' = \dfrac{f'}{1+f^2}$

$(\arcsin(f))' = \dfrac{f'}{\sqrt{1-f^2}}$,

$(\arccos(f))' = \dfrac{-f'}{\sqrt{1-f^2}}$

$(\sinh(f))' = (\cosh(f))\cdot f'$

$(\cosh(f))' = (\sinh(f))\cdot f'$

$(\ln(f))' = \dfrac{f'}{f}$

3) Να δειχθεί ότι οι συναρτήσεις: Ι) $\varphi = x^3 - 3xy^2$ και ΙΙ) $\varphi = \sigma\upsilon\nu(\lambda x)\cdot ch(\lambda y)$, ικανοποιούν και οι δύο την εξίσωση: $\frac{\vartheta^2\varphi}{\vartheta x^2} + \frac{\vartheta^2\varphi}{\vartheta y^2} = 0$, (1).

Λύση

(Η (1) λέγεται εξίσωση του Laplace, και αν μια συνάρτηση φ ικανοποιεί την (1), τότε η φ λέγεται αρμονική). Είναι:

i) $$\frac{\vartheta^2\varphi}{\vartheta x^2} = \frac{\vartheta}{\vartheta x}\left(\frac{\vartheta\left(x^3 - 3xy^2\right)}{\vartheta x}\right) = \frac{\vartheta}{\vartheta x}\left(3x^2 - 3y^2\right) = 6x \text{ και}$$

$$\frac{\vartheta^2\varphi}{\vartheta y^2} = \frac{\vartheta}{\vartheta y}\left(\frac{\vartheta\left(x^3 - 3xy^2\right)}{\vartheta y}\right) = \frac{\vartheta}{\vartheta y}(-6xy) = -6x$$

Οπότε η (1) δίνει: $6x + (-6x) = 0$, δηλαδή ικανοποιείται.

ii) $$\frac{\vartheta^2\varphi}{\vartheta x^2} = \frac{\vartheta}{\vartheta x}\left(\frac{\vartheta(\sigma\upsilon\nu(\lambda x)\cdot ch(\lambda y))}{\vartheta x}\right) = \frac{\vartheta}{\vartheta x}(-\lambda\eta\mu(\lambda x)\cdot ch(\lambda y)) = -\lambda^2\sigma\upsilon\nu(\lambda x)\cdot ch(\lambda y),$$

$$\frac{\vartheta^2\varphi}{\vartheta y^2} = \frac{\vartheta}{\vartheta y}\left(\frac{\vartheta(\sigma\upsilon\nu(\lambda x)\cdot ch(\lambda y))}{\vartheta y}\right) = \frac{\vartheta}{\vartheta y}(\lambda\sigma\upsilon\nu(\lambda x)\cdot ch(\lambda y)) = \lambda^2\sigma\upsilon\nu(\lambda x)\cdot ch(\lambda y),$$

οπότε και πάλι η (1) ικανοποιείται.

4) Να δειχθεί ότι η συνάρτηση $z = \frac{x}{2}\ell n\left(x^2 + y^2\right) - y\tau o\xi\varepsilon\varphi\frac{y}{x}$ είναι αρμονική, (αρμονική λέγεται η f(x,y), όταν επαληθεύει την εξίσωση του Laplace: $\frac{\vartheta^2\varphi}{\vartheta x^2} + \frac{\vartheta^2\varphi}{\vartheta y^2} = 0$. Όμοια η f(x,y,z), όταν $\frac{\vartheta^2\varphi}{\vartheta x^2} + \frac{\vartheta^2\varphi}{\vartheta y^2} + \frac{\vartheta^2\varphi}{\vartheta z^2} = 0$).

Λύση

Άρα θα πρέπει: $\frac{\vartheta^2\varphi}{\vartheta x^2} + \frac{\vartheta^2\varphi}{\vartheta y^2} = 0$, (1). Βρίσκουμε διαδοχικά:

$$\frac{\vartheta z}{\vartheta x} = \frac{1}{2}\ell n\left(x^2 + y^2\right) + 1,\quad \frac{\vartheta^2 z}{\vartheta x^2} = \frac{x}{x^2 + y^2},\quad \frac{\vartheta z}{\vartheta y} = -\tau o\xi\varepsilon\varphi\frac{y}{x},\quad \frac{\vartheta^2 z}{\vartheta y^2} = \frac{-x}{x^2 + y^2}, \text{ και}$$

αντικαθιστώντας στην (1), διαπιστώνουμε ότι την ικανοποιούν.

5) Επίσης, ότι είναι αρμονική η συνάρτηση $f(x,y,z) = e^{\alpha x+\beta y}\cdot \eta\mu(\gamma z)$, (με $\alpha^2+\beta^2=\gamma^2$).

Λύση

Βρίσκουμε: $\dfrac{\vartheta f}{\vartheta x} = \alpha e^{\alpha x+\beta y}\cdot \eta\mu(\gamma z)$, $\dfrac{\vartheta^2 f}{\vartheta x^2} = \dfrac{\vartheta}{\vartheta x}\left(\alpha e^{\alpha x+\beta y}\cdot \eta\mu(\gamma z)\right) = \boldsymbol{\alpha^2 e^{\alpha x+\beta y}}\cdot \eta\mu(\gamma \mathbf{z})$,

$$\frac{\vartheta f}{\vartheta y} = \beta e^{\alpha x+\beta y}\cdot \eta\mu(\gamma z),\quad \frac{\vartheta^2 f}{\vartheta y^2} = \frac{\vartheta}{\vartheta y}\left(\frac{\vartheta f}{\vartheta y}\right) = \frac{\vartheta}{\vartheta y}\left(\beta e^{\alpha x+\beta y}\cdot \eta\mu(\gamma z)\right) = \boldsymbol{\beta^2 e^{\alpha x+\beta y}}\cdot \eta\mu(\gamma \mathbf{z}),$$

$$\frac{\vartheta f}{\vartheta z} = \gamma e^{\alpha x+\beta y}\cdot \sigma\upsilon\nu(\gamma z),\quad \frac{\vartheta^2 f}{\vartheta z^2} = \boldsymbol{-\gamma^2 e^{\alpha x+\beta y}}\cdot \eta\mu(\gamma \mathbf{z}).$$

Αντικαθιστούμε στην εξίσωση του Laplace (για 3-μεταβλητή συνάρτηση):

$$\frac{\vartheta^2\varphi}{\vartheta x^2}+\frac{\vartheta^2\varphi}{\vartheta y^2}+\frac{\vartheta^2\varphi}{\vartheta z^2} = \alpha^2 e^{\alpha x+\beta y}\cdot \eta\mu(\gamma z)+\beta^2 e^{\alpha x-\beta y}\cdot \eta\mu(\gamma z)-\gamma^2 e^{\alpha x-\beta y}\cdot \eta\mu(\gamma z) =$$

$$= e^{\alpha x+\beta y}\cdot \eta\mu(\gamma z)\cdot \underbrace{\left(\alpha^2+\beta^2-\gamma^2\right)}_{0} = 0.$$

1.4. ΕΝΝΟΙΕΣ ΣΧΕΤΙΚΕΣ ΜΕ ΤΗ ΜΕΡΙΚΗ ΠΑΡΑΓΩΓΟ.

1) Ολική και μερική αύξηση πολυμεταβλητής συνάρτησης:

Έστω η συνάρτηση f(x,y,z) και x_0, y_0, z_0, τυχαίες τιμές των ανεξάρτητων μεταβλητών x,y,z. Αν Δx, Δy, Δz, κάποιες αυξήσεις των x,y,z αντίστοιχα, τότε η συνάρτηση f δέχεται μια **ολική αύξηση**:

$$\Delta f(x,y,z) = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y, z_0 + \Delta z) - f(x_0, y_0, z_0).$$

Αν θεωρήσουμε πως οι αυξήσεις Δy, Δz, των ανεξάρτητων μεταβλητών y και z, είναι μηδέν, (δηλαδή οι y και z είναι σταθερές), τότε η συνάρτηση f(x,y,z) δέχεται μια **μερική**, λέμε, **αύξηση**, δηλαδή

$$\Delta x f(x,y,z) = f(x_0 + \Delta x, y_0, z_0) - f(x_0, y_0, z_0),$$

και με ανάλογο τρόπο, οι άλλες μερικές αυξήσεις, θα είναι:

$$\Delta y f(x,y,z) = f(x_0, y_0 + \Delta y, z_0) - f(x_0, y_0, z_0),$$

$$\Delta z f(x,y,z) = f(x_0, y_0, z_0 + \Delta z) - f(x_0, y_0, z_0).$$

π.χ. Αν $f(x,y,z) = 2x^2 - y^2 - z$, τότε για οποιαδήποτε τιμή των x,y,z, έχουμε:

(ολική αύξηση) $= \Delta f(x,y,z) = f(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z) - f(x,y,z) =$

$$= \left[2(x+\Delta x)^2 - (y+\Delta y)^2 - (z+\Delta z)\right] - \left[2x^2 - y^2 - z\right] = \cdots = 4x\Delta x - 2y\Delta y - \Delta z + 2\Delta x^2 - \Delta y^2$$

ενώ οι **μερικές αυξήσεις** βρίσκονται κατά σειρά ότι είναι:

$\Delta x f(x,y,z) = 4x\Delta x + 2\Delta x^2$, $\Delta y f(x,y,z) = -2y\Delta y - \Delta y^2$, $\Delta z f(x,y,z) = -\Delta z$.

Έτσι, σύμφωνα με τα παραπάνω, ορίζουμε σαν **μερική παράγωγο** της συνάρτησης f(x,y,z), ως προς x, το όριο του λόγου που έχει αριθμητή την μερική αύξηση της f ως προς x και παρονομαστή το Δx, όταν $\Delta x \to 0$, δηλαδή:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y, z) - f(x,y,z)}{\Delta x} \overset{\text{ορ}}{=} \frac{\vartheta f}{\vartheta x} = f'_x(x,y,z), \text{ με y, z σταθερές.}$$

Ανάλογα, ορίσαμε και τις μερικές παραγώγους ως προς y και z.

2) Μερικό διαφορικό:

Ονομάζουμε μερικό διαφορικό της f(x,y,z) ως προς x, το διαφορικό της f υποθέτοντας ότι τα ποσά y και z δεν μεταβάλλονται (δηλαδή $\Delta y = \Delta z = 0$). Με αυτή την υπόθεση το x είναι η μοναδική μεταβλητή της f, οπότε:

$\boxed{d_x f = \frac{\vartheta f}{\vartheta x} dx}$ και ανάλογα $d_y f = \frac{\vartheta f}{\vartheta y} dy$, $d_z f = \frac{\vartheta f}{\vartheta z} dz$.

π.χ. Τα μερικά διαφορικά της 2-μεταβλητής συνάρτησης $f(x, y) = x^2 y + xy^2$, είναι:

$$d_x f(x, y) = \frac{\vartheta f(x, y)}{\vartheta x} dx = \left(2yx + y^2\right) dx,$$

$$d_y f(x, y) = \frac{\vartheta f(x, y)}{\vartheta y} dy = \left(x^2 + 2xy\right) dy.$$

παρατήρηση: Η μερική παράγωγος $f_x'(x, y, z)$ ισούται με το πηλίκο του μερικού διαφορικού $d_x f$ προς το διαφορικό dx, δηλαδή $f_x'(x, y, z) = \frac{d_x f(x, y, z)}{dx}$.

Όμως στον συμβολισμό $\frac{\vartheta f}{\vartheta x}$, δεν πρέπει να παίρνουμε το σύμβολο ϑf σαν το λόγο του μερικού διαφορικού $d_x f$ ως προς x, γιατί στον συμβολισμό $\frac{\vartheta f}{\vartheta y}$ το ίδιο σύμβολο ϑf θα έπρεπε να το πάρουμε σαν το μερικό διαφορικό $d_y f$ και στον $\frac{\vartheta f}{\vartheta z}$ σαν το $d_z f$.

Έτσι λοιπόν, η έκφραση $\frac{\vartheta f}{\vartheta x}$ θα θεωρείται σαν απλό σύμβολο και όχι σαν πηλίκο.

π.χ. $\frac{\vartheta u}{\vartheta x} \cdot \frac{\vartheta x}{\vartheta y} \cdot \frac{\vartheta y}{\vartheta u}$, δεν σημαίνει ότι ισούται με 1.

1.5. ΟΛΙΚΟ ΔΙΑΦΟΡΙΚΟ.

Ολικό διαφορικό μιας συνάρτησης **f(x,y)**, λέμε το άθροισμα των μερικών διαφορικών της, δηλαδή:

$$\boxed{\mathbf{df(x,y)} = \frac{\vartheta \mathbf{f}}{\vartheta \mathbf{x}}\mathbf{dx} + \frac{\vartheta \mathbf{f}}{\vartheta \mathbf{y}}\mathbf{dy}} \quad (1)$$

Ανάλογα για μια συνάρτηση **f(x,y,z)**, το ολικό διαφορικό της είναι:

$$df(x,y,z) = \frac{\vartheta f}{\vartheta x}dx + \frac{\vartheta f}{\vartheta y}dy + \frac{\vartheta f}{\vartheta z}dz = d_x f + d_y f + d_z f.$$

Με άλλα λόγια, το ολικό διαφορικό $df(x,y,z)$ μας δίνει κατά προσέγγιση, τη μεταβολή της συνάρτησης f(x,y,z) μεταξύ των σημείων M(x,y,z) και $M'(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z)$.

π.χ. Αν $f(x,y,z) = 2x^2 - y^2 - z$, τότε:

$$df(x,y,z) = d(2x^2 - y^2 - z) = \frac{\vartheta f}{\vartheta x}dx + \frac{\vartheta f}{\vartheta y}dy + \frac{\vartheta f}{\vartheta z}dz = 4xdx - 2ydy - dz,$$

αφού $\frac{\vartheta f}{\vartheta x} = 4x$, $\frac{\vartheta f}{\vartheta y} = -2y$ και $\frac{\vartheta f}{\vartheta z} = -1$.

παρατηρήσεις:

α) Αν η συνάρτηση f είναι μιας μεταβλητής, τότε το ολικό διαφορικό της συμπίπτει με το συνηθισμένο διαφορικό και η μοναδική μερική παράγωγός της είναι η συνήθης παράγωγος.

β) Μια πολυμεταβλητή συνάρτηση, π.χ. f(x,y,z), λέγεται **διαφορίσιμη** στο σημείο M_0, όταν υπάρχει το ολικό διαφορικό της f στο σημείο αυτό, ενώ κατά επέκταση λέγεται διαφορίσιμη σε ένα διάστημα Α, όταν είναι διαφορίσιμη σε κάθε σημείο του Α.

Μια διαφορίσιμη συνάρτηση έχει πάντα πεπερασμένες μερικές παραγώγους και τα αντίστοιχα μερικά διαφορικά, ενώ το αντίστροφο δεν ισχύει πάντα, δηλαδή αν υπάρχουν τα μερικά διαφορικά (ή οι πεπερασμένες μερικές παράγωγοι), αυτό δεν εξασφαλίζει την ύπαρξη του ολικού διαφορικού.

γ) Κατά κανόνα, οι συνηθισμένες συναρτήσεις με τις οποίες ασχολούμαστε είναι διαφορίσιμες.

δ) <u>**πρόταση Ι:**</u>

Έστω η συνάρτηση f(x,y), ορισμένη στο ανοιχτό υποσύνολο U του R^2. Ισχύει:

$[df(x,y)=0] \Leftrightarrow [f(x,y)$ σταθερή στο $U]$, (1), δηλαδή αν το ολικό διαφορικό μιας συνάρτησης f είναι O, τότε η f είναι σταθερή και αντίστροφα $\left(\forall(x,y)\in U\subseteq R^2\right)$.

Απόδειξη: αν f(x,y) σταθερή, σημαίνει πως οι μερικές της παράγωγοι $\frac{\vartheta f}{\vartheta x}$ και $\frac{\vartheta f}{\vartheta y}$, θα είναι μηδέν, οπότε και το διαφορικό $\mathbf{df}=\frac{\vartheta \mathbf{f}}{\vartheta \mathbf{x}}\mathbf{dx}+\frac{\vartheta \mathbf{f}}{\vartheta \mathbf{y}}\mathbf{dy}=\mathbf{0}$.

Αντίστροφα, αν $df=0,\ \forall(x,y)\in U \Rightarrow \frac{\vartheta f}{\vartheta x}dx+\frac{\vartheta f}{\vartheta y}dy=0,\ \forall(x,y)\in U$ (1α), οπότε (κατά τον ορισμό της μερικής παραγώγου), θεωρώντας y=σταθερό και x=μεταβλητό, θα έχουμε $dy=0$ και $dx\neq 0$, άρα $(1\alpha)\Leftrightarrow \frac{\vartheta f}{\vartheta x}dx=0 \Leftrightarrow \frac{\vartheta f}{\vartheta x}=0$, που σημαίνει πως η f είναι ανεξάρτητη του x, δηλαδή f σταθερή ως προς x.

Όμοια, για x=σταθερό και y=μεταβλητό, θα έχουμε $dx=0$ και $dy\neq 0$, άρα $\frac{\vartheta f}{\vartheta y}dy=0 \Leftrightarrow \frac{\vartheta f}{\vartheta y}=0$, άρα f ανεξάρτητη και ως προς y, δηλαδή f σταθερή και ως προς y. Άρα f, τελικά σταθερή $\forall(x,y)\in U\subseteq R^2$.

Γενικά ισχύει: $[df(x_1,x_2,\ldots,x_v)=0]\Leftrightarrow[f(x_1,x_2,\ldots,x_v)$ σταθερή συνάρτηση $]$.

<u>**πρόταση II:**</u>

Έστω η διαφορική έκφραση $P(x,y)dx+Q(x,y)dy=A$, με $P(x,y)$ και $Q(x,y)$ συνεχείς συναρτήσεις $\forall(x,y)\in U\subseteq R^2$. Αν η A είναι το (ολικό) διαφορικό μιας συνάρτησης $f(x,y)/U$, τότε θα ισχύει:

$$\mathbf{P(x,y)=\frac{\vartheta f(x,y)}{\vartheta x}\ \text{και}\ Q(x,y)=\frac{\vartheta f(x,y)}{\vartheta y},\ \forall(x,y)\in U.}$$

Απόδειξη: αν η A είναι το διαφορικό κάποιας συνάρτησης $f(x,y)/U$, τότε θα έχουμε:

$$A=df \Leftrightarrow P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\frac{\vartheta f}{\vartheta x}dx+\frac{\vartheta f}{\vartheta y}dy \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow\left(\frac{\vartheta f}{\vartheta x}-P\right)dx+\left(\frac{\vartheta f}{\vartheta y}-Q\right)dy=0$, οπότε αν x=μεταβλητό και y=σταθερό (δηλαδή $dx\neq 0$ και $dy=0$) τότε προφανώς $\frac{\vartheta f}{\vartheta x}-P=0$, δηλαδή $P(x,y)=\frac{\vartheta f(x,y)}{\vartheta x}$.

Όμοια συμπεραίνουμε $Q(x,y)=\dfrac{\vartheta f(x,y)}{\vartheta y}$.

Γενικά ισχύει: Αν η διαφορική έκφραση $\varphi_1 dx_1+\cdots+\varphi_\nu dx_\nu$, με $\varphi_1,\ldots,\varphi_\nu$, συνεχείς συναρτήσεις στο $U\subseteq R^\nu$, είναι το διαφορικό μιας συνάρτησης $f(x_1,\ldots,x_\nu)/U$, τότε,

$$\varphi_1(x_1,\ldots,x_\nu)=\frac{\vartheta f(x_1,\ldots,x_\nu)}{\vartheta x_1},\ldots,\varphi_\nu(x_1,\ldots,x_\nu)=\frac{\vartheta f(x_1,\ldots,x_\nu)}{\vartheta x_\nu}.$$

<u>Ορισμός</u>: Αν $[P(x,y)dx+Q(x,y)dy]$, με P(x,y) και Q(x,y) συνεχείς συναρτήσεις $\forall(x,y)\in U\subseteq R^2$, είναι το (ολικό) διαφορικό μιας συνάρτησης f/U, τότε η διαφορική έκφραση $P(x,y)dx+Q(x,y)dy$, λέγεται τέλειο ή πλήρες διαφορικό. (Ο ορισμός γενικεύεται για ν-μεταβλητή διαφορική έκφραση).

<u>πρόταση III</u>:

Αν υπάρχουν οι μερικές παράγωγοι $\dfrac{\vartheta P}{\vartheta y}$ και $\dfrac{\vartheta Q}{\vartheta x}$, είναι συνεχείς και η διαφορική έκφραση $P(x,y)dx+Q(x,y)dy$ είναι τέλειο διαφορικό, $\forall(x,y)\in U$, τότε θα ισχύει: $\dfrac{\vartheta P}{\vartheta y}=\dfrac{\vartheta Q}{\vartheta x}$ (και αντίστροφα, δηλαδή, αν $\dfrac{\vartheta P(x,y)}{\vartheta y}=\dfrac{\vartheta Q(x,y)}{\vartheta x}$ με P, Q, $\dfrac{\vartheta P}{\vartheta y}$, $\dfrac{\vartheta Q}{\vartheta x}$, συνεχείς $\forall(x,y)\in U\subseteq R^2$, τότε υπάρχουν συναρτήσεις f(x,y), τέτοιες ώστε: $\dfrac{\vartheta f}{\vartheta x}=P$ και $\dfrac{\vartheta f}{\vartheta y}=Q$).

[Ανάλογα για την: $P(x,y,z)dx+Q(x,y,z)dy+T(x,y,z)dz$, όταν ισχύει:

$$\left\{\frac{\vartheta P}{\vartheta y}=\frac{\vartheta Q}{\vartheta x},\ \frac{\vartheta P}{\vartheta z}=\frac{\vartheta T}{\vartheta x},\ \frac{\vartheta Q}{\vartheta z}=\frac{\vartheta T}{\vartheta y}\right\}.$$

]

Απόδειξη: Εφόσον η διαφορική έκφραση είναι τέλειο διαφορικό θα υπάρχει συνάρτηση f(x,y)/U, τέτοια ώστε: $P(x,y)=\dfrac{\vartheta f}{\vartheta x}$ και $Q(x,y)=\dfrac{\vartheta f}{\vartheta y}$.

Οπότε, $\dfrac{\vartheta P}{\vartheta y}=\dfrac{\vartheta^2 f}{\vartheta x\vartheta y}$ και $\dfrac{\vartheta Q}{\vartheta x}=\dfrac{\vartheta^2 f}{\vartheta y\vartheta x}$ και λόγω της συνέχειας των μερικών παραγώγων $\dfrac{\vartheta P}{\vartheta x}$, $\dfrac{\vartheta Q}{\vartheta y}$, έπεται ότι $\dfrac{\vartheta^2 f}{\vartheta x\vartheta y}=\dfrac{\vartheta^2 f}{\vartheta y\vartheta x}$. Άρα $\dfrac{\vartheta P(x,y)}{\vartheta y}=\dfrac{\vartheta Q(x,y)}{\vartheta x}$, $\forall(x,y)\in U$ (ευθύ).

1.6. Κανόνες διαφόρισης πολυμεταβλητών συναρτήσεων.

Οι κανόνες διαφόρισης πολυμεταβλητών συναρτήσεων, είναι όμοιοι με τους κανόνες διαφόρισης συναρτήσεων μιας μεταβλητής.

Έτσι, αν f και φ, 2 συναρτήσεις οσωνδήποτε μεταβλητών, θα έχουμε:

α) $d(f+\varphi) = df + d\varphi$, **β)** $d(\kappa f) = \kappa df$, **κ=σταθερό**

γ) $d(f\cdot\varphi) = \varphi df + f d\varphi$, **δ)** $d\left(\frac{f}{\varphi}\right) = \frac{\varphi df - f d\varphi}{\varphi^2}$

ε) Το ολικό διαφορικό $2^{ης}$ τάξης $d^2f(x,y)$, είναι:

$$\boxed{d^2f(x,y) = \left(\frac{\vartheta}{\vartheta x}dx + \frac{\vartheta}{\vartheta y}dy\right)^2 f = \frac{\vartheta^2 f}{\vartheta x^2}dx^2 + 2\frac{\vartheta^2 f}{\vartheta x \vartheta y}dxdy + \frac{\vartheta^2 f}{\vartheta y^2}dy^2},$$

με τη συμφωνία $\frac{\vartheta^2 f}{\vartheta x^2}$ να είναι απλό σύμβολο και να παριστάνει την $2^{ης}$ τάξης μερική παράγωγο της f ως προς x, κ.λ.π.

παρατήρηση:

Οι εκφράσεις των διαφορικών γίνονται όλο και πιο σύνθετες με την αύξηση της τάξης τους. Για την απλούστευσή τους κάνουμε τον παρακάτω συμβατικό συμβολισμό του ολικού διαφορικού κ τάξης, της συνάρτησης f(x,y):

$$d^\kappa f(x,y) = \left(\frac{\vartheta}{\vartheta x}dx + \frac{\vartheta}{\vartheta y}dy\right)^\kappa f, \text{ με την εξής έννοια:}$$

κατ' αρχή, "υψώνουμε στη κ δύναμη" το διώνυμο $\left(\frac{\vartheta}{\vartheta x}dx + \frac{\vartheta}{\vartheta y}dy\right)$, θεωρώντας τα σύμβολα ϑx, ϑy και ϑ, σαν ανεξάρτητα αλγεβρικά μεγέθη. Έπειτα "ανοίγουμε τις παρενθέσεις", βάζοντας σε κάθε σύμβολο ϑ^κ τον παράγοντα f. Μετά από αυτό, κάθε σύμβολο παίρνει την πραγματική του έννοια.

π.χ. Η γραφή $d^3f(x,y) = \left(\frac{\vartheta}{\vartheta x}dx + \frac{\vartheta}{\vartheta y}dy\right)^3 f$, σημαίνει:

"υψώνοντας στον κύβο" παίρνουμε,

$$\left(\frac{\vartheta^3}{\vartheta x^3}dx^3 + 3\frac{\vartheta^3}{\vartheta x^2 \vartheta y}dx^2dy + 3\frac{\vartheta^3}{\vartheta x \vartheta y^2}dxdy^2 + \frac{\vartheta^3}{\vartheta y^3}dy^3\right)f,$$

και "ανοίγοντας τις παρενθέσεις" βρίσκουμε,

$$d^3f(x,y) = \frac{\vartheta^3 f}{\vartheta x^3}dx^3 + 3\frac{\vartheta^3 f}{\vartheta x^2 \vartheta y}dx^2 dy + 3\frac{\vartheta^3 f}{\vartheta x \vartheta y^2}dxdy^2 + \frac{\vartheta^3 f}{\vartheta y^3}dy^3.$$

Εξ άλλου, για τη περίπτωση τριών, τεσσάρων και γενικά πολλών μεταβλητών συναρτήσεις, η συμβατική γραφή ολικού διαφορικού οποιασδήποτε τάξης, παραμένει η ίδια όπως παραπάνω,

π.χ. η γραφή $d^2f(x,y,z) = \left(\frac{\vartheta}{\vartheta x}dx + \frac{\vartheta}{\vartheta y}dy + \frac{\vartheta}{\vartheta z}dz\right)^2 f$, σημαίνει ότι:

$$d^2f(x,y,z) = \frac{\vartheta^2 f}{\vartheta x^2}dx^2 + \frac{\vartheta^2 f}{\vartheta y^2}dy^2 + \frac{\vartheta^2 f}{\vartheta z^2}dz^2 + 2\frac{\vartheta^2 f}{\vartheta x \vartheta y}dxdy + 2\frac{\vartheta^2 f}{\vartheta x \vartheta z}dydz + 2\frac{\vartheta^2 f}{\vartheta z \vartheta x}dzdx.$$

Παραδείγματα (στα ολικά διαφορικά 1ης και ανώτερης τάξης).

1) Να βρεθεί το ολικό διαφορικό 1ης τάξης της διδιάστατης συνάρτησης $f(x,y) = 3x^2 + xy^2 + y^4$.

Λύση

Είναι: $df(x,y) = d\left(3x^2 + xy^2 + y^4\right) = \frac{\vartheta f}{\vartheta x}dx + \frac{\vartheta f}{\vartheta y}dy$.

Αλλά είναι όμως: $\frac{\vartheta f}{\vartheta x} = 6x + y^2$ και $\frac{\vartheta f}{\vartheta y} = 2xy + 4y^3$, οπότε:

$$df(x,y) = \left(6x + y^2\right)dx + \left(2xy + 4y^3\right)dy.$$

2) Να βρεθεί το ολικό διαφορικό 2ης τάξης της συνάρτησης του προηγούμενου παραδείγματος.

Λύση

Είναι: $d^2f(x,y) = d^2\left(3x^2 + xy^2 + y^4\right) = \left(\frac{\vartheta}{\vartheta x}dx + \frac{\vartheta}{\vartheta y}dy\right)^2 f =$

$$= \left(\frac{\vartheta^2}{\vartheta x^2}dx^2 + 2\frac{\vartheta^2}{\vartheta x \vartheta y}dxdy + \frac{\vartheta^2}{\vartheta y^2}dy^2\right)f =$$

$$= \frac{\vartheta^2 f}{\vartheta x^2}dx^2 + 2\frac{\vartheta^2 f}{\vartheta x \vartheta y}dxdy + \frac{\vartheta^2 f}{\vartheta y^2}dy^2 =$$

$$= \frac{\vartheta}{\vartheta x}\left(\frac{\vartheta\left(3x^2 + xy^2 + y^4\right)}{\vartheta x}\right)dx^2 + 2\frac{\vartheta}{\vartheta y}\left(\frac{\vartheta f}{\vartheta x}\right)dxdy + \frac{\vartheta}{\vartheta y}\left(\frac{\vartheta f}{\vartheta y}\right)dy^2 =$$

$$= \frac{\vartheta}{\vartheta x}\left(6x + y^2\right)dx^2 + 2\frac{\vartheta}{\vartheta y}\left(6x + y^2\right)dxdy + \frac{\vartheta}{\vartheta y}\left(2xy + 4y^3\right)dy^2 =$$

$$= 6dx^2 + 2 \cdot 2ydxdy + \left(2y + 12y^2\right)dy^2.$$

3) Να βρεθεί το ολικό διαφορικό $2^{ης}$ τάξης της $f(x, y) = x^2 - \alpha xy + y^2$.

Λύση

Είναι: $d^2f(x,y) = \left(\frac{\vartheta}{\vartheta x}dx + \frac{\vartheta}{\vartheta y}dy\right)^2 f = \left(\frac{\vartheta^2 f}{\vartheta x^2}dx^2 + 2\frac{\vartheta^2 f}{\vartheta x \vartheta y}dxdy + \frac{\vartheta^2 f}{\vartheta y^2}dy^2\right)$,

αλλά $\frac{\vartheta^2 f}{\vartheta x^2} = \frac{\vartheta}{\vartheta x}\left(\frac{\vartheta\left(x^2 - \alpha xy + y^2\right)}{\vartheta x}\right) = \frac{\vartheta}{\vartheta x}(2x - \alpha y) = 2$

και $\frac{\vartheta^2 f}{\vartheta y^2} = \frac{\vartheta}{\vartheta y}\left(\frac{\vartheta\left(x^2 - \alpha xy + y^2\right)}{\vartheta y}\right) = \frac{\vartheta}{\vartheta y}(2y - \alpha x) = 2$

και $\frac{\vartheta^2 f}{\vartheta x \vartheta y} = \frac{\vartheta}{\vartheta x \vartheta y}\left(\frac{\vartheta\left(x^2 - \alpha xy + y^2\right)}{\vartheta x \vartheta y}\right) = \frac{\vartheta}{\vartheta x \vartheta y}(-\alpha) = -\alpha$

οπότε αντικαθιστώντας: $d^2\left(x^2 - \alpha xy + y^2\right) = 2dx^2 - 2\alpha dxdy + 2dy^2$.

4) Να εξεταστεί αν οι παρακάτω παραστάσεις είναι ολικά διαφορικά:

α) $\left(\mathbf{x^2y - 2y + 3xy}\right)\mathbf{dx} + \left(\mathbf{x^3y^2 - 3xy}\right)\mathbf{dy}$, ***β)*** $\left(\mathbf{y + \frac{1}{x}}\right)\mathbf{dx} + \left(\mathbf{x + \frac{1}{y}}\right)\mathbf{dy}$.

Λύση

α) Σύμφωνα με την παρατήρηση(δ), πρόταση (ΙΙΙ), της [1.5.], αν οι παραπάνω παραστάσεις είναι το ολικό διαφορικό κάποιας συνάρτησης f (δηλαδή είναι τέλεια διαφορίσιμη), τότε θα πρέπει:

$\frac{\vartheta}{\vartheta y}\left(x^2y - 2y + 3xy\right)$ να ισούται με $\frac{\vartheta}{\vartheta x}\left(x^3y^2 - 3xy\right)$, (δηλαδή $\frac{\vartheta P}{\vartheta y} = \frac{\vartheta Q}{\vartheta x}$).

Είναι όμως: $\frac{\vartheta}{\vartheta y}\left(x^2y-2y+3xy\right)=x^2-2+3x\neq\frac{\vartheta}{\vartheta x}\left(x^3y^2-3xy\right)=3y^2x^2-3y$,

άρα δεν είναι ολικό διαφορικό κάποιας f.

β) Όμοια έχουμε: $\frac{\vartheta}{\vartheta y}\left(y+\frac{1}{x}\right)=1=\frac{\vartheta}{\vartheta x}\left(x+\frac{1}{y}\right)$, άρα είναι ολικό διαφορικό κάποιας τρίτης μεταβλητής f.

5) Να βρεθεί η τιμή της παραμέτρου α, ώστε η παράσταση $\frac{x+\alpha y}{(x-y)^3}dx+\frac{\alpha x+y}{(x-y)^3}dy$, να είναι ολικό διαφορικό (ή τέλειο ή πλήρες διαφορικό).

Λύση

Όπως και παραπάνω θα πρέπει: $\frac{\vartheta}{\vartheta y}\left(\frac{x+\alpha y}{(x-y)^3}\right)=\frac{\vartheta}{\vartheta x}\left(\frac{\alpha x+y}{(x-y)^3}\right)$ ή

$$\frac{(x+\alpha y)'_y\cdot(x-y)^3-(x+\alpha y)\left((x-y)^3\right)'_y}{(x-y)^6}=\frac{(\alpha x+y)'_x\cdot(x-y)^3-(\alpha x+y)\left((x-y)^3\right)'_x}{(x-y)^6}$$

ή $$\frac{\alpha(x-y)^3-(x+\alpha y)\cdot3\cdot(x-y)^2(x-y)'_y}{(x-y)^6}=\frac{\alpha(x-y)^3-(\alpha x+y)\cdot3\cdot(x-y)^2(x-y)'_x}{(x-y)^6}$$

ή $\alpha(x-y)+3(x+\alpha y)=\alpha(x-y)-3(\alpha x+y)$ ή $x+\alpha y=-\alpha x-y$ ή

$\alpha(x+y)=-(x+y)$ ή $\alpha=-1$.

6) Να βρεθεί το ολικό διαφορικό $2^{ης}$ τάξης της $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-1$.

Λύση

Είναι: $d^2f(x,y,z)=\left(\frac{\vartheta}{\vartheta x}dx+\frac{\vartheta}{\vartheta y}dy+\frac{\vartheta}{\vartheta z}dz\right)^2 f=$

$$=\frac{\vartheta^2 f}{\vartheta x^2}dx^2+\frac{\vartheta^2 f}{\vartheta y^2}dy^2+\frac{\vartheta^2 f}{\vartheta z^2}dz^2+2\frac{\vartheta^2 f}{\vartheta x\vartheta y}dxdy+2\frac{\vartheta^2 f}{\vartheta x\vartheta z}dydz+2\frac{\vartheta^2 f}{\vartheta z\vartheta x}dzdx=$$

$$= \frac{\vartheta}{\vartheta x}(2x)dx^2 + \frac{\vartheta}{\vartheta y}(2y)dy^2 + \frac{\vartheta}{\vartheta z}(2z)dz^2 + 2\frac{\vartheta}{\vartheta y}(2x)dxdy + 2\frac{\vartheta}{\vartheta z}(2y)dydz + 2\frac{\vartheta}{\vartheta x}(2z)dzdx =$$

$$= 2dx^2 + 2dy^2 + 2dz^2 + 2\cdot 0\cdot dxdy + 2\cdot 0\cdot dydz + 2\cdot 0\cdot dzdx =$$

$$= 2\left(dx^2 + dy^2 + dz^2\right).$$

7) Να δειχθεί ότι η παράσταση: $\left(e^x \sigma\upsilon\nu y - e^y \eta\mu x\right)dx + \left(e^y \sigma\upsilon\nu x - e^x \eta\mu y\right)dy$ είναι πλήρες (τέλειο) διαφορικό, (δηλαδή ότι είναι το ολικό διαφορικό κάποιας συνάρτησης f(x,y)), καθώς και να βρεθεί η f(x,y) της οποίας είναι ολικό διαφορικό.

Λύση

Αν θέσουμε $e^x\sigma\upsilon\nu y - e^y\eta\mu x = P$ και $e^y\sigma\upsilon\nu x - e^x\eta\mu y = Q$, τότε σύμφωνα με τη παρατήρηση (δ), πρόταση (ΙΙΙ) της [1.5.], για να είναι η $(Pdx + Qdy)$ πλήρες διαφορικό θα πρέπει να ισχύει:

$$\frac{\vartheta P}{\vartheta y} = \frac{\vartheta Q}{\vartheta x} \Leftrightarrow \frac{\vartheta\left(e^x\sigma\upsilon\nu y - e^y\eta\mu x\right)}{\vartheta y} = \frac{\vartheta\left(e^y\sigma\upsilon\nu x - e^x\eta\mu y\right)}{\vartheta x} \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow -e^x\eta\mu y - e^y\eta\mu x = -e^y\eta\mu x - e^x\eta\mu y$, που πράγματι ισχύει, άρα η $(Pdx + Qdy)$ είναι πλήρες διαφορικό, δηλαδή θα υπάρχει συνάρτηση f(x,y) της οποίας θα είναι το ολικό διαφορικό της.

Τότε σύμφωνα με την πρόταση (ΙΙ) της παρατήρησης (δ) της [1.5.], θα έχουμε:

$$\frac{\vartheta f}{\vartheta x} = P \text{ και } \frac{\vartheta f}{\vartheta y} = Q.$$

Δηλαδή $\frac{\vartheta f}{\vartheta x} = P = e^x\sigma\upsilon\nu y - e^y\eta\mu x$, που ολοκληρώνοντάς την, ως προς x βρίσκουμε: $\int_x \frac{\vartheta f}{\vartheta x}dx = \int_x f'_x dx = \mathbf{f(x,y)} = \int_x Pdx =$

$$= \int_x \left(e^x\sigma\upsilon\nu y - e^y\eta\mu x\right)dx = \sigma\upsilon\nu y\int_x e^x dx - e^y\int_x \eta\mu x dx = \mathbf{e^x\sigma\upsilon\nu y + e^y\sigma\upsilon\nu x + c_1(y)}$$

δηλαδή $f(x,y) = e^x\sigma\upsilon\nu y + e^y\sigma\upsilon\nu x + c_1(y)$, (1), όπου η σταθερά (ως προς x) $c_1(y)$, πιθανόν να εξαρτάται από το y.

Όμοια, $\dfrac{\vartheta f}{\vartheta y} = Q = e^y \sigma\upsilon\nu x - e^x \eta\mu y$, που ολοκληρώνοντάς τη, ως προς y βρίσκουμε: $f(x,y) = \int_y \left(e^y \sigma\upsilon\nu x - e^x \eta\mu y\right)dy = e^x \sigma\upsilon\nu y + e^y \sigma\upsilon\nu x + c_2(x)$, (2), όπου η σταθερά του αόριστου ολοκληρώματος $c_2(x)$, είναι βέβαια ανεξάρτητη του y, πιθανόν όμως να εξαρτάται από το x.

Οπότε, από τις (1) και (2) παίρνουμε: $c_1(y) = c_2(x) = c$ και άρα η ζητούμενη συνάρτηση είναι: $f(x,y) = e^x \sigma\upsilon\nu y + e^y \sigma\upsilon\nu x + c$, όπου c αυθαίρετη σταθερά, ανεξάρτητη και του x και του y.

1.7. Παράγωγοι και διαφορικά σύνθετων πολυμεταβλητών συναρτήσεων.

Έστω η συνάρτηση f(x,y,z), όπου τα x,y,z δεν είναι ανεξάρτητες μεταβλητές αλλά είναι συναρτήσεις μιας άλλης μεταβλητής, δηλαδή $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, οπότε η f(x,y,z) είναι σύνθετη συνάρτηση του t, μέσω των x,y,z.

Τότε, αν η f έχει μερικές παραγώγους ως προς x,y,z, (συνεχείς) και οι συναρτήσεις x,y,z έχουν παραγώγους ως προς t, τότε και η f είναι παραγωγίσιμη ως προς t και η παράγωγός της είναι:

$$\boxed{f_t' = \frac{df}{dt} = \frac{\vartheta f}{\vartheta x}\frac{dx}{dt} + \frac{\vartheta f}{\vartheta y}\frac{dy}{dt} + \frac{\vartheta f}{\vartheta z}\frac{dz}{dt}} \quad (2) \quad \text{(παράγωγος της f ως προς t), ή}$$

ή $d_t f(x,y,z) = f_t' \cdot dt = \frac{\vartheta f}{\vartheta x}dx + \frac{\vartheta f}{\vartheta y}dy + \frac{\vartheta f}{\vartheta z}dz$, (διαφορικό της f ως προς t).

Εξ άλλου η 2^{η} παράγωγος της f ως προς t, είναι:

$$f_t'' = \frac{d^2f}{dt^2} = \left(\frac{df}{dt}\right)_t' = \frac{d}{dt}\left(\frac{df}{dt}\right) = \left(\frac{\vartheta f}{\vartheta x}\frac{dx}{dt} + \frac{\vartheta f}{\vartheta y}\frac{dy}{dt} + \frac{\vartheta f}{\vartheta z}\frac{dz}{dt}\right)_t' =$$

$$= \left(\frac{\vartheta f}{\vartheta x}\frac{dx}{dt}\right)_t' + \left(\frac{\vartheta f}{\vartheta y}\frac{dy}{dt}\right)_t' + \left(\frac{\vartheta f}{\vartheta z}\frac{dz}{dt}\right)_t' = \left(\frac{\vartheta f}{\vartheta x}\right)_t'\frac{dx}{dt} + \frac{\vartheta f}{\vartheta x}\cdot\left(\frac{dx}{dt}\right)_t' +$$

$$+\left(\frac{\vartheta f}{\vartheta y}\right)_t'\frac{dy}{dt} + \frac{\vartheta f}{\vartheta y}\cdot\left(\frac{dy}{dt}\right)_t' + \left(\frac{\vartheta f}{\vartheta z}\right)_t'\frac{dz}{dt} + \frac{\vartheta f}{\vartheta z}\cdot\left(\frac{dz}{dt}\right)_t' =$$

$$= \left[\frac{\vartheta}{\vartheta x}\frac{\vartheta f}{\vartheta x}\frac{dx}{dt} + \frac{\vartheta}{\vartheta x}\frac{\vartheta f}{\vartheta y}\frac{dy}{dt} + \frac{\vartheta}{\vartheta x}\frac{\vartheta f}{\vartheta z}\frac{dz}{dt}\right]\frac{dx}{dt} + \frac{\vartheta}{\vartheta x}\frac{d^2x}{dt^2} +$$

$$+\left[\frac{\vartheta}{\vartheta y}\frac{\vartheta f}{\vartheta x}\frac{dx}{dt} + \frac{\vartheta}{\vartheta y}\frac{\vartheta f}{\vartheta y}\frac{dy}{dt} + \frac{\vartheta}{\vartheta y}\frac{\vartheta f}{\vartheta z}\frac{dz}{dt}\right]\frac{dy}{dt} + \frac{\vartheta}{\vartheta y}\frac{d^2y}{dt^2} +$$

$$+\left[\frac{\vartheta}{\vartheta z}\frac{\vartheta f}{\vartheta x}\frac{dx}{dt} + \frac{\vartheta}{\vartheta z}\frac{\vartheta f}{\vartheta y}\frac{dy}{dt} + \frac{\vartheta}{\vartheta z}\frac{\vartheta f}{\vartheta z}\frac{dz}{dt}\right]\frac{dz}{dt} + \frac{\vartheta}{\vartheta z}\frac{d^2z}{dt^2} =$$

$$= \frac{\vartheta^2 f}{\vartheta x^2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \frac{\vartheta^2 f}{\vartheta x \vartheta y}\frac{dx}{dt}\frac{dy}{dt} + \frac{\vartheta^2 f}{\vartheta x \vartheta z}\frac{dx}{dt}\frac{dz}{dt} + \frac{\vartheta f}{\vartheta x}\frac{d^2x}{dt^2} + \cdots$$

και μετά τις πράξεις, παίρνοντας υπ' όψη ότι $\frac{\vartheta^2 f}{\vartheta x \vartheta y} = \frac{\vartheta^2 f}{\vartheta y \vartheta x}$, κ.λ.π.

έχουμε: $$\frac{d^2 f(x,y,z)}{dt^2} = f_t''(x,y,z) = \left(\frac{\vartheta}{\vartheta x}\frac{dx}{dt} + \frac{\vartheta}{\vartheta y}\frac{dy}{dt} + \frac{\vartheta}{\vartheta z}\frac{dz}{dt}\right)^2 f +$$

$$+\frac{\vartheta f}{\vartheta x}\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{\vartheta f}{\vartheta y}\frac{d^2y}{dt^2}+\frac{\vartheta f}{\vartheta z}\frac{d^2z}{dt^2},$$ με τη συμφωνία ότι $\frac{\vartheta^2 f}{\vartheta x^2}$, κ.λ.π. παριστάνει τη 2^{η} μερική παράγωγο της f ως προς x.

παρατήρηση:

Διαπιστώνεται ότι το διαφορικό (ολικό) **$1^{\eta\varsigma}$ τάξης** μιας συνάρτησης f(x,y,z), όπου οι x,y,z είναι ανεξάρτητες μεταβλητές και το διαφορικό της f(x,y,z), όπου τα x,y,z είναι συναρτήσεις μιας άλλης μεταβλητής (δηλαδή f σύνθετη), δίνονται από τον ίδιο τύπο:

$$df(x,y,z)=\frac{\vartheta f}{\vartheta x}dx+\frac{\vartheta f}{\vartheta y}dy+\frac{\vartheta f}{\vartheta z}dz.$$

[το ολικό διαφορικό $1^{\eta\varsigma}$ τάξης,σύνθετης και μη, πολυμεταβλητής συνάρτησης είναι κοινό.]

Για τα διαφορικά όμως $2^{\eta\varsigma}$ και ανώτερης τάξης δεν συμβαίνει το ίδιο, δηλαδή προκειμένου για f(x,y,z) όπου τα x,y,z, είναι συναρτήσεις της t, για το διαφορικό $2^{\eta\varsigma}$ τάξης έχουμε:

$$d_t^2 f(x,y,z)=\left(\frac{\vartheta}{\vartheta x}dx+\frac{\vartheta}{\vartheta y}dy+\frac{\vartheta}{\vartheta z}dz\right)^2 f+\frac{\vartheta f}{\vartheta x}d^2x+\frac{\vartheta f}{\vartheta y}d^2y+\frac{\vartheta f}{\vartheta z}d^2z,$$ ενώ για την ίδια συνάρτηση f(x,y,z) όπου όμως τα x,y,z είναι ανεξάρτητες μεταβλητές, το διαφορικό $2^{\eta\varsigma}$ τάξης είναι:

$$d^2 f(x,y,z)=\left(\frac{\vartheta}{\vartheta x}dx+\frac{\vartheta}{\vartheta y}dy+\frac{\vartheta}{\vartheta z}dz\right)^2 f,$$

σύμφωνα με τους γνωστούς ήδη κανόνες διαφόρισης πολυμεταβλητών συναρτήσεων.

παραδείγματα:

1) ***Να βρεθεί η β' (ολική) παράγωγος ως προς t της σύνθετης συνάρτησης $\mathbf{f(x,y)=x^2-y^2}$, όπου $\mathbf{x=e^t\text{συν}t}$, $\mathbf{y=e^t\text{ημ}t}$.***

Λύση

Κατά τα παραπάνω, θα έχουμε:

$$f_t''(x,y)=\frac{d^2f}{dt^2}=\left(\frac{\vartheta}{\vartheta x}\frac{dx}{dt}+\frac{\vartheta}{\vartheta y}\frac{dy}{dt}\right)^2 f+\frac{\vartheta f}{\vartheta x}\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{\vartheta f}{\vartheta y}\frac{d^2y}{dt^2}=$$

$$=\frac{\vartheta^2 f}{\vartheta x^2}\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{\vartheta^2 f}{\vartheta y^2}\frac{d^2y}{dt^2}+2\frac{\vartheta^2 f}{\vartheta x\vartheta y}\frac{dx}{dt}\frac{dy}{dt}+\frac{\vartheta f}{\vartheta x}\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{\vartheta f}{\vartheta y}\frac{d^2y}{dt^2} \quad (1)$$

Βρίσκω τις μερικές παραγώγους

$$\frac{\vartheta^2 f}{\vartheta x^2}=\frac{\vartheta}{\vartheta x}\left(\frac{\vartheta(x^2-y^2)}{\vartheta x}\right)=\frac{\vartheta}{\vartheta x}(2x)=2 \text{ και } \frac{\vartheta^2 f}{\vartheta y^2}=\frac{\vartheta}{\vartheta y}\left(\frac{\vartheta(x^2-y^2)}{\vartheta y}\right)=\frac{\vartheta}{\vartheta y}(-2y)=-2$$

και $\dfrac{\vartheta^2 f}{\vartheta x\vartheta y}=\dfrac{\vartheta}{\vartheta y}\left(\dfrac{\vartheta(x^2-y^2)}{\vartheta x}\right)=\dfrac{\vartheta}{\vartheta y}(2x)=0,$

ενώ $\dfrac{d^2x}{dt^2}=\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{d(e^t\sigma\upsilon\nu t)}{dt}\right)=\dfrac{d}{dt}\left(e^t\sigma\upsilon\nu t-e^t\eta\mu t\right)=-2e^t\eta\mu t$

και $\dfrac{d^2y}{dt^2}=\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{d(e^t\eta\mu t)}{dt}\right)=\dfrac{d}{dt}\left(e^t\eta\mu t+e^t\sigma\upsilon\nu t\right)=2e^t\sigma\upsilon\nu t$, οπότε η (1) γίνεται:

$$\frac{d^2f}{dt^2}=2\left(-2e^t\eta\mu t\right)+(-2)\left(2e^t\sigma\upsilon\nu t+2\cdot 0\cdot\left(e^t\sigma\upsilon\nu t-e^t\eta\mu t\right)\left(e^t\eta\mu t+e^t\sigma\upsilon\nu t\right)\right)+$$
$$+2x\left(-2e^t\eta\mu t\right)+(-2y)\left(2e^t\sigma\upsilon\nu t\right).$$

2) Αν $f(x,y)=x^2+xy$, όπου $x=\rho\sigma\upsilon\nu\varphi$, $y=\rho\eta\mu\varphi$ να υπολογιστούν οι $\dfrac{\vartheta f}{\vartheta\rho}$ και $\dfrac{\vartheta f}{\vartheta\varphi}$.

Λύση

Αντικαθιστώντας: $f(x,y)=(\rho\sigma\upsilon\nu\varphi)^2+\rho\sigma\upsilon\nu\varphi\cdot\rho\eta\mu\varphi=\rho^2\sigma\upsilon\nu^2\varphi+\rho^2\eta\mu\varphi\sigma\upsilon\nu\varphi$,

οπότε $\dfrac{\vartheta f(\rho,\varphi)}{\vartheta\rho}=2\rho\sigma\upsilon\nu^2\varphi+2\rho\eta\mu\varphi\sigma\upsilon\nu\varphi$ και

$\dfrac{\vartheta f(\rho,\varphi)}{\vartheta\varphi}=-2\rho^2\eta\mu\varphi\sigma\upsilon\nu\varphi-\rho^2\eta\mu^2\varphi+\rho^2\sigma\upsilon\nu^2\varphi$.

3) Να βρεθεί ή β' παράγωγος ως προς t της σύνθετης συνάρτησης $\varphi(x,y,z)=xyz^2$, όταν $x(t)=\eta\mu t$, $y(t)=\sigma\upsilon\nu t$, και $z(t)=t^2+1$.

Λύση

Κατά την [1.7.], θα έχουμε:

$$\varphi_t''(x,y,z)=\frac{d^2\varphi(x,y,z)}{dt^2}=\left(\frac{\vartheta}{\vartheta x}\frac{dx}{dt}+\frac{\vartheta}{\vartheta y}\frac{dy}{dt}+\frac{\vartheta}{\vartheta z}\frac{dz}{dt}\right)^2\varphi+\frac{\vartheta\varphi}{\vartheta x}\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{\vartheta\varphi}{\vartheta y}\frac{d^2y}{dt^2}+\frac{\vartheta\varphi}{\vartheta z}\frac{d^2z}{dt^2}=$$

$$= \frac{\vartheta^2\varphi}{\vartheta x^2}\left(\frac{dx}{dt^2}\right)^2 + \frac{\vartheta^2\varphi}{\vartheta y^2}\left(\frac{dy}{dt^2}\right)^2 + \frac{\vartheta^2\varphi}{\vartheta z^2}\left(\frac{dz}{dt^2}\right)^2 + 2\frac{\vartheta^2\varphi}{\vartheta x \vartheta y}\frac{dx}{dt}\frac{dy}{dt} + \cdots$$

4) Να βρεθεί το ολικό διαφορικό 3ης τάξης της $f(x,y,z) = xyz$.

Λύση

Η συνάρτηση αυτή (που θα μπορούσε να ερμηνευτεί σαν η συνάρτηση του όγκου ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου), παρατηρούμε πως δεν είναι σύνθετη, άρα το ολικό διαφορικό της 3ης τάξης, θα δίνεται σύμφωνα με την [1.6.], δηλαδή:

$$d^3 f(x,y,z) = \left(\frac{\vartheta}{\vartheta x}dx + \frac{\vartheta}{\vartheta y}dy + \frac{\vartheta}{\vartheta z}dz\right)^3 f =$$

$$\left[\begin{array}{l} (\alpha+\beta+\gamma)^3 = \alpha^3+\beta^3+\gamma^3+3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2+ \\ +3\alpha^2\gamma+3\alpha\gamma^2+3\beta^2\gamma+3\beta\gamma^2+6\alpha\beta\gamma = \\ = \alpha^3+\beta^3+\gamma^3+3(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha). \end{array}\right]$$

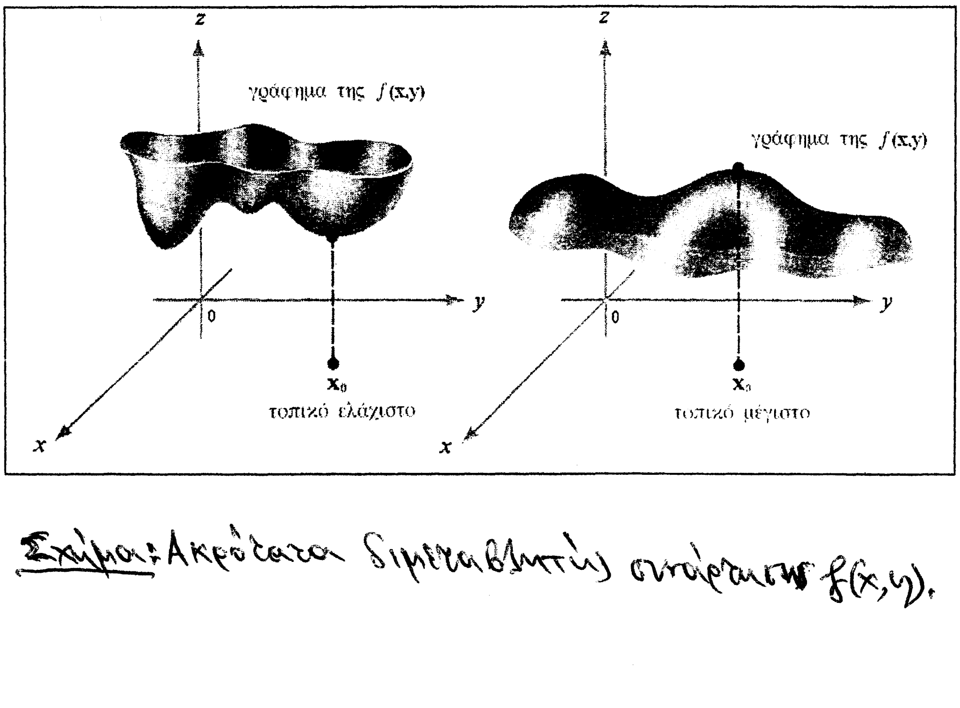
$$= \frac{\vartheta^3 f}{\vartheta x^3}dx^3 + \frac{\vartheta^3 f}{\vartheta y^3}dy^3 + \frac{\vartheta^3 f}{\vartheta z^3}dz^3 +$$

$$+3\frac{\vartheta^3 f}{\vartheta x^2 \vartheta y}dx^2dy + 3\frac{\vartheta^3 f}{\vartheta x \vartheta y^2}dxdy^2 + 3\frac{\vartheta^3 f}{\vartheta x^2 \vartheta z}dx^2dz + 3\frac{\vartheta^3 f}{\vartheta x \vartheta z^2}dxdz^2 +$$

$$+3\frac{\vartheta^3 f}{\vartheta y^2 \vartheta z}dy^2dz + 3\frac{\vartheta^3 f}{\vartheta y \vartheta z^2}dydz^2 + 6\frac{\vartheta^3 f}{\vartheta x \vartheta y \vartheta z}dxdydz,$$

και επειδή εφαρμόζοντας τη γνωστή, καθαρά λογιστική διαδικασία, βρίσκουμε πως όλες οι μερικές παράγωγοι 3ης τάξης είναι 0, εκτός της $\frac{\vartheta^3 f}{\vartheta x \vartheta y \vartheta z} = 1$, άρα τελικά:

$$d^3 f(x,y,z) = d^3(xyz) = 6\frac{\vartheta^3 f}{\vartheta x \vartheta y \vartheta z}dxdydz = 6dxdydz.$$



Σχήμα: Ακρότατα διμεταβλητής συνάρτησης f(x,y).

1.8. Ακρότατα συναρτήσεων πολλών μεταβλητών

Θα λέμε ότι μια συνάρτηση (έστω 2 ανεξάρτητων μεταβλητών) $z = f(x,y)$, έχει ένα μέγιστο [αντίστοιχα ελάχιστο] στο σημείο $M_0(x_0,y_0)$, αν η τιμή της συνάρτησης στο σημείο αυτό M_0, είναι η μεγαλύτερη (αντίστοιχα μικρότερη) από την τιμή οποιουδήποτε άλλου σημείου $M(x,y)$ μιας συγκεκριμένης περιοχής (γειτονιάς) του M_0, δηλαδή ότι $f(x_0,y_0) > f(x,y)$ [αντίστοιχα $f(x_0,y_0) < f(x,y)$], και αυτό, για όλα τα σημεία $M(x,y)$ που ικανοποιούν τη συνθήκη $|M_0M| < \delta$, όπου δ ένας συγκεκριμμένος θετικός αριθμός, (βλ. Προηγούμενο Σχήμα).

Το μέγιστο ή το ελάχιστο, λέγεται ακρότατο της συνάρτησης $z = f(x,y)$, ενώ το σημείο $M_0(x_0,y_0)$ όπου η συνάρτηση έχει ακρότατο, λέγεται σημείο ακρότατου.

Εάν μια διαφορίσιμη συνάρτηση $z = f(x,y)$, έχει ακρότατο στο σημείο $M_0(x_0,y_0)$, τότε οι μερικές παράγωγοι $1^{ης}$ τάξης θα είναι μηδέν στο σημείο αυτό, δηλαδή:

$$\frac{\vartheta f(x_0,y_0)}{\vartheta x} = 0, \quad \frac{\vartheta f(x_0,y_0)}{\vartheta y} = 0 \quad \text{(αναγκαίες συνθήκες ακρότατου)}, \qquad (\mathrm{I}).$$

Τα σημεία στα οποία οι μερικές παράγωγοι είναι μηδέν, λέγονται κρίσιμα σημεία. Κάθε κρίσιμο σημείο δεν σημαίνει αναγκαία ότι είναι και σημείο ακρότατου. (Δηλαδή τα κρίσιμα σημεία είναι πιθανά σημεία ακρότατων).

Για τη διάγνωση, εάν πράγματι ένα κρίσιμο σημείο είναι σημείο ακρότατου, ακολουθούμε την εξής διαδικασία:

Έστω $M_0(x_0,y_0)$ ένα κρίσιμο σημείο της συνάρτησης $z = f(x,y)$ δηλ. ισχύουν οι (I).

Συμβολίζουμε: $A = \dfrac{\vartheta^2 f(x_0,y_0)}{\vartheta x^2}$, $B = \dfrac{\vartheta^2 f(x_0,y_0)}{\vartheta x \vartheta y}$, $\Gamma = \dfrac{\vartheta^2 f(x_0,y_0)}{\vartheta y^2}$, (οι δεύτερες μερικές παράγωγοι)

και σχηματίζουμε τη λεγόμενη διακρίνουσα Δ, δηλαδή $\boxed{\Delta = A\Gamma - B^2}$, **οπότε:**

- **αν Δ>0, τότε η συνάρτηση z έχει ένα ακρότατο στο σημείο $M_0(x_0,y_0)$ και πιο συγκεκριμμένα, ένα μέγιστο όταν A<0 (ή Γ<0) ή ένα ελάχιστο όταν A>0 (ή Γ>0).**
- **αν Δ<0, τότε δεν υπάρχει ακρότατο στο M_0 (συνθήκη ικανή για την ύπαρξη ή μη ακρότατου σε σημείο M_0).**

- **αν $\Delta=0$, τότε έχουμε απροσδιοριστία, δηλαδή δεν μπορούμε να αποφανθούμε για την ύπαρξη ή μη ακρότατου (χρειάζεται παραπέρα εξέταση).**

Σημείωση: Συνήθως στις συναρτήσεις των πρακτικών εφαρμογών, τα κρίσιμα σημεία είναι και ακρότατα.

παραδείγματα:

1) Να βρεθούν τα ακρότατα της συνάρτησης $z = x^2 + xy + y^2 - 3x - 6y$.

Λύση

Καταρχή, βρίσκουμε τα πιθανά σημεία ακρότατων δηλαδή τα κρίσιμα (ή στάσιμα) σημεία, που είναι εκείνα όπου οι μερικές παράγωγοι $1^{ης}$ τάξης της z είναι μηδέν.

Έτσι, οι μερικές παράγωγοι $1^{ης}$ τάξης της z, είναι:

$$\frac{\vartheta z}{\vartheta x} = 2x + y - 3, \quad \frac{\vartheta z}{\vartheta y} = x + 2y - 6, \quad (\mathrm{I}).$$

Επειδή θα πρέπει στο ζητούμενο σημείο $M_0(x_0, y_0)$ οι μερικές παράγωγοι να είναι 0 (συνθήκη αναγκαία, αν οι μερικές πρώτες παράγωγοι δεν μηδενίζονται ή το σύστημά τους δεν έχει λύση, τότε δεν έχουμε ακρότατο), έχουμε από τις (Ι):

$$\begin{cases} 2x + y - 3 = 0 \\ x + 2y - 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow M_0(0,3) = \text{κρίσιμο σημείο.}$$

Κατόπιν, υπολογίζουμε τις μερικές παραγώγους $2^{ης}$ τάξης της z, στο κρίσιμο σημείο $M_0(0,3)$, δηλαδή:

$$A = \frac{\vartheta^2 f(0,3)}{\vartheta x^2} = 2, \quad B = \frac{\vartheta^2 f(0,3)}{\vartheta x \vartheta y} = 1, \quad \Gamma = \frac{\vartheta^2 f(0,3)}{\vartheta y^2} = 2,$$

οπότε σχηματίζουμε τη διακρίνουσα $\Delta = A\Gamma - B^2$, δηλαδή $\Delta = 2 \cdot 2 - 1^2 = 3 > 0$.

Άρα, η συνάρτηση $z = f(x, y)$, παρουσιάζει ακρότατα στο σημείο $M_0(0,3)$ και μάλιστα επειδή $A = 2 > 0$, θα είναι ελάχιστο, δηλαδή $f(0,3) = z_{min} = -9$.

2) Να βρεθούν τα ακρότατα της συνάρτησης

$$z = \frac{1}{2}xy + (47 - x - y)\left(\frac{x}{3} + \frac{y}{4}\right).$$

Λύση

Όμοια εργαζόμενοι, υπολογίζουμε τις πρώτες μερικές παραγώγους της z:

$$\frac{\vartheta z}{\vartheta x} = -\frac{1}{12}y - \frac{2}{3}x + \frac{47}{3}, \quad \frac{\vartheta z}{\vartheta y} = -\frac{1}{2}y - \frac{1}{12}x + \frac{47}{4}.$$

Χρησιμοποιώντας τις αναγκαίες συνθήκες ακρότατου βρίσκουμε τα κρίσιμα σημεία:

$$\left\{\begin{array}{l} -\frac{1}{12}y - \frac{2}{3}x + \frac{47}{3} = 0 \\ -\frac{1}{2}y - \frac{1}{12}x + \frac{47}{4} = 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 8x + y = 188 \\ x + 6y = 141 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 21 \\ y = 20 \end{array}\right\} \Leftrightarrow M_0(21{,}20) = \text{κρίσιμο σημείο}$$

Βρίσκουμε και τις δεύτερες μερικές παραγώγους στο σημείο $M_0(21, 20)$:

$$\frac{\vartheta^2 z(21, 20)}{\vartheta x^2} = -\frac{2}{3}, \quad \frac{\vartheta^2 z(21, 20)}{\vartheta x \vartheta y} = -\frac{1}{2}, \quad \frac{\vartheta^2 z(21, 20)}{\vartheta y^2} = -\frac{1}{12}.$$

Οπότε, $\Delta = A\Gamma - B^2 = \left(-\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{1}{2}\right) - \left(-\frac{1}{12}\right)^2 = \frac{1}{3} - \frac{1}{144} > 0$, άρα θα έχουμε στο $M_0(21, 20)$ ακρότατο της z και μάλιστα επειδή A<0, θα είναι μέγιστα θα έχουμε δηλαδή:

$z(21, 20) = z_{max} = 282$.

1.9. Γενικές παρατηρήσεις (στη παραγωγισιμότητα και διαφορισιμότητα, πολυμεταβλητών (σύνθετων και μη) συναρτήσεων).

α) Αν μια συνάρτηση f(x,y,z) είναι διαφορίσιμη στο σημείο $M(x_0, y_0, z_0)$ τότε θα ισχύουν τα εξής:

i) η f είναι συνεχής στο M, δηλαδή $\lim\limits_{(x,y,z)\to(x_0,y_0,z_0)} f(x,y,z) = f(M) = f(x_0,y_0,z_0)$, και

ii) η f επιδέχεται στο σημείο M, μερικές παραγώγους 1ης τάξης.

Αν η f είναι διαφορίσιμη $\forall M \in I$, τότε λέγεται διαφορίσιμη στο I.

β) Κάθε πραγματική πολυμεταβλητή συνάρτηση με συνεχείς μερικές παραγώγους σε ένα σημείο, είναι και διαφορίσιμη στο σημείο, (κατά συνέπεια οι συνηθισμένες συναρτήσεις που χρησιμοποιούμε, είναι διαφορίσιμες, π.χ. πολυωνυμικές, εκθετικές, κ.λ.π.).

Το αντίστροφο δεν ισχύει. Δηλαδή μια συνάρτηση μπορεί να είναι διαφορίσιμη σε ένα σημείο, άλλα οι μερικές παράγωγοι σε αυτό να είναι ασυνεχείς, π.χ. $f(x,y) = \varphi(x) + \varphi(y)$ με $\varphi(0) = 0$, $\varphi(t) = t^2 \eta\mu\pi t^{-1}$, $t \neq 0$.

Συμπέρασμα: f διαφορίσιμη στο M $\Rightarrow$ f συνεχής στο M και με μερικές παραγώγους 1ης τάξης (όχι αναγκαία συνεχείς), f με συνεχείς μερικές παραγώγους στο Μ $\Rightarrow$ f διαφορίσιμη στο Μ, ενώ αντίστροφα, f διαφορίσιμη $\Rightarrow$ f συνεχής και με μερικές παραγώγους όχι όμως αναγκαία συνεχείς.

γ) Για το ολικό διαφορικό $1^{ης}$ τάξης, συμπερασματικά έχουμε:

$df(x,y) = \frac{\vartheta f}{\vartheta x}dx + \frac{\vartheta f}{\vartheta y}dy = f'_x(x,y)dx + f'_y(x,y)dy$, και γενικά

$$df(x_1, x_2, \ldots, x_\nu) = \frac{\vartheta f}{\vartheta x_1}dx_1 + \frac{\vartheta f}{\vartheta x_2}dx_2 + \cdots + \frac{\vartheta f}{\vartheta x_\nu}dx_\nu .$$

δ) Μια συνάρτηση $f(x_1, x_2, \ldots, x_\nu)$, λέγεται **ομογενής κ-τάξης**, αν ισχύει:

$f(tx_1, tx_2, \ldots, tx_\nu) = t^\kappa \cdot f(x_1, x_2, \ldots, x_\nu)$, με $t \in R$, (1).

Παραγωγίζοντας την (1) ως προς t και θέτοντας $t = 1$, παίρνουμε:

$\mathbf{x_1 f'_{x_1} + x_2 f'_{x_2} + \cdots + x_\nu f'_{x_\nu} = \kappa \cdot f(x_1, x_2, \ldots, x_\nu)}$, που λέγεται σχέση Euler και χαρακτηρίζει τις ομογενείς συναρτήσεις κ-τάξης.

ε) Αν f(u,v,w) με $u = \varphi(x,y)$, $v = \psi(x,y)$, $w = \sigma(x,y)$, δηλαδή τα u,v,w είναι σύνθετες συναρτήσεις δύο άλλων μεταβλητών x και y, άρα τελικά: $F(x,y) = f(\varphi(x,y), \psi(x,y), \sigma(x,y))$, τότε:

$$F'_x(x,y) = f'_u(u,v,w)\cdot\varphi'_x(x,y) + f'_v(u,v,w)\cdot\psi'_x(x,y) + f'_w(u,v,w)\cdot\sigma'_x(x,y), \quad (1)$$

και όμοια: $F'_y(x,y) = f'_u(u,v,w)\cdot\varphi'_y(x,y) + f'_v(u,v,w)\cdot\psi'_y(x,y) + f'_w(u,v,w)\cdot\sigma'_y(x,y)$, (2)

(Ανάλογα, για οποιαδήποτε περίπτωση σύνθετης συνάρτησης).

ζ) Ας σημειωθεί και πάλι, ότι το ολικό διαφορικό $1^{ης}$ τάξης (ή αλλιώς το πρώτο διαφορικό), έχει πάντα την ίδια μορφή είτε οι μεταβλητές είναι ανεξάρτητες είτε συναρτήσεις άλλων μεταβλητών (πράγμα που δεν ισχύει για τα δεύτερα διαφορικά και πάνω).

η) Σχετικά με το ολικό διαφορικό $2^{ης}$ τάξης (ή δεύτερο διαφορικό) έχουμε:

$d^2f(x,y) = f''_{x^2}(x,y)dx^2 + 2f''_{xy}(x,y)dxdy + f''_{y^2}(x,y)dy^2$ ή συντομογραφικά:

$$\left(f_x dx + f_y dy\right)^{(2)} \text{ ή } \left(\frac{\vartheta\varphi}{\vartheta x}dx + \frac{\vartheta\varphi}{\vartheta y}dy\right)^{(2)},$$

π.χ. $d^2f(x,y) = d^2\left(\frac{1}{2}\ell n y\left(x^2 + \alpha^2 y^2\right)\right) = \frac{\alpha^2 y^2 - x^2}{\left(x^2 + \alpha^2 y^2\right)^2}dx^2 +$

$$+\frac{-4\alpha^2xy}{\left(x^2+\alpha^2y^2\right)^2}dxdy+\frac{\alpha^2\left(x^2-\alpha^2y^2\right)}{\left(x^2+\alpha^2y^2\right)^2}dy^2,$$

αφού: $f'_x=\dfrac{x}{x^2+\alpha^2y^2}$, $f''_{x^2}=\dfrac{\alpha^2y^2-x^2}{\left(x^2+\alpha^2y^2\right)^2}$, $f'_y=\dfrac{\alpha^2y}{x^2+\alpha^2y^2}$, $f''_{y^2}=\dfrac{\alpha^2\left(x^2-\alpha^2y^2\right)}{\left(x^2+\alpha^2y^2\right)^2}$

και $f''_{xy}=\dfrac{-2\alpha^2xy}{\left(x^2+\alpha^2y^2\right)^2}=f''_{yx}$.

θ) Επαγωγικά, ορίζονται οι μερικές παράγωγοι ν-οστής τάξης, όπως και τα μερικά και ολικά διαφορικά ν-οστής τάξης.

Έτσι, οι μερικές παράγωγοι $3^{ης}$ τάξης της f(x,y) είναι: f'''_{x^3}, f'''_{y^3}, f'''_{x^2y}, f'''_{xy^2}, δηλαδή διαφορετικές 4 μόνο, αφού $f'''_{x^2y}=f'''_{yx^2}=f_{xyx}$, κ.λ.π.

Γενικά: $f^{(\nu_1+\nu_2+\cdots+\nu_\rho)}_{x_1^{\nu_1}x_2^{\nu_2}\cdots x_\rho^{\nu_\rho}}$ ή $\dfrac{\vartheta f^{(\nu_1+\nu_2+\cdots+\nu_\rho)}}{\vartheta x_1^{\nu_1}\vartheta x_2^{\nu_2}\cdots\vartheta x_\rho^{\nu_\rho}}$, ενώ για το κ-τάξης (ολικό) διαφορικό, είναι: $d^\kappa f(x,y)=d\left(d^{\kappa-1}f(x,y)\right)$, $\kappa=2,3,4,\ldots$, δηλαδή

$$d^\kappa f=f_{x^\kappa}dx^\kappa+\kappa f_{x^{\kappa-1}y}dx^{\kappa-1}dy+\frac{\kappa(\kappa-1)}{2!}f_{x^{\kappa-2}y^2}dx^{\kappa-2}dy^2+\cdots+$$

$$+\kappa f_{xy^{\kappa-1}}dxdy^{\kappa-1}+f_{y^\kappa}dy^\kappa=\left(\frac{\vartheta}{\vartheta x}dx+\frac{\vartheta}{\vartheta y}dy\right)^\kappa f,\quad \kappa\in\mathbb{N}^*.$$

ι) Να εξεταστούν ως προς τα ακρότατα οι επόμενες Ασκήσεις:

ΑΣΚΗΣΕΙΣ: 1) $f(x,y)=x^2-xy+y^2+3x-2y+1$, (Απ. $M\left(-\frac{4}{3},\frac{1}{3}\right)$ min)

2) $f(x,y)=x^3+y^3-3xy$, (Απ. $M_1(1,1)$ min, $M_2(0,0)$ σαγματικό)

3) $f(x,y)=x^3+3xy^2-3x^2-3y^2+4$, (Απ. $M_1(0,0)$ max, $M_2(2,0)$ min, $M_3(1,1)$ σαγμ., $M_4(1,-1)$ σαγμ.)

4) $f(x,y)=x^2+2y^2-2x+4y-6$, (Απ. $M(1,-1)$ min).

5) $f(x,y)=x^3+3xy^2-15x-12y$, (Απ. $M_1(1,2)$ σαγμ., $M_2(2,1)$ min, $M_3(-1,-2)$ σαγμ., $M_4(-2,-1)$ max.)

3. ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ 1ης τάξης

ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

ΓΕΝΙΚΑ:

Είναι γνωστό ότι κατά την μελέτη των πολυάριθμων φαινομένων (φυσικών ή κοινωνικών) της σύνθετης και πολυδιάστατης πραγματικότητας που μας περιβάλλει, όταν και όσα απ' αυτά επιδέχονται την είσοδό τους στο πεδίο της μαθηματικής επιστήμης, πρώτα "μαθηματικοποιούνται" δηλαδή εκφράζονται σαν συναρτήσεις μιας ή περισσοτέρων μεταβλητών (ανάλογα με το πλήθος των παραγόντων που διέπουν το φαινόμενο), και μετά οδηγούμαστε συνήθως στη λύση κάποιας εξίσωσης με άγνωστο κάποιον απ' τους παράγοντες-μεταβλητές του φαινομένου.

Για τις γνωστές μας ήδη αλγεβρικές εξισώσεις, ξέρουμε ότι ο άγνωστος είναι συνήθως η ανεξάρτητη μεταβλητή x, με ρίζες κάποιον πραγματικό ή γενικότερα μιγαδικό αριθμό.

Αντίθετα στις διαφορικές εξισώσεις (Δ.Ε.), ο άγνωστος είναι μια συνάρτηση y, ενώ στη κατάστρωσή τους περιέχεται τουλάχιστον μια παράγωγος της συνάρτησης αυτής.

Οι Δ.Ε. εκφράζουν φαινόμενα, όπου οι μεταβλητές που υπεισέρχονται είναι τέτοιες, ώστε η μεταβολή μιας ή περισσοτέρων απ' αυτές να επηρρεάζει τη μεταβολή κάποιας άλλης, μ' άλλα λόγια στις Δ.Ε. εκτός απ' τις ανεξάρτητες και εξαρτημένες μεταβλητές της άγνωστης συνάρτησης y περιέχονται και παράγωγοι ή διαφορικά της y (υπενθυμίζεται πως ο ρυθμός μεταβολής μιας συνάρτησης, εκφράζεται απ' τη παράγωγο ή το διαφορικό της).

Έτσι λοιπόν, η λύση μιας Δ.Ε. σημαίνει την εύρεση της άγνωστης συναρτησιακής σχέσης y, που υπάρχει μεταξύ των μεταβλητών της εξίσωσης.

Συμπερασματικά λοιπόν, μια Δ.Ε. είναι η μαθηματική έκφραση (μαθηματικό μοντέλο, πρότυπο) κάποιου φαινομένου και η λύση της είναι η συναρτησιακή σχέση μεταξύ της άγνωστης εξαρτημένης μεταβλητής και των ανεξάρτητων μεταβλητών (ας επισημανθεί εδώ, η σαφής αντιδιαστολή μεταξύ της εξαρτημένης μεταβλητής y και της συναρτησιακής σχέσης & μιας συνάρτησης, παρότι στη πράξη συνηθίζουμε καταχρηστικά να τις συμβολίζουμε και τις δύο, με το ίδιο γράμμα y).

Για την ιστορία, ας αναφερθεί πως οι πρώτες Δ.Ε. εμφανίστηκαν κατά την εποχή του Νεύτωνα, όταν ορισμένα προβλήματα της φυσικής, διατυπώθηκαν με εξισώσεις που περιείχαν παραγώγους μιας συνάρτησης.

π.χ.

α) Έστω η εξίσωση του νόμου του Ohm, σχετικά μ' ένα απλό κύκλωμα συνεχούς ρεύματος, αποτελούμενο από μια μπαταρία τάσης V και μια αντίσταση R, δηλαδή

$I = \frac{V}{R}$, (1).

Το ρεύμα I είναι το ποσόν μεταβολής του φορτίου q που εξέρχεται απ' τη μπαταρία, δηλαδή $\boxed{\frac{dq}{dt} = \frac{V}{R}}$, (2).

Οπότε πολλαπλασιάζοντας επί dt τη (2) και ολοκληρώνοντας, έχουμε:

(2) $\Leftrightarrow dq = \frac{V}{R}dt \Rightarrow \boxed{q = \frac{V}{R}t + C}$, (3), (γενική λύση της Δ.Ε. (2)).

Η εξίσωση (3) δίνει το ολικό φορτίο που εξέρχεται απ' τη μπαταρία κατά το χρόνο t. Η σταθερά C εκφράζει το φορτίο που έχει ήδη εξαχθεί κατά τη χρονική στιγμή t=0 που κλείνει το κύκλωμα.

Έτσι, αν πειραματιζόμενοι με το παραπάνω απλό κύκλωμα, γνωρίζουμε τη μεταβολή του φορτίου q ως προς το χρόνο, δηλαδή γνωρίζουμε τη Δ.Ε. (2), μπορούμε μέσα απ' τη λύση της, δηλαδή την (3), να βρίσκουμε το εξαγόμενο φορτίο απ' τη μπαταρία σε κάθε χρονικό διάστημα t. Μάλιστα, αν κατά το κλείσιμο του κυκλώματος, η μπαταρία ήταν πλήρως φορτισμένη, οπότε η σταθερά C είναι 0 (δηλαδή για t=0, εξαχθέν φορτίο q είναι 0, οπότε C=0), τότε παιρνούμε απ' τη (3) (γενική λύση της Δ.Ε.), τη λεγόμενη μερική λύση της (2), για C=0, δηλαδή: $q = \frac{V}{R}t$.

Ενώ, αν πριν απ' το κλείσιμο του κυκλώματος η μπαταρία είχε ήδη εκφορτιστεί κατά 10 coulombs, θα παίρναμε σαν ολικά εξαχθέν φορτίο κατά το χρόνο t, τη μερική λύση της (3) για C=10, δηλαδή $q = \frac{V}{R}t + 10$.

Ας σημειωθεί εξ άλλου, ότι V και R δεν είναι αυθαίρετες σταθερές αλλά γνωστά μεγέθη που λέγονται παράμετροι της αρχικής Δ.Ε. (2). (Οι αυθαίρετες σταθερές C εμφανίζονται στη λύση μιας Δ.Ε. κι' όχι στην ίδια την Δ.Ε., όπως θα δούμε και στα επόμενα).

β) Η Δ.Ε. $\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \boldsymbol{\gamma}$, εκφράζει το πρόβλημα της ευθύγραμμης ομαλά μεταβαλλόμενης κίνησης, όπου **u** = ταχύτητα, t = χρόνος και γ = επιτάχυνση (σταθερή).

Τότε η λύση της, που βρίσκεται με άμεση ολοκλήρωση:

$\int d\mathbf{u} = \int \gamma dt \Leftrightarrow \mathbf{u} = \boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{t}$, είναι η συναρτησιακή σχέση που συνδέει την εξαρτημένη μεταβλητή **u** με την ανεξάρτητη μεταβλητή t, ενώ γ = σταθερά. (εννοείται εδώ C=0, δηλαδή αρχική ταχύτητα U_0=C=0).

γ) Η Δ.Ε. $L\frac{dI}{dt}+RI=E$, περιγράφει τη ροή ηλεκτρικού ρεύματος σ' ένα απλό κύκλωμα, με μια αντίσταση R, μια αυτεπαγωγή L και μια ηλεκτρεγερτική δύναμη E.

1. ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ

1) Διαφορική εξίσωση:

Ονομάζουμε γενικά διαφορική εξίσωση (Δ.Ε.) κάθε εξίσωση που περιέχει παραγώγους ή διαφορικά συναρτήσεως μιάς ή περισσοτέρων μεταβλητών.

Αν η άγνωστη συνάρτηση είναι μιάς ανεξάρτητης μεταβλητής, οπότε θα περιέχει μόνο απλά διαφορικά ή απλές παραγώγους, λέγεται **συνήθης Δ.Ε.**,

π.χ.

$$3x = y'' + 7xy', \qquad dy + (xy - \sigma\upsilon\nu x)dx = 0.$$

ενώ αν η άγνωστη συνάρτηση εξαρτάται από πολλές μεταβλητές, τότε λέγεται **Δ.Ε. με μερικές παραγώγους** (αφού αναγκαστικά θα περιέχει μερικές παραγώγους της άγνωστης συνάρτησης).

π.χ.

$$\frac{\vartheta^2 V}{\vartheta x^2}+\frac{\vartheta^2 V}{\vartheta y^2}+\frac{\vartheta^2 V}{\vartheta z^2}=0,$$ με V=V(x, y, z), η γνωστή Δ.Ε. του Laplace.

Στα επόμενα, θα ασχοληθούμε κατά βάση μόνο με συνήθεις Δ.Ε., ενώ άγνωστη συνάρτηση θα εννοείται εκείνη που οι παραγωγοί της (ή τα διαφορικά της) εμφανίζονται στην εξίσωση.

2) Τάξη - Βαθμός Δ.Ε.:

Τάξη μιας Δ.Ε., λέγεται η τάξη της ανώτερης παραγώγου που υπάρχει στην εξίσωση.

Βαθμός μιας Δ.Ε., (που μπορεί να γραφτεί υπό μορφή πολυωνύμου ως προς την συνάρτηση και τις παραγώγους της), λέγεται η μεγαλύτερη δύναμη στην οποία είναι υψωμένη η ανώτερης τάξης παράγωγος. (Αν μια Δ.Ε., δε μπορεί να γραφτεί υπό μορφή πολυωνύμου, όπως παραπάνω, τότε δεν διακρίνουμε βαθμό αυτής).

π.χ.

α) $y''+(y')^2+xy=0$, είναι $2^{ης}$ τάξης και $1^{ου}$ βαθμού.

β) $\frac{dy}{dx} = 8x^2y^3 + 6$, είναι $1^{ης}$ τάξης και $1^{ου}$ βαθμού.

γ) $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 - \frac{2}{x}\frac{dy}{dx} = 0$, είναι $2^{ης}$ τάξης και $2^{ου}$ βαθμού.

δ) $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^3 + 5x\left(\frac{dy}{dx}\right)^4 + 8xy\frac{dy}{dx} = 3x + 5$, είναι $2^{ης}$ τάξης και $3^{ου}$ βαθμού.

ε) $e^y \cdot y'' + 2(y')^2 = 1$, $2^{ης}$ τάξης,αλλά αδιαβάθμητη.

δεν μιλάμε για βαθμό,αφού ο παράγοντας e^y δεν επιτρέπει να γραφτεί η Δ.Ε. υπό μορφή πολυωνύμου ως προς τη συνάρτηση και τις παραγώγους της.

ζ) $y'' + \sqrt{y'} + xy = 0$, $2^{ης}$ τάξης και $2^{ου}$ βαθμού (γιατί;).

3) Λύση μιας Δ.Ε.:

α) Γενική λύση (ή γενικό ολοκλήρωμα) μιας Δ.Ε. **ν-οστής τάξης** (γενικά), $F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(\nu)}) = 0$, (1),

λέγεται κάθε συνάρτηση $y = \varphi(x, c_1, c_2, \ldots, c_\nu)$, με $c_1, c_2, \ldots, c_\nu$, αυθαίρετες σταθερές, (2), τέτοια ώστε, απαλείφοντας τις σταθερές με διαδοχικές παραγωγίσεις να προκύπτει η (1), ή αλλιώς αντικαθιστώντας τη (2) στην (1) να την επαληθεύει **ταυτοτικά**.

Εξειδικεύοντας τον παραπάνω ορισμό για Δ.Ε. **$1^{ης}$ τάξης** που θα μας απασχολήσουν κατά βάση στα επόμενα, έχουμε:

Ονομάζουμε **γενική λύση** μιας Δ.Ε. $1^{ης}$ τάξης, δηλαδή της μορφής $F(x, y, y') = 0$ ή αλλιώς $y' = f(x, y)$, (1α), με π.ο.=Α, κάθε συνάρτηση $y = \varphi(x, c)$, με c = αυθαίρετη σταθερά, (2α), τέτοια ώστε: i) να ικανοποιεί τη Δ.Ε. (1α), για οποιοδήποτε c, και ii) για οποιαδήποτε **αρχική συνθήκη** $y(x_0) = y_0$, με $(x_0, y_0) \in A$, υπάρχει μια και μοναδική τιμή $c = c_0$, για την οποία η λύση $y = \varphi(x, c_0)$ ικανοποιεί τη δεδομένη αρχική συνθήκη.

β) **Μερική λύση** (ή μερικό ολοκλήρωμα) μιας Δ.Ε., λέγεται μια απ' τις άπειρες συναρτήσεις, που προκύπτουν απ' τη γενική λύση, για κάποιες συγκεκριμμένες αυθαίρετες σταθερές.

(Ειδικά για τις $1^{ης}$ τάξης Δ.Ε. $y' = f(x,y)$, κάθε λύση $y = \varphi(x, c_0)$, που προκύπτει απ' τη γενική λύση $y = \varphi(x,c)$ για μια συγκεκριμμένη τιμή της σταθεράς $c = c_0$, λέγεται μερική λύση).

γ) **Ιδιάζουσα λύση** (ή ιδιάζον ολοκλήρωμα) μιας Δ.Ε., λέγεται κάθε συνάρτηση που επαληθεύει τη Δ.Ε., αλλά δεν προκύπτει απ' τη γενική λύση της για καμμιά τιμή των σταθερών c_i (δηλαδή πρόκειται για μια ειδική λύση, περά απ' τη γενική λύση).

π.χ.

i) Της Δ.Ε. $yy' - 4xy = 0$, η γενική λύση είναι $y = 2x^2 + c$, ενώ η $y = 0$ είναι ιδιάζουσα λύση, αφού επαληθεύει τη Δ.Ε. χωρίς να προκύπτει απ' τη γενική λύση για οποιαδήποτε c.

ii) Επίσης η Δ.Ε. $2(y')^2 + xy' - y = 0$, που βρίσκεται πως έχει γενική λύση $y = cx + 2c^2$, έχει και ιδιάζουσα λύση τη συνάρτηση $y = -x^2/8$ που επαληθεύει τη Δ.Ε. χωρίς όμως νά' ναι μερική λύση της, αφού για καμμιά τιμή της σταθεράς c δεν προκύπτει η $y = -x^2/8$ απ' τη γενική λύση.

iii) Εξ άλλου, η Δ.Ε. $y' - 4x = 0$, που βρίσκεται πως έχει γενική λύση $y = 2x^2 + c$, για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου c παίρνουμε άπειρες μερικές λύσεις, όπως τις: $y = 2x^2 + 1$, $y = 2x^2 - 10$, $y = 2x^2$, $y = 2x^2 - 3/4, \ldots$

Αντίστροφα, αν $y = c_1e^{2x} + c_2e^{-2x}$ είναι η γενική λύση κάποιας Δ.Ε., τότε για να βρούμε αυτή τη Δ.Ε., παραγωγίζουμε τόσες φορές, όσες αυθαίρετες σταθερές έχει η γενική λύση της, άρα εδώ 2 φορές (αφού c_1, c_2), οπότε έχουμε:

$$y' = 2c_1e^{2x} - 2c_2e^{-2x} \text{ και } y'' = 4\left(c_1e^{2x} + c_2e^{-2x}\right) = 4y .$$

Άρα η ζητούμενη Δ.Ε., που έχει γενική λύση τις συναρτήσεις $y = c_1e^{2x} + c_2e^{-2x}$, είναι: $y'' - 4y = 0$.

Σημείωση: Λύση (πλήρης) ή ολοκλήρωση μιας Δ.Ε., λέγεται η εύρεση της γενικής λύσης αλλά και των πιθανών ιδιαζουσών λύσεων της Δ.Ε..

4) Άλλες αξιοσημείωτες έννοιες:

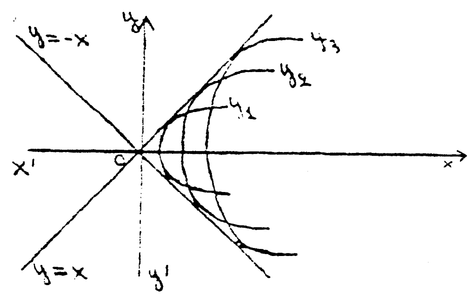
α) Ολοκληρωτική καμπύλη μιας Δ.Ε., λέγεται η γραφική παράσταση οποιασδήποτε μερικής της λύσης (προφανώς κάθε μερική λύση είναι μια συνάρτηση).

Κατ' επέκταση, το σύνολο των ολοκληρωτικών καμπύλων μιας Δ.Ε., λέγεται και **οικογένεια καμπυλών** (ή σμήνος ολοκληρωτικών γραμμών). Δηλαδή η οικογένεια καμπυλών είναι η γεωμετρική έκφραση, της γενικής λύσης μιας Δ.Ε..

Εξ' άλλου, η καμπύλη μιας ιδιάζουσας λύσης μιας Δ.Ε., λέγεται ιδιάζουσα καμπύλη ή **περιβάλλουσα** (enveloppe) και έχει την εξής ιδιότητα: σε κάθε σημείο της, δέχεται κοινή εφαπτομένη με μια ολοκληρωτική καμπύλη της γενικής λύσης.

π.χ.

Η Δ.Ε. $y(y')^2 + y = 2xy'$, έχει (όπως θα δούμε στα επόμενα) γενική λύση: $y^2 = 2cx - c^2$ και ιδιάζουσες λύσεις $y = \pm x$. Οι μερικές λύσεις $y_1, y_2, y_3, \ldots$, έχουν ολοκληρωτικές καμπύλες όπως στο διπλανό σχήμα και το σύνολό τους αποτελεί την οικογένεια των καμπυλών της Δ.Ε., ενώ οι ιδιάζουσες λύσεις είναι οι περιβάλλουσες ευθείες $y = \pm x$, που σε κάθε σημείο τους εφάπτονται με μια ολοκληρωρική καμπύλη.



β) Ισοκλινής μιας Δ.Ε., λέγεται ο γεωμετρικός τόπος των σημείων που έχουν σταθερή κλίση, ενώ ονομάζουμε **πεδίο διευθύνσεων**, ας πούμε της $y' = f(x,y)$ με γενική μονοπαραμετρική λύση τη σταθερή $y = \varphi(x,c)$, το σύνολο των διευθύνσεων των άπειρων μερικών λύσεών της (υπενθυμίζεται ότι: για μια συγκεκριμένη τιμή της c, έστω c_0, έχουμε τη μερική λύση, $y = \varphi(x,c_0)$ κι' ότι σε κάθε σημείο $M_0(x_0, \varphi(x,c_0))$ αυτής της ολοκληρωτικής καμπύλης, αντιστοιχεί μια εφαπτομένη ευθεία με κλίση που δίνεται απ' τη Δ.Ε., δηλαδή $y'(x_0,y_0) = f(x_0,y_0)$.

γ) Αρχικές συνθήκες Δ.Ε.:

Αρχικές συνθήκες μιας Δ.Ε., είναι η εύρεση εκείνης της μερικής λύσης της Δ.Ε. $y' = f(x,y)$ που ικανοποιεί κάποια δεδομένη πρόσθετη συνθήκη, π.χ. $y(x_o) = y_0$.

Το πρόβλημα των αρχικών συνθηκών διατυπώνεται συνήθως ισοδύναμα και ως εξής: να βρεθεί η ολοκληρωτική καμπύλη (απ' την οικογένεια των καμπύλων της γενικής λύσης της Δ.Ε.) που διέρχεται από δεδομένο σημείο $M_0(x_0, y_0)$.

Υπ' όψη, ότι από δοσμένο σημείο θα διέρχεται μια το πολύ ολοκληρωτική καμπύλη της Δ.Ε..

Προβλήματα με αρχικές συνθήκες (που λέγονται και προβλήματα του Cauchy), είναι πολύ συχνά στις τεχνικές εφαρμογές και λύνονται με την εύρεση των κατάλληλων τιμών των αυθαίρετων σταθερών μέσω της γενικής λύσης.

π.χ.

i) ***Να βρεθεί η ολοκληρωτική καμπύλη που περνά απ' το σημείο M(3,2), της Δ.Ε. $y' + y = 0$, με γενική λύση $y = ce^{-x}$.***

Λύση

Η $y(x) = ce^{-x}$ δίνει όλες τις λύσεις της Δ.Ε., με c = αυθαίρετη σταθερά. Αρκεί λοιπόν, να βρούμε τη κατάλληλη τιμή της c, ώστε η ολοκληρωτική καμπύλη να περνάει απ' το (3,2).

Άρα προφανώς, θα πρέπει: $y(3) = 2$ ή $ce^{-3} = 2$ ή $\mathbf{c = 2e^3}$, (1). Οπότε η ζητούμενη ολοκληρωτική καμπύλη είναι: $y(x) = ce^{-x} \overset{(1)}{=} 2e^3e^{-x} = 2e^{3-x}$.

ii) ***Να βρεθεί η μερική λύση της Δ.Ε. $y' - 4x = 0$, ώστε για $x = 1$, νά είναι $y = 5$, όταν η γενική της λύση είναι: $y = 2x^2 + c$.***

Λύση

Για $x = 1$ και $y = 5$, δηλαδή για το σημείο (1,5), η γενική λύση δίνει: $5 = 2 \cdot 1^2 + c$ ή $c = 5 - 2$ ή $\mathbf{c = 3}$.

Άρα η ζητούμενη μερική λύση (ή η ολοκληρωτική καμπύλη) που περνάει απ' το σημείο (1,5), είναι: $y = 2x^2 + 3$.

iii) Να προσδιοριστούν οι σταθερές c_1, c_2, ώστε η $y = c_1e^x + c_2e^x x + x^2e^x$ να ικανοποιεί τις συνθήκες: $y(1) = 1$, $y'(1) = -1$.

Λύση

Απ' τη δοθείσα $y(1) = 1$, παίρνουμε: $1 = c_1e^1 + c_2e^1 \cdot 1 + 1^2e^1 \Leftrightarrow$ $\mathbf{1 = c_1e + c_2e + e}$, (1), ενώ είναι: $y'(x) = c_1e^x + c_2e^x x + c_2e^x + 2xe^x + x^2e^x$, οπότε:

$$y'(1) = -1 \Leftrightarrow c_1e^1 + c_2e^1 \cdot 1 + c_2e^1 + 2 \cdot 1e^1 + 1^2e^1 = 1 \Leftrightarrow \mathbf{c_1e + 2c_2e + 3e = 1}, \quad (2).$$

Τέλος, λύνοντας το σύστημα των (1) και (2), βρίσκουμε: $c_1 = 1 + \dfrac{3}{e}$, $c_2 = -2 - \dfrac{2}{e}$.

2. ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ 1ης ΤΑΞΗΣ

2.1. Δ.Ε. με χωριζόμενες μεταβλητές - (Δ.Ε.Χ.Μ.)

Οι εξισώσεις αυτές είναι της μορφής:

$\boxed{f(x)dx + g(y)dy = 0}$ (A)

και η γενική τους λύση προκύπτει αμέσως με ολοκλήρωση:

$$\int f(x)dx + \int g(y)dy = c$$

[Συνήθως, αρχικά αυτές οι συναρτήσεις είναι της μορφής $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$, (1) και αν στις συναρτήσεις P(x,y) και Q(x,y) μπορεί να γίνει χωρισμός των μεταβλητών και η Δ.Ε. (1) να μπορεί να πάρει τη μορφή $f_1(x)g_2(y)dx + f_2(x)g_1(y)dy = 0$, τότε **πολλαπλασιάζοντάς την επί** $\frac{1}{f_2(x)g_2(y)}$ καταλήγουμε στη μορφή $\frac{f_1(x)}{f_2(x)}dx + \frac{g_1(y)}{g_2(y)}dy = 0$, δηλαδή στη μορφή (A) $f(x)dx + g(y)dy = 0$, οπότε με ολοκλήρωση καταλήγουμε στη γενική λύση.]

Παραδείγματα:

1) Να βρεθεί η γενική λύση της Δ.Ε.: $x^2(y+1)dx + y^2(x-1)dy = 0$. *(1)*

Λύση

Διαιρούμε αμφότερα τα μέλη της δοθείσας Δ.Ε. (1) με $(y+1)(x-1)$ και έχουμε:

$\frac{x^2}{x-1}dx + \frac{y^2}{y+1}dy = 0$ (δηλαδή είμαστε έτσι στη μορφή (A)), ολοκληρώνουμε

$$\int \frac{x^2}{x-1}dx + \int \frac{y^2}{y+1}dy = c$$

[Σχετικά με την αυθαίρετη σταθερά c, είναι συγκεκριμμένα: $c=c_1-c_2-c_3$ δηλαδή $\left(\int \frac{x^2}{x-1}dx + c_2\right) + \left(\int \frac{y^2}{y+1}dy + c_3\right) = \int 0dx + c_1$]

[Υπενθυμίζεται εδώ, προκειμένου για την ολοκλήρωση, ότι όταν ο βαθμός του πολυωνύμου του αριθμητή είναι μεγαλύτερος ή ίσος του βαθμού του παρανομαστή, τότε πριν ολοκληρώσουμε διαιρούμε τον αριθμητή δια του παρανομαστή, οπότε: $\frac{x^2}{x-1} = x+1+\frac{1}{x-1}$ και $\frac{y^2}{y+1} = y-1+\frac{1}{y+1}$].

Οπότε έχουμε:

$$\int \frac{x^2}{x-1}dx + \int \frac{y^2}{y+1}dy = c \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \int\left(x+1+\frac{1}{x-1}\right)dx + \int\left(y-1+\frac{1}{y+1}\right)dy = c \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \int xdx + \int 1dx + \int \frac{1}{x-1}dx + \int ydy - \int 1dy + \int \frac{1}{y+1}dy = c$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^{1+1}}{1+1} + \int dx + \int \frac{d(x-1)}{x-1} + \frac{y^{1+1}}{1+1} - \int dy + \int \frac{d(y+1)}{y+1} = c$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\frac{\mathbf{x^2}}{\mathbf{2}} + \mathbf{x} + \ell\mathbf{n}|\mathbf{x}-\mathbf{1}| + \frac{\mathbf{y^2}}{\mathbf{2}} - \mathbf{y} + \ell\mathbf{n}|\mathbf{y}+\mathbf{1}| = \mathbf{c}}, \quad (2)$$

που είναι και η ζητούμενη γενική λύση της Δ.Ε. (1),

2) Να λυθεί η Δ.Ε. $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{3y}{2x}$ ***(1).***

Λύση

Η (1) (με τη προϋπόθεση βέβαια ότι $xy \neq 0$), γίνεται: $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{3y}{2x}$ ή $\dfrac{2dy}{y} = -\dfrac{3dx}{x}$ ή $\dfrac{3dx}{x} + \dfrac{2dy}{y} = 0$, που προφανώς είναι της μορφής (Α) με χωριζόμενες μεταβλητές, όπου $f(x) = \dfrac{3}{x}$ και $g(y) = \dfrac{2}{y}$, οπότε ολοκληρώνοντας έχουμε:

$$\int \frac{3dx}{x} + \int \frac{2dy}{y} = c \Leftrightarrow 3\int \frac{dx}{x} + 2\int \frac{dy}{y} = c$$

$$\Leftrightarrow 3\ell n|x| + 2\ell n|y| = c \Leftrightarrow \ell n|x|^3 + \ell n|y|^2 = c$$

$$\Leftrightarrow \ell n\left|x^3y^2\right| = c = \ell n c_1 \quad (\text{όπου } c = \ell n c_1)$$

$\Leftrightarrow \left|x^3y^2\right| = c_1 \Leftrightarrow \boxed{\mathbf{y^2} = \dfrac{\mathbf{c_1}}{|\mathbf{x^3}|}}$, (2) που είναι βέβαια και η γενική λύση της (1), δηλαδή η ζητούμενη συναρτησιακή σχέση μεταξύ των x, y.

3) Να λυθεί η Δ.Ε. $(x-1)^2ydx + x^2(y+1)dy = 0$ (1).

Λύση

Αν $xy \neq 0$, διαιρούμε με x^2y και η (1) γίνεται: $\frac{(x-1)^2}{x^2}dx + \frac{y+1}{y}dy = 0$, δηλαδή είναι της μορφής (A) των χωριζομένων μεταβλητών όπου $f(x) = \frac{(x-1)^2}{x^2}$ και $g(y) = \frac{y+1}{y}$ οπότε με άμεση ολοκλήρωση έχουμε:

$$\frac{(x-1)^2}{x^2}dx + \frac{y+1}{y}dy = 0 \Leftrightarrow \int \frac{x^2-2x+1}{x^2}dx + \int\left(1+\frac{1}{y}\right)dy = c$$

$$\Leftrightarrow \int 1dx - 2\int\frac{dx}{x} + \int\frac{dx}{x^2} + \int 1dy + \int\frac{dy}{y} = c$$

$$\Leftrightarrow x - 2\ell n|x| + \frac{x^{-2+1}}{-2+1} + y + \ell n|y| = c$$

$\Leftrightarrow x - 2\ell n|x| - \frac{1}{x} + y + \ell n|y| = c$, (2) που είναι και η ζητούμενη γενική λύση της Δ.Ε. (1).

4) Να λυθεί η Δ.Ε. $(1+x^3)dy - x^2ydx = 0$ (1).

Λύση

Αν $y(1+x^3) \neq 0$, τότε διαιρώντας την (1) μ' αυτό έχουμε: $\frac{dy}{y} - \frac{x^2dx}{1+x^3} = 0$, που είναι Δ.Ε. χωριζομένων μεταβλητών, οπότε:

$$\int\frac{x^2dx}{1+x^3} - \int\frac{dy}{y} = c \Leftrightarrow$$

[Εισάγω το x^2 στο διαφορικό αφού πρώτα το ολοκληρώσω, δηλαδή $\int x^2dx = \int d\left(\frac{x^3}{3}\right)$]

$$\Leftrightarrow \int\frac{d\left(\frac{x^3}{3}\right)}{1+x^3} - \ell n|y| = c \Leftrightarrow$$

[Προσθέτω στο διαφορικό το 1, κτλ]

$$\Leftrightarrow \frac{1}{3}\int\frac{d(x^3+1)}{1+x^3} - \ell n|y| = c \Leftrightarrow \frac{1}{3}\ell n|x^3+1| - \ell n|y| = c \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ell n|x^3+1| - 3\ell n|y| = 3c \Leftrightarrow \ell n\frac{|x^3+1|}{|y|^3} = \ell n c_1 = 3c \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow \boxed{|y|^3 = \frac{|x^3+1|}{c_1}}$, πού 'ναι και η γενική λύση.

5) Να βρεθεί η καμπύλη ολοκλήρωσης της Δ.Ε. $e^x dx - ydy = 0$ (1), που περνά από το σημείο (0,1).

Λύση

Προφανώς ζητείται η μερική λύση με αρχικές συνθήκες x=0, y=1. Οπότε πρώτα θα βρούμε τη γενική λύση της (1) που είναι Δ.Ε. χωριζομένων μεταβλητών,

δηλαδή: $\int e^x dx - \int ydy = c \Leftrightarrow e^x - \frac{y^2}{2} = c \Leftrightarrow y^2 = 2e^x - 2c$ (γενική λύση).

Οπότε για να βρούμε τη ζητούμενη καμπύλη ολοκλήρωσης (δηλαδή τη μερική λύση με αρχικές συνθήκες (0,1)), έχουμε θέτοντας στη γενική λύση τις αρχικές συνθήκες, $x=0, y=1$:

$y^2 = 2e^x - 2c \Leftrightarrow 1^2 = 2e^0 - 2c \Leftrightarrow 1 = 2 - 2c \Leftrightarrow -2c = -1 \Leftrightarrow c = \frac{1}{2}$, οπότε η γενική

λύση για $c = \frac{1}{2}$ μας δίνει την ζητούμενη καμπύλη ολοκλήρωσης:

$y^2 = 2e^x - 2\frac{1}{2} \Leftrightarrow \boxed{y^2 = 2e^x - 1}$.

6) Της Δ.Ε. του προηγούμενου παραδείγματος (4), $(1 + x^3)dy - x^2ydx = 0$, να βρεθεί η μερική λύση που ικανοποιεί τη συνθήκη για x=1, y=2 (δηλαδή να βρεθεί η ολοκληρωτική καμπύλη που διέρχεται απ' το σημείο (1,2)).

Λύση

Βρήκαμε ήδη στο παράδειγμα (4), ότι η γενική λύση της Δ.Ε. είναι: $|y|^3 = \frac{|x^3 + 1|}{c_1}$ ή

υποθέτωντας ότι τηρούνται οι αναγκαίες προϋποθέσεις πιο απλά $y^3 = \frac{x^3 + 1}{c_1}$ (α)

Οπότε θέτουμε στη γενική λύση (α), x=1 και y=2, και έχουμε:

$2^3 = \frac{1^3 + 1}{c_1} \Leftrightarrow c_1 = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$.

Τη τιμή αυτή $\mathbf{c_1} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}}$ βάζουμε στη γενική λύση και βρίσκουμε τη μερική λύση:

$\boxed{y^3 = (x^3 + 1)/4}$.

7) Να λυθεί η $y' = \dfrac{x+1}{y^4+1}$, *(1)*

Λύση

Γράφουμε τη Δ.Ε. (1) στη διαφορική της μορφή, αντικαθιστώντας δηλαδή όπου $y' = \dfrac{dy}{dx}$ καί έχουμε: $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x+1}{y^4+1} \Leftrightarrow (x+1)dx - (y^4+1)dy = 0$, δηλαδή είμαστε στη μορφή (A) των χωριζομένων μεταβλητών $[f(x)dx + g(y)dy = 0]$, οπότε με άμεση ολοκλήρωση:

$\int (x+1)dx - \int (y^4+1)dy = c \Leftrightarrow \boxed{\dfrac{x^2}{2} + x - \dfrac{y^5}{5} - y = c}$, που είναι και η ζητούμενη γενική λύση σε πλεγμένη βέβαια μορφή (προφανώς δεν λύνεται αλγεβρικά ως προς y).

8) Να λυθεί η $y' = 5y$, *(1)*

Λύση

$(1) \Leftrightarrow \dfrac{dy}{dx} = 5y \Leftrightarrow dx - \dfrac{dy}{5y} = 0$, απ' όπου

$\int dx - \dfrac{1}{5}\int \dfrac{dy}{y} = c \Leftrightarrow x - \dfrac{1}{5}\ell ny = c \Leftrightarrow \ell ny = -5c + 5x \Leftrightarrow \boxed{\ell ny = 5(x-c)}$.

9) Σ' ένα δωμάτιο θερμοκρασίας 20°C, ένα σώμα ψύχεται από 100°C σε 60°C μέσα σε 20 min.

Ζητείται να βρεθεί: i) ο νόμος ψύξης του σώματος, και ii) σε πόσα λεπτά η θερμοκρασία του θα πέσει στους 30°C, (κάθε μεταβολή της θερμοκρασίας του δωματίου, θεωρείται αμελητέα).

Λύση

Θεωρώντας γνωστό τον νόμο του Newton, (ότι δηλαδή η ταχύτητα ψύξης ενός σώματος είναι ανάλογη της διαφοράς της θερμοκρασίας του σώματος και της θερμοκρασίας του περιβάλλοντος), άρα μπορούμε να γράψουμε:

θερμ. περιβάλλοντος

$\dfrac{dT}{dt} = \kappa(T-20)$ ή $\dfrac{dT}{T-20} = \kappa dt \Rightarrow \int \dfrac{dT}{T-20} = \int \kappa dt + c_1$ ή $\ell n(T-20) = \kappa t + \ell nc$, (1).

(T = θερμοκρασία σώματος)

i) Οπότε για t=0 και T=100, βρίσκουμε απ' την (1), $\boxed{c = 80}$, ενώ για t=20 και T=60, έχουμε $\ell n(60-20) = 20\kappa + \ell n80$ ή $\ell n40 = 20\kappa + \ell n80$ ή $-20\kappa = \ell n80 - \ell n40$ ή $-20\kappa = \ell n\frac{80}{40}$ ή $-20\kappa = \ell n2$ ή τελικά $\boxed{\kappa = \frac{-\ell n2}{20}}$.

Οπότε η (1) γίνεται: $\ell n(T-20) - \ell nc = \kappa t$ ή $\ell n\left(\frac{T-20}{c}\right) = \kappa t \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{T-20}{c} = e^{\kappa t} \Leftrightarrow T - 20 = c \cdot e^{\kappa t} \Leftrightarrow T = 20 + 80e^{-\frac{\ell n2}{20}t} \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow T = 20 + 80\left(e^{-\ell n2}\right)^{\frac{t}{20}} = 20 + 80\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{20}}$, δηλαδή τελικά ο ζητούμενος νόμος είναι:

$$\boxed{T = 20 + 80\left(\frac{1}{2}\right)^{t/20}}, (2).$$

ii) Απ' τον (2) πλέον, για T=30°, έχουμε:

$30 = 20 + 80\left(\frac{1}{2}\right)^{t/20}$ ή $10 = 80\left(\frac{1}{2}\right)^{t/20}$ ή $\frac{1}{8} = \left(\frac{1}{2}\right)^{t/20}$ ή $\left(\frac{1}{2}\right)^{3} = \left(\frac{1}{2}\right)^{t/20}$ ή $\frac{t}{20} = 3$ ή $\boxed{t = 60}$, δηλαδή η θερμοκρασία του σώματος θα πέσει σε 30°C σε 60 min.

10) Να λυθεί η Δ.Ε. $y' = \varepsilon\varphi x \varepsilon\varphi y$, (1).

Λύση

Είναι $\frac{dy}{dx} = \varepsilon\varphi x\varepsilon\varphi y$ ή $\sigma\varphi y dy = \varepsilon\varphi x dx \Rightarrow \int \sigma\varphi y dy = \int \varepsilon\varphi x dx$ ή $\ell n|\eta\mu y| = -\ell n|\sigma\upsilon\nu x| + \ell nc$ ή $\ell n|\eta\mu y| = \ell n\frac{c}{|\sigma\upsilon\nu x|}$ ή $\eta\mu y = \frac{c}{\sigma\upsilon\nu x}$ ή $\boxed{\eta\mu y\,\sigma\upsilon\nu x = c}$.

2.2. Ομογενείς Δ.Ε. (Δ.Ε.Ο.)

Ομογενείς Δ.Ε. ($1^{ης}$ τάξης) ως προς x και y λέγεται κάθε Δ.Ε. που έχει ή μπορεί να πάρει τη μορφή: $\boxed{f(x,y)dx + g(x,y)dy = 0}$ (1)

και όπου οι συναρτήσεις f(x,y), g(x,y) είναι ομογενείς ως προς x, y.

[Οι συναρτήσεις f(x,y), g(x,y) λέγονται ομογενείς, όταν είναι του ίδιου βαθμού ως προς τις μεταβλητές x και y]

Μιά συνάρτηση f(x,y), γενικότερα λέγεται ομογενής ν βαθμού, εάν ισχύει $f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^{\nu} \cdot f(x,y)$. Μπορεί τότε, να γραφεί στη μορφή: $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$.

π.χ. $2xdx - (3x - y)dy = 0$, είναι ομογενείς $1^{ου}$ βαθμού.

$(x^2 - y^2)dx - 2xydy = 0$, είναι ομογενείς $2^{ου}$ βαθμού.

$(x^3 - y^3)dx - 3xy^2dy = 0$, είναι ομογενείς $3^{ου}$ βαθμού.

$(7x - y)y' = 3x \Leftrightarrow (7x - y)\frac{dy}{dx} = 3x \Leftrightarrow (7x - y)dy = 3xdx \Leftrightarrow 3xdx - (7x - y)dy = 0$,

είναι ομογενείς $1^{ου}$ βαθμού.

$(x^2 + xy)dx + y^2dy = 0$, είναι ομογενείς $2^{ου}$ βαθμού.

Για την επίλυση τέτοιων Δ.Ε. ακολουθούμε την εξής διαδικασία:

α) Εφ' όσον η Δ.Ε. είναι ήδη στη μορφή (1), κάνουμε τον μετασχηματισμό $\boxed{y = tx} \Rightarrow dy = d(tx) \Leftrightarrow y'dy = t'xdt + tx'dx \Leftrightarrow \boxed{dy = xdt + tdx}$ και αντικαθιστούμε στην (1).

β) Κάνουμε τις πράξεις και απλοποιούμε με x^{ν}, όπου ν ο βαθμός ομογένειας.

γ) Βγάζουμε κοινό παράγοντα αφ' ενός μεν το dx, αφ' ετέρου το xdt, **οπότε προκύπτει Δ.Ε. χωριζομένων μεταβλητών**, κ.λ.π.

Παρατηρήσεις:

i) Πολλές φορές στη λύση Δ.Ε.Ο., είναι προτιμότερο αντί της αντικατάστασης y=tx, να θέσουμε $x = yt \Rightarrow dx = ydt + tdy$. Η κατάλληλη εκλογή, είναι θέμα εμπειρίας.

ii) Ο δοθείς ορισμός μιας Δ.Ε.Ο. αφορά μόνο αυτές που είναι $1^{ης}$ τάξης, ενώ για οποιασδήποτε τάξης Δ.Ε.Ο. ο γενικός ορισμός είναι διαφορετικός.

Παραδείγματα:

1) Να λυθεί η Δ.Ε. $(x^2 - xy + y^2)dx + x^2dy = 0$, *(2)*

Λύση

Πρόκειται προφανώς για Δ.Ε.Ο. στη μορφή $f(x,y)dx + g(x,y)dy = 0$, όπου $f(x,y)dx = x^2 - xy + y^2$ και $g(x,y) = x^2$ είναι ομογενείς συναρτήσεις ως προς x, y, $2^{ου}$ βαθμού.

Οπότε, θέτουμε $y = xt \Rightarrow dy = xdt + tdx$ και αντικαθιστώντας στη (2) έχουμε:

$$\left(x^2 - x(tx) + (tx)^2\right)dx + x^2(xdt + tdx) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(x^2 - x^2t + x^2t^2\right)dx + x^3dt + x^2\underline{tdt} = 0 \Leftrightarrow$$

(απλοποιώ με x^2, υποθέτοντας $x \neq 0$)

$$\Leftrightarrow \left(1 - t + t^2\right)dx + xdt + tdx = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow dx - tdx + t^2dx + xdt + tdx = 0$$

$\Leftrightarrow \left(t^2 + 1\right)dx + xdt = 0$ (3), που είναι Δ.Ε.Χ.Μ., οπότε πολλαπλασιάζω επί

$\dfrac{1}{x \cdot \left(t^2 + 1\right)}$ $\left(= \dfrac{1}{f_2(x) \cdot g_2(t)},\ \text{δες Δ.Ε.Χ.Μ.}\right)$, και έχω:

$$(3) \Leftrightarrow \frac{dx}{x} + \frac{dt}{t^2 + 1} = 0 \Rightarrow \int \frac{dt}{t^2 + 1} = -\int \frac{dx}{x} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \text{τοξεφ}t = -\ell nx + c \Leftrightarrow \text{τοξεφ}\frac{y}{x} = c - \ell nx \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \text{εφ}\left(\text{τοξεφ}\frac{y}{x}\right) = \text{εφ}(c - \ell nx) \Leftrightarrow \frac{y}{x} = \text{εφ}(c - \ell nx) \Leftrightarrow \boxed{\mathbf{y = x\text{εφ}(c - \ell nx)}}.$$

2) Να λυθεί η Δ.Ε. $(y^2 - x^2)dx + xydy = 0$, *(1)*

Λύση

Αυτή είναι προφανώς Δ.Ε.Ο. $2^{ου}$ βαθμού. Αντικαθιστούμε $y = tx$ και $dy = tdx + xdt$, οπότε: $\left(t^2x^2 - x^2\right)dx + xtx(tdx + xdt) = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow t^2x^2dx - x^2dx + t^2x^2dx + tx^3dt = 0$$

(απλοποιώ με $x^v = x^2$, εφ' όσον $x \neq 0$)

$\Leftrightarrow t^2dx - dx + t^2dx + txdt = 0$

$\Leftrightarrow \left(2t^2 - 1\right)dx + txdt = 0,$

(πολλαπλασιάζω επί $\dfrac{1}{x \cdot \left(2t^2 - 1\right)} = \dfrac{1}{f_2(x) \cdot g_2(t)}$, υποτίθεται $2t^2-1 \neq 0$)

$\Leftrightarrow \dfrac{dx}{x} + \dfrac{tdt}{2t^2 - 1} = 0 \Rightarrow \int \dfrac{tdt}{2t^2 - 1} = -\int \dfrac{dx}{x} + c$ ή

ή $\dfrac{1}{4}\int \dfrac{4tdt}{2t^2 - 1} = -\ell nx + c$ ή $\dfrac{1}{4}\ell n\left(2t^2 - 1\right) = c - \ell nx$

ή $\ell n\left(2t^2 - 1\right) = 4\left(c - \ell n\right)\left[= 4c - \ell nx^4 = \ell nc_1 - \ell nx^4\right]$

ή $\ell n\left(2t^2 - 1\right) = \ell n\dfrac{c_1}{x^4}$ ή $\ell n\left(2\dfrac{y^2}{x^2} - 1\right) = \ell n\dfrac{c_1}{x^4}$ ή

ή $\dfrac{2y^2}{x^2} - 1 = \dfrac{c_1}{x^4}$ ή $\boxed{2y^2x^2 - x^4 = c_1}$, που είναι η γενική λύση της (1), σε πλεγμένη βέβαια μορφή.

Παρατήρηση: Υποθέσαμε ότι $2t^2-1 \neq 0 \Leftrightarrow t \neq \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Ας εξετάσουμε τι γίνεται (τι λύσεις έχουμε) όταν $2t^2-1 = 0$ ή $t = \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, δηλαδή $\dfrac{y}{x} = \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ ή $y = \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}x$.

Άρα έχουμε 2 μερικές λύσεις για $t = \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, τις ευθείες $y = \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}x$, που δεν είναι ιδιάζουσες λύσεις αφού μπορούν να προκύψουν απ' τη γενική λύση για τη τιμή $c_1 = 0$, της αυθαίρετης σταθεράς (δηλαδή $2y^2x^2 - x^4 = 0$ ή $y^2 = \dfrac{x^4}{2x^2}$ ή $y^2 = \dfrac{x^2}{2}$ ή $y = \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}x$).

3) Να λυθεί η Δ.Ε. $\left(x^3 + y^3\right)dx + 3xy^2dy = 0$, (1)

Λύση

Πρόκειται για Δ.Ε.Ο. $3^{ου}$ βαθμού ομογένειας, γραμμένη στη μορφή $f(x,y)dx + g(x,y)dy = 0$, όπου $f(x,y)dx = x^3 + y^3$ και $g(x,y) = 3xy^2$ είναι ομογενείς συναρτήσεις $3^{ου}$ βαθμού ως προς x, y.

Οπότε θέτω $y = tx$ και $dy = xdt + tdx$ και έχω:

$\left(x^3 + \left(tx^3\right)\right)dx + 3x(tx)^2(xdt + tdx) = 0$

$\Leftrightarrow x^3dx + t^3x^3dx + 3t^2x^4dt + 3t^3x^3dx = 0$

(απλοποιώ διαε $x^{\nu}=x^3$, αφού $\nu=3$=βαθμός ομογένειας και υποθέτω $x \neq 0$).

$\Leftrightarrow dx + t^3dx + 3t^2xdt + 3t^3dx = 0$

$\Leftrightarrow \left(4t^3 + 1\right)dx + 3t^2xdt = 0$ που είναι Δ.Ε.Χ.Μ.,

(διαιρούμε διά $x\left(4t^3 + 1\right)$, υποθέτωντας $x\left(4t^3 + 1\right) \neq 0$).

$\Leftrightarrow \dfrac{dx}{x} + \dfrac{3t^2dt}{4t^3 + 1} = 0$ ή $\displaystyle\int \frac{dx}{x} + \int \frac{3t^2dt}{4t^3 + 1} = c_1$ ή

ή $\ell nx + \dfrac{1}{4}\displaystyle\int \frac{12t^2dt}{4t^3 + 1} = c_1$ ή $\ell nx + \dfrac{1}{4}\ell n\left(4t^3 + 1\right) = c_1$

ή $4\ell nx + \ell n\left(4t^3 + 1\right) = 4c_1$ ή $\ell n x^4\left(4t^3 + 1\right) = \ell nc$

ή $x^4\left(4t^3 + 1\right) = c$, και αντικαθιστώντας $t = \dfrac{y}{x}$ για να επανέλθουμε στις αεχικές

μεταβλητές παίρνουμε $x^4\left(4\dfrac{y^3}{x^3} + 1\right) = c$ ή $\boxed{4xy^3 + x^4 = c}$, (2) που είναι και η

γενική λύση της (1), σε πλεγμένη μορφή.

Παρατήρηση: Υποθέσαμε παραπάνω $4t^3 + 1 \neq 0$. Αν $4t^3 + 1 = 0$ και περιοριστούμε στις πραγματικές μόνο λύσεις αυτής, βρίσκουμε $t = -4^{-\frac{1}{3}}$ ή $\dfrac{y}{x} = -4^{-\frac{1}{3}}$ ή $y = -4^{-\frac{1}{3}}x$ (3). Η (3) είναι μια μερική λύση της (1), γιατί προκύπτει απ' τη (2) για $c = 0$, (άρα δεν είναι ιδιάζουσα λύση).

4) Να λυθεί η Δ.Ε. $\left(1 + 2e^{\frac{x}{y}}\right)dx + 2e^{\frac{x}{y}}\left(1 - \dfrac{x}{y}\right)dy = 0$, *(1)*

Λύση

Επειδή το κλάσμα $\dfrac{x}{y}$ είναι μηδενικού βαθμού ως προς x,y, εύκολα λοιπόν διαπιστώνουμε ότι η Δ.Ε. (1) είναι ομογενής μηδενικού βαθμού.

Εδώ βολεύει να θέσουμε $\dfrac{x}{y} = t$ (κι' όχι $\dfrac{y}{x} = t$) οπότε $dx = tdy + ydt$ και η (1) γίνεται:

$\left(1+2e^{t}\right)(tdy+ydt)+2e^{t}(1-t)dy=0$

ή $tdy+ydt+2e^{t}tdy+2e^{t}ydt+2e^{t}dy-2e^{t}tdy=0$

ή $\left(t+2e^{t}\right)dy+y\left(1+2e^{t}\right)dt=0$, δηλαδή Δ.Ε.Χ.Μ. (διαιρώ δια $y\left(t+2e^{t}\right)\neq 0$)

ή $\dfrac{dy}{y}+\dfrac{\left(1+2e^{t}\right)}{t+2e^{t}}=0$ ή $\int\dfrac{dy}{y}+\int\dfrac{\left(1+2e^{t}\right)}{t+2e^{t}}=c_1$ ή [είναι $\left(t+2e^{t}\right)'_t=1+2e^{t}$]

ή $\ell ny+\ell n\left(t+2e^{t}\right)=\ell nc$,όπου $c_1=\ell nc$

ή $\ell n\left(t+2e^{t}\right)y=\ell nc$ ή

ή $\left(t+2e^{t}\right)y=c$ ή (θέτοντας $t=\dfrac{x}{y}$)

ή $\left(\dfrac{x}{y}+2e^{\frac{x}{y}}\right)y=c$ ή $\boxed{\mathbf{x+2ye^{\frac{x}{y}}=c}}$, (2), που είναι η γενική λύση της (1).

5) Να λυθεί η Δ.Ε. $xdy-ydx-\sqrt{x^2-y^2}\,dx=0$, *(1)*

Λύση

Η (1) είναι Δ.Ε.Ο. $1^{ου}$ βαθμού. Θέτω $\dfrac{y}{x}=t\Rightarrow dy=tdx+xdt$ και η (1) γίνεται:

$x(tdx+xdt)-txdx-\sqrt{x^2-t^2x^2}\,dx=0$, διαιρώ δια $x\neq 0$, και μετά τις πράξεις έχω:

$xdt-\sqrt{1-t^2}\,dx=0\Leftrightarrow\dfrac{dt}{\sqrt{1-t^2}}-\dfrac{dx}{x}=0$ (ολοκληρώνοντας)

ή $\text{τοξημ}t-\ell nx=c$ ή (για $t=\dfrac{y}{x}$): $\boxed{\text{τοξημ}\,\mathbf{\dfrac{y}{x}}-\ell\mathbf{nx}=\mathbf{c}}$.

6) Να λυθεί η Δ.Ε. $\left(x-y\,\text{συν}\dfrac{y}{x}\right)dx+x\,\text{συν}\dfrac{y}{x}\,dy=0$, *(1)*

Λύση

Πρόκειται για Δ.Ε.Ο. $1^{ου}$ βαθμού. Θέτω $y=xt$ και $dy=xdt+tdx$, οπότε:

$(x-tx\,\text{συν}t)dx+x\,\text{συν}t(xdt+tdx)=0$

(διαιρώ δια $x^{v}=x$) και κάνοντας τις πράξεις έχω:

$dx+x\,\text{συν}t\,dt=0$ ή $\dfrac{dx}{x}+\text{συν}t\,dt=0$

ή $\int \frac{dx}{x} + \int συνt dt = c$ ή $\ell nx + ημt = c$

ή $\boxed{\boldsymbol{\ell nx + ημ\frac{y}{x} = c}}$.

7) Να λυθεί η Δ.Ε. $\left(2x\sinh\frac{y}{x} + 3y\cosh\frac{y}{x}\right)dx - 3x\cosh\frac{y}{x}dy = 0$, *(1)*

Λύση

Η (1) πρόκειται για Δ.Ε.Ο. 1ου βαθμού. Θέτω $\frac{y}{x} = t \Rightarrow dy = xdt + tdx$ και η (1) γίνεται:

$(2x\sinh t + 3tx\cosh t)dx - 3x\cosh t(xdt + tdx) = 0$

ή $2x\sinh t dx + 3tx\cosh t dx - 3x^2\cosh t dt - 3xt\cosh t dx = 0$

(απλοποιώ με x, αν $x \neq 0$)

ή $2\sinh t dx - 3x\cosh t dt = 0$, (διαιρώ δια $x\sinh t$)

ή $\frac{2dx}{x} - \frac{3\cosh t dt}{\sinh t} = 0$, ολοκληρώνω δοθέντος ότι $\int \frac{\cosh t dt}{\sinh t} = \int \cosh t dt = \ell n\sinh t$

και έχω: $2\ell nx - 3\ell n(\sinh t) = \ell nc$

ή $\ell nx^2 - \ell n(\sinh t)^3 = \ell nc$

ή $\ell n\left(\frac{x^2}{(\sinh t)^3}\right) = \ell nc$ ή $x^2 = c(\sinh t)^3$ και αντικαθιστώντας $t = \frac{y}{x}$, έχω τη γενική λύση:

$\boxed{\mathbf{x^2 = c \cdot \sinh^3\left(\frac{y}{x}\right)}}$.

8) Να βρεθεί η μερική λύση της Δ.Ε. $y' = \frac{y}{x} + ημ\frac{y}{x}$, *με αρχικές συνθήκες* $y(1) = \frac{\pi}{2}$.

Λύση

Πρόκειται για Δ.Ε.Ο. μηδενικού βαθμού, ως προς x,y. Θέτοντας $y = tx \Rightarrow dy = xdt + tdx$ και αντικαθιστώντας στη Δ.Ε. έχουμε:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{xdt + tdx}{dx} = t + \eta\mu t \text{ ή}$$

$$\text{ή } xdt + tdx = (t + \eta\mu t)dx \text{ ή } xdt = tdx + \eta\mu t dx - tdx \text{ ή}$$

ή $xdt = \eta\mu t dx$ ή $\dfrac{dt}{\eta\mu t} = \dfrac{dx}{x}$, δηλαδή Δ.Ε.Χ.Μ., οπότε με άμεση ολοκλήρωση:

$$\ell n\left|\varepsilon\varphi\frac{t}{2}\right| = \ell n|x| + \ell n c \text{ ή}$$

$$\text{ή } \frac{t}{2} = \tau o\xi\varepsilon\varphi(cx) \text{ ή } y = 2x\tau o\xi\varepsilon\varphi(cx).$$

Επειδή, για τις αρχικές συνθήκες, $y(1) = \dfrac{\pi}{2}$, άρα $\dfrac{\pi}{2} = 2\tau o\xi\varepsilon\varphi c$ ή $\tau o\xi\varepsilon\varphi c = \dfrac{\pi}{4}$ ή

$c = \varepsilon\varphi\dfrac{\pi}{4}$ ή $\mathbf{c = 1}$, έχουμε ότι η ζητούμενη μερική λύση (ολοκληρωτική καμπύλη) είναι:

$\mathbf{y = 2x}\tau o\xi\varepsilon\varphi\mathbf{x}$.

2.3. ΠΛΗΡΕΙΣ Δ.Ε.

Μια Δ.Ε. της μορφής $\boxed{P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0}$, (1),

θα λέγεται πλήρης, αν το α' μέρος της είναι πλήρες (ή αλλιώς τέλειο) διαφορικό, δηλαδή είναι το ολικό διαφορικό μιας συνάρτησης f(x,y), δηλαδή αν ισχύει:

$df(x,y) = P(x,y)dx + Q(x,y)dy$, (2) [υπενθυμίζεται ότι: $df = 0 \Leftrightarrow f(x,y) = c =$ σταθ. συνάρτηση]

Γνωρίζουμε ήδη (απ' τις ιδιότητες του ολικού διαφορικού), ότι για να ισχύει η (2), αρκεί να ισχύει:

$$\boxed{\frac{\vartheta P}{\vartheta y} = \frac{\vartheta Q}{\vartheta x}} \quad (3)$$

Έτσι αν ισχύει η (3), τότε η (1) θά 'ναι πλήρης Δ.Ε. και αποδεικνύεται πως η γενική της λύση βρίσκεται με άμεση ολοκλήρωση, από τον τύπο:

$$\boxed{f(x,y) = \int_{x_0}^{x} P(x,y)dx + \int_{y_0}^{y} Q(x_0,y)dy + c} \quad (4)$$

όπου x_0, y_0 είναι αυθαίρετα εκλεγόμενοι σταθεροί αριθμοί, (συνήθως παίρνουμε $x_0 = 0$, $y_0 = 0$).

Παράδειγμα:

Να λυθεί η Δ.Ε.: $\boldsymbol{(3x^2 + 2y\eta\mu 2x)dx + (2\eta\mu^2 x + 3y^2)dy = 0}$, ***(α).***

Λύση

Προφανώς η (α) είναι της μορφής (1), ενώ διαπιστώνουμε ότι το α' μέλος της είναι πράγματι πλήρες διαφορικό, αφού ισχύει η (3), δηλαδή:

$$\frac{\vartheta(3x^2 + 2y\eta\mu 2x)}{\vartheta y} = 2\eta\mu 2x = \frac{\vartheta(2\eta\mu^2 x + 3y^2)}{\vartheta x} \quad \left(= 4\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x = 2\cdot 2\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x = 2\eta\mu 2x\right).$$

Άρα η (α) είναι πλήρης Δ.Ε. και επομένως η γενική της λύση, θα είναι κατά τον (4):

$$f(x,y) = \int_0^x (3x^2 + 2y\eta\mu 2x)dx + \int_0^y (2\eta\mu^2 0 + 3y^2)dy + c =$$

$$= (x^3 - y\sigma\upsilon\nu 2x)\Big|_0^x + y^3\Big|_0^y + c =$$

$$= x^3 - y\sigma\upsilon\nu 2x + y + y^3 + c.$$

2.4. Γραμμικές Εξισώσεις - (Δ.Ε.Γ.)

Γραμμική Δ.Ε. 1ης τάξης, λέγεται κάθε Δ.Ε. που είναι 1ου βαθμού (γραμμική) ως προς y και y', δηλαδή που έχει ή μπορεί να πάρει τη μορφή:

$$\boxed{y' + P(x) \cdot y = Q(x)} \quad (\Gamma), \qquad \left[\text{ή } \frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x) \right],$$

όπου P(x) και Q(x) είναι συναρτήσεις του x.

Η γενική λύση μιας Δ.Ε.Γ., δίνεται απ' τον τύπο:

$$\boxed{\begin{array}{c} y = e^{-\int P(x)dx}\left[\int Q(x) \cdot e^{\int P(x)dx}dx + c\right] \quad (\Gamma_1), \\ \text{(Τύπος LAGRANGE)} \end{array}}$$

Απόδειξη

Κατ' αρχή, αν $Q(x) = 0$, τότε η (Γ), γίνεται: $\boxed{y' + P(x) \cdot y = 0}$ $(\Gamma_{ομ})$ και λέγεται **αντίστοιχη γραμμική ομογενής της (Γ)**, ενώ γενικά η (Γ), όταν $Q(x) \neq 0$, λέγεται και γραμμική μη ομογενής ή πλήρης γραμμική.

Θα βρούμε τη (Γ_1), μέσω της γενικής λύσης της $(\Gamma_{ομ})$. Πράγματι: Η $(\Gamma_{ομ})$ που είναι Δ.Ε. χωριζομένων μεταβλητών, δίνει:

$$y' + P(x)y = 0 \text{ ή } \frac{dy}{dx} + P(x)y = 0 \text{ ή } \frac{dy}{y} = -P(x)dx \Rightarrow$$

$$\int \frac{dy}{y} = -\int P(x)dx + c \text{ ή } \ell ny = -\int P(x)dx + c \text{ ή}$$

$$\text{ή } y = e^{-\int P(x)dx + c} \text{ ή } y = e^{-\int P(x)dx} \cdot e^{c} \text{ ή } \boxed{y_{ομ} = c_1 \cdot e^{-\int P(x)dx}} \quad (1).$$

[Δηλ. η γενική λύση της (Γ) ισούται με το άθροισμα της γενικής λύσης της (Γομ) συν μιά μερική λύση της (Γ)].

Έτσι στηριζόμενοι στη γενική λύση (1) της $(\Gamma_{ομ})$ και σύμφωνα με τη λεγόμενη **μέθοδο μεταβολής των αυθαίρετων σταθερών ή μέθοδο του Lagrange** (μέθοδο που θα συναντήσουμε αναλυτικότερα και στις γραμμικές Δ.Ε. 2ης και ανώτερης τάξης), έχουμε: θεωρούμε τη γενική λύση $y_{ομ}$, από την (1), σαν γενική λύση και της (Γ), θεωρώντας όμως ταυτόχρονα τη σταθερά c_1 σαν συνάρτηση του x, δηλαδή θέτουμε στην (1), όπου $c_1 = c_1(x)$ και έτσι παίρνουμε, αντικαθιστώντας στη (Γ):

$$y' + P(x)y = Q(x) \Leftrightarrow \left(c_1(x) \cdot e^{-\int P(x)dx}\right)' + P(x) \cdot \left(c_1(x) \cdot e^{-\int P(x)dx}\right) = Q(x) \Leftrightarrow$$

$$c_1'(x) \cdot e^{-\int P(x)dx} + c_1(x) \cdot e^{-\int P(x)dx}\left(-\int P(x)dx\right)' + P(x)\left(c_1(x) \cdot e^{-\int P(x)dx}\right) = Q(x) \Leftrightarrow$$

$c_1'(x)\cdot e^{-\int P(x)dx} = Q(x)$, οπότε ολοκληρώνοντας: $\boxed{c_1(x) = \int Q(x)\cdot e^{\int P(x)dx}dx + c}$ (1α).

Οπότε $(1) \overset{(1\alpha)}{\Leftrightarrow} y_{\Delta E\Gamma} = c_1(x)\cdot e^{-\int P(x)dx} = \left[\int Q(x)\cdot e^{\int P(x)dx}dx + c\right]e^{-\int P(x)dx}$,

δηλαδή παίρνουμε τη γενική λύση (Γ_1) της αρχικής (Γ).

παρατηρήσεις:

1) Ισχύει ότι: $\boxed{y_{\Delta E\Gamma} = y_{o\mu} + y_{\mu}}$ (Γ_2), (ή $y_{\Delta E\Gamma} = c_1\cdot e^{-\int P(x)dx} + y_\mu$),

δηλαδή, η γενική λύση ($y_{\Delta E\Gamma}$), είναι το άθροισμα της γενικής λύσης της αντίστοιχης ομογενούς ($y_{o\mu}$) και μιας μερικής λύσης (y_μ) της δοσμένης Δ.Ε.Γ., οπότε για την εύρεση της $y_{\Delta E\Gamma}$, αρκεί να ξέρουμε μια μερική λύση της αφού η $y_{o\mu}$ είναι άμεσα προσδιορίσιμη.

Πράγματι, από την (Γ_1), έχουμε:

$$\boxed{y_{\Delta E\Gamma} = \underbrace{c\cdot e^{-\int P(x)dx}}_{y_{o\mu}} + \underbrace{e^{-\int P(x)dx}\cdot\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx}_{\sigma(x)}}\ ,\quad (\Gamma_2)^*$$

δηλαδή $y_{\Delta E\Gamma} = y_{o\mu} + \sigma(x)$, οπότε αν δείξουμε πως $\sigma(x) = y_\mu$, θάχουμε τη (Γ_2).

Έτσι, αντικαθιστώντας τη $(\Gamma_2)^*$ στη (Γ), παίρνουμε:

$y'_{o\mu} + \sigma'(x) + P(x)\cdot y_{o\mu} + P(x)\sigma(x) = Q(x)$, και επειδή $y'_{o\mu} + P(x)\cdot y_{o\mu} = 0$, άρα

$\sigma'(x) + P(x)\sigma(x) = Q(x)$, δηλαδή η $\sigma(x)$ επαληθεύει τη (Γ), άρα η $\sigma(x)$ είναι μερική λύση της, οπότε πράγματι ισχύει η (Γ_2): $y_{\Delta E\Gamma} = y_{o\mu} + y_\mu$, αφού $\sigma(x) = y_\mu$.

Σημείωση: Από τη $(\Gamma_2)^*$, έχουμε: $\boxed{y_{\Delta E\Gamma} = cf(x) + \sigma(x)}$, δηλαδή η $y_{\Delta E\Gamma}$ είναι ακέραια και α'-βάθμια συνάρτηση της αυθαίρετης σταθεράς c.

2) Επίσης ισχύει ότι: $\boxed{y_{\Delta E\Gamma} = \kappa\left(y_{\mu_1} - y_{\mu_2}\right) + y_{\mu_1}}$, (Γ_3) όπου $\kappa = \dfrac{c - c_1}{c_1 - c_2}$ = αυθαίρετη σταθερά, δηλαδή αν γνωρίζουμε 2 μερικές λύσεις y_{μ_1} και y_{μ_2} της Δ.Ε.Γ., μπορούμε να βρούμε άμεσα τη γενική της λύση χωρίς καμμιά ολοκλήρωση.

Η σχέση (Γ_3), προκύπτει ως εξής (δες προηγούμενη σημείωση):

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l} y = cf(x) + \sigma(x) \\ y_{\mu_1} = c_1 f(x) + \sigma(x)\end{array}\right\} y - y_{\mu_1} = (c - c_1)f(x) \\ \\ \text{και}\ \left.\begin{array}{l} y_{\mu_1} = c_1 f(x) + \sigma(x) \\ y_{\mu_2} = c_2 f(x) + \sigma(x)\end{array}\right\} y_{\mu_1} - y_{\mu_2} = (c_1 - c_2)f(x)\end{array}\right\} \frac{y - y_{\mu_1}}{y_{\mu_1} - y_{\mu_2}} = \frac{(c - c_1)f(x)}{(c_1 - c_2)f(x)}\ \text{ή}$$

ή $y = \kappa\left(y_{\mu_1} - y_{\mu_2}\right) + y_{\mu_1}$, (Γ_3).

Ανάλογα, προκύπτει πως ο λόγος τριών λύσεων μιας Δ.Ε.Γ. είναι σταθερός, δηλαδή $\dfrac{y - y_{\mu_1}}{y - y_{\mu_2}} = \dfrac{c - c_1}{c - c_2} = \lambda$.

Παραδείγματα (στις Δ.Ε.Γ. 1ης τάξης)

1) Να λυθεί η Δ.Ε. $\dfrac{dy}{dx} + 2xy = 4x$, *(1).*

Λύση

Προφανώς πρόκειται για Δ.Ε.Γ., με $P(x) = 2x$ και $Q(x) = 4x$, και άρα η γενική της λύση δίνεται από το τύπο του Lagrange (Γ_1), δηλαδή:

$$y = e^{-\int P(x)dx}\left[\int Q(x)\cdot e^{\int P(x)dx}dx + c\right] = e^{-\int 2xdx}\left[\int 4x\cdot e^{\int 2xdx}dx + c\right] =$$

$$= e^{-x^2}\left[4\int e^{x^2}d\left(\frac{x^2}{2}\right) + c\right] = e^{-x^2}\left[2e^{x^2} + c\right] = c\cdot e^{-x^2} + 2e^{-x^2}\cdot e^{x^2}$$

ή $y = c\cdot e^{-x^2} + 2$.

2) $y' + \dfrac{4}{x}y = x^4$, *(1).*

Λύση

Πρόκειται για Δ.Ε.Γ. με $P(x) = \dfrac{4}{x}$ και $Q(x) = x^4$, οπότε:

$$y = e^{-\int \frac{4}{x}dx}\left[\int x^4\cdot e^{\int \frac{4}{x}dx}dx + c\right] = e^{-4\ell nx}\left[\int x^4\cdot e^{4\ell nx}dx + c\right] =$$

$$= e^{\ell nx^{-4}}\left[\int x^4\cdot e^{\ell nx^4}dx + c\right] = x^{-4}\left[\int x^4\cdot x^4dx + c\right] =$$

$$= x^{-4}\left[\frac{x^9}{9} + c\right]$$ και τελικά: $y = \dfrac{c}{x^4} + \dfrac{x^5}{9}$.

3) $(x-2)y' = y + 2(x-2)^3$, *(1).*

Λύση

Κατ' αρχή, για να έχει νόημα Δ.Ε. η (1), δηλαδή για να υπάρχει η y', θα π έτ $x-2 \neq 0$ ή $x \neq 2$.

Έτσι, διαιρώντας την (1) διά $(x-2)$, παίρνουμε:

$y' - \frac{1}{x-2}y = 2(x-2)^2$, δηλαδή Δ.Ε.Γ., οπότε κατά τον (Γ_1):

$$\mathbf{y} = e^{-\int \frac{-1}{x-2}dx}\left[\int 2(x-2)^2 \cdot e^{\int \frac{-1}{x-2}dx}dx + c\right] =$$

$$= e^{\int \frac{dx}{x-2}}\left[2\int (x-2)^2 e^{-\int \frac{dx}{x-2}}dx + c\right] = e^{\ln(x-2)}\left[2\int (x-2)^2 \cdot e^{-\ln(x-2)}dx + c\right] =$$

$$= (x-2)\left[2\int (x-2)^2(x-2)^{-1}dx + c\right] = (x-2)\left[2\int (x-2)dx + c\right] =$$

$$= (x-2)\left[2\frac{(x-2)^2}{2} + c\right] \text{ ή } \mathbf{y = c(x-2) + (x-2)^3}.$$

4) Να λυθεί η Δ.Ε. $y' + 2xy = 4x$, (1), όταν ξέρουμε ότι μια μερική λύση είναι: $y_\mu = 2 - 5e^{-x^2}$, (2).

Λύση

Πρόκειται βέβαια για Δ.Ε.Γ., οπότε κατά τον (Γ_2) δηλαδή $y_{ΔΕΓ} = y_{ο\mu} + y_\mu$, αρκε να υπολογίσουμε τη γενική λύση $(y_{ο\mu})$ της αντίστοιχης ομογενούς Δ.Ε., δηλαδή της: $y' + 2xy = 0$, που έχει γενική λύση, $y_{ο\mu} = ce^{-\int P(x)dx} = ce^{-\int 2xdx} = ce^{-2\frac{x^2}{2}} = ce^{-x^2}$

[αυστηρότερα θα έπρεπε να γράφουμε σε όλες τις σχετικές περιπτώσεις: $e^{-\int 2xdx} = e^{-x^2 + c_1} = e^{-x^2} \cdot e^{c_1} = c_2 e^{-x^2}$, θέτωντας $e^{c_1} = c_2$]

οπότε, $y_{ΔΕΓ} = y_{ο\mu} + y_\mu = ce^{-x^2} + \left(2 - 5e^{-x^2}\right) = 2 + (c-5)e^{-x^2}$

και τελικά: $\mathbf{y_{ΔΕΓ} = 2 + c_1 e^{-x^2}}$, [δηλαδή βρήκαμε τη $y_{ΔΕΓ}$ με μια μόνο ολοκλήρωση].

5) Να λυθεί η Δ.Ε. $\frac{d\rho}{d\theta} + 3\rho = 2$*, αν γνωρίζουμε 2 μερικές της λύσεις, τις:*

$\rho_1 = 2e^{-3\theta} + \frac{2}{3}$ *και* $\rho_2 = 5e^{-3\theta} + \frac{2}{3}$.

Λύση

Προφανώς κατά τον ($Γ_3$), θα έχουμε:

$$y_{ΔΕΓ} = \kappa\left(y_{\mu_1} - y_{\mu_2}\right) + y_{\mu_1} = \kappa(\rho_1 - \rho_2) + \rho_1 =$$

$$= \kappa\left(2e^{-3\theta} + \frac{2}{3} - 5e^{-3\theta} - \frac{2}{3}\right) + 2e^{-3\theta} + \frac{2}{3} =$$

$$= \kappa\left(-3e^{-3\theta}\right) + 2e^{-3\theta} + \frac{2}{3} = (-3\kappa + 2)e^{-3\theta} + \frac{2}{3}$$

και τελικά: $\mathbf{y_{ΔΕΓ} = \kappa_1 \cdot e^{-3\theta} + \frac{2}{3}}$, [δηλαδή βρήκαμε τη $y_{ΔΕΓ}$ χωρίς καμμιά ολοκλήρωση].

Συγγραφέας:
Ιωάννης Αθ. Θεοδώρου
Καθηγητής ΑΤΕΙ
(Δρ. Μαθηματικός-Στατιστικός)

2.5. Δ.Ε. Bernoulli - (Δ.Ε.Β.)

Δ.Ε. Bernoulli (Δ.Ε.Β.) είναι εκείνη που έχει ή μπορεί να πάρει τη μορφή:

$\boxed{\frac{dy}{dx} + y \cdot p_1(x) = y^v \cdot q_1(x)}$ (Δ) (ή $y' + y \cdot p_1(x) = y^v \cdot q_1(x)$) όπου $v \neq 0$ και $v \neq 1$.

[Αν $v = 0$ γίνεται Δ.Ε.Γ., ενώ αν $v = 1$ γίνεται Δ.Ε.Χ.Μ.]

Τρόπος λύσης:

Οι Δ.Ε. Bernoulli λύνονται αναγόμενες σε γραμμικές, ως εξής:

α) **Διαιρούμε** τη (Δ) **με** y^v,

$$\frac{y'}{y^v} + \frac{y \cdot p_1(x)}{y^v} = \frac{y^v \cdot q_1(x)}{y^v} \quad \text{ή} \quad y^{-v} \cdot y' + y^{-v+1} \cdot p_1(x) = q_1(x), \ (\Delta_1)$$

β) **Θέτουμε**: $y^{-v+1} = u \Rightarrow$ [παραγωγίζουμε ως προς x]

$$\Rightarrow (-v+1)y^{-v} \cdot y' = u' \quad \text{ή} \quad y^{-v} \cdot y' = \frac{u'}{-v+1}$$

γ) Οπότε αντικαθιστώντας στην (Δ_1) έχουμε:

$$\frac{u'}{-v+1} + u \cdot p_1(x) = q_1(x) \quad \text{ή} \quad u' + (1-v) \cdot u \cdot p_1(x) = (1-v) \cdot q_1(x), \ (\Delta_2)$$

Η (Δ_2) είναι γραμμική με άγνωστη συνάρτηση του u και την ίδια ανεξάρτητη μεταβλητή του x. Έτσι εδώ θα εφαρμοστεί ο τύπος του Lagrange που δίνει τη γενική λύση μιας Δ.Ε.Γ., με $p(x) = (1-v) \cdot p_1(x)$ και $q(x) = (1-v) \cdot q_1(x)$, τέλος δε μέσω του $y^{-v+1} = u$, θα επανέλθουμε στις αρχικές μεταβλητές.

Παραδείγματα

1) Να λυθεί η Δ.Ε. $y' + 2xy = -xy^4$, *(1).*

Λύση

Προφανώς πρόκειται για Δ.Ε. Bernoulli με $p_1(x) = 2x$ και $q_1(x) = -x$, και $v = 4$.

Έτσι σύμφωνα με τα παραπάνω θα έχω:

α) Διαιρώ την (1) με y^4:

$$y^{-4}\cdot y' + 2xy^{-3} = -x \quad (2)$$

β) Θέτω: $\mathbf{y^{-3} = u} \Rightarrow$ [παραγωγίζω ως προς x]

$$\Rightarrow -3y^{-4}\cdot y' = u' \text{ ή } \mathbf{y^{-4}\cdot y' = \frac{u'}{-3}},$$

γ) οπότε αντικαθιστώντας στη (2) έχω:

$$\frac{u'}{-3} + 2xu = -x \text{ ή } u' - 6xu = 3x, \ (3)$$

που είναι γραμμική με $p(x) = -6x$ και $q(x) = 3x$ οπότε η γενική λύση της δίνεται από τον τύπο του Lagrange: $y = \left[c + \int q(x)e^{\int p(x)dx}dx\right]e^{-\int p(x)dx}$

δηλαδή $u = \left[c + \int 3x\cdot e^{\int -6xdx}dx\right]e^{-\int -6xdx} =$

$$= \left[c + \int 3x\cdot e^{-6\frac{x^2}{2}}dx\right]e^{6\frac{x^2}{2}} = \left[c + \int 3x\cdot e^{-3x^2}dx\right]e^{3x^2} = \quad \text{(βάζω το 3x στο διαφορικό)}$$

$$= \left[c + \int e^{-3x^2}d\left(\frac{3x^2}{2}\right)\right]e^{3x^2} = \left[c - \frac{1}{2}\int e^{-3x^2}d\left(-3x^2\right)\right]e^{3x^2} =$$

$$= \left[c - \frac{1}{2}e^{-3x^2}\right]e^{3x^2} = c\cdot e^{3x^2} - \frac{1}{2}$$

και θέτοντας $u = y^{-3}$,

$\boxed{\mathbf{y^{-3} = c\cdot e^{3x^2} - \frac{1}{2}}}$ που είναι η γενική λύση της Δ.Ε.Β. (1).

2) Να λυθεί η Δ.Ε. $y' - \frac{4}{x}y = x\sqrt{y}$, (1).

Λύση

Είναι Δ.Ε. Bernoulli με $p_1(x) = -\frac{4}{x}$, $q_1(x) = x$, $v = -\frac{1}{2}$

δηλαδή (1) $\Leftrightarrow y' - \frac{4}{x}y = xy^{\frac{1}{2}}$, οπότε:

α) διαιρώ με $y^{\frac{1}{2}}$:

$$y^{-\frac{1}{2}} \cdot y' - \frac{4}{x} \cdot y \cdot y^{-\frac{1}{2}} = x \cdot y^{\frac{1}{2}} \cdot y^{-\frac{1}{2}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y^{-\frac{1}{2}} \cdot y' - \frac{4}{x} \cdot y^{\frac{1}{2}} = x \quad (2).$$

β) Θέτω: $y^{\frac{1}{2}} = u \Rightarrow \frac{1}{2} y^{-\frac{1}{2}} \cdot y' = u'$ ή $y^{-\frac{1}{2}} \cdot y' = 2u'$

γ) Αντικαθιστώ στη (2):

$2u' - \frac{4}{x} u = x$ ή $u' - \frac{2}{x} u = \frac{x}{2}$ (3), που είναι γραμμική με $p(x) = -\frac{2}{x}$ και $q(x) = \frac{x}{2}$,

οπότε κατά τον τύπο του Lagrange

$$u = \left[c + \int q(x) e^{\int p(x)dx} dx\right] e^{-\int p(x)dx} =$$

$$= \left[c + \int \frac{x}{2} \cdot e^{\int -\frac{2}{x}dx} dx\right] e^{-\int -\frac{2}{x}dx} =$$

$$= \left[c + \int \frac{x}{2} \cdot e^{-2\ell nx} dx\right] e^{2\ell nx} = \left[c + \frac{1}{2}\int x \cdot e^{\ell nx^{-2}} dx\right] e^{\ell nx^2} =$$

$$= \left[c + \frac{1}{2}\int x \cdot x^{-2} dx\right] x^2 = \qquad (\text{υπενθυμίζεται ότι } e^{\ell nx} = x)$$

$$= \left[c + \frac{1}{2}\ell nx\right] x^2 = cx^2 + x^2 \ell n\sqrt{x}$$

και επειδή $u = y^{\frac{1}{2}}$, άρα τελικά

$$\boxed{\mathbf{y^{\frac{1}{2}} = cx^2 + x^2 \ell n\sqrt{x}}} \quad \text{ή} \quad y = x^4 c^2 + x^4 \ell n^2 \sqrt{x}.$$

3) Να λυθεί η Δ.Ε. $xdy - \left[y + xy^3(1 + \ell nx)\right]dx = 0$, (1).

Λύση

Αυτή δεν φαίνεται αμέσως να είναι Bernoulli, διαιρώντας όμως δια xdx, έχουμε:

$\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} - y^3(1 + \ell nx) = 0$ ή $y' - \frac{1}{x} y = y^3(1 + \ell nx)$, (2) δηλαδή η ισοδύναμη της (2) είναι Δ.Ε.Β. με $p_1(x) = -\frac{1}{x}$ και $q_1(x) = 1 + \ell nx$ και $v = 3$. Έτσι:

α) διαιρώ δια $y^{\nu} = y^3$ και έχω:

$$y^{-3} \cdot y' - \frac{1}{x} y^{-2} = 1 + \ell nx \quad (3)$$

β) Θέτω: $y^{-2} = u \Rightarrow -2y^3 \cdot y' = u'$ ή $y^{-3} \cdot y' = -\dfrac{u'}{2}$

γ) και αντικαθιστώ στη (3):

$-\dfrac{u'}{2} - \dfrac{1}{x}u = 1 + \ell nx$ ή $u' + \dfrac{2}{x}u = -2(1 + \ell nx)$, (4) που είναι Δ.Ε.Γ., οπότε κατά τον τύπο Lagrange:

$$u = \left[c + \int -2(1 + \ell nx) \cdot e^{\int \frac{2}{x}dx} dx\right] e^{-\int \frac{2}{x}dx} =$$

$$= \left[c - 2\int (1 + \ell nx) \cdot e^{\ell nx^2} dx\right] e^{\ell nx^{-2}} =$$

$$= \left[c - 2\int (1 + \ell nx) \cdot x^2 dx\right] x^{-2} =$$

$$= \left[c - 2\int x^2 dx - 2\int x^2 \ell nx dx\right] x^{-2} =$$

$$= \left[c - 2\frac{x^3}{3} - 2\int \ell nx d\left(\frac{x^3}{3}\right)\right] x^{-2} =$$

$\left[\begin{array}{l} \text{ολοκλήρωση κατά παράγοντες:} \\ \int \alpha d\beta = \alpha\beta - \int \beta d\alpha, \\ \text{εδώ βάζω το } x^2 \text{ στο διαφορικό} \end{array}\right]$

$$= \left[c - \frac{2}{3}x^3 - 2\left(\ell nx \cdot \frac{x^3}{3} - \int \frac{x^3}{3} d(\ell nx)\right)\right] x^{-2} =$$

$$= \left[c - \frac{2}{3}x^3 - \frac{2}{3}x^3 \ell nx + \frac{2}{3} \cdot \frac{x^3}{3}\right] x^{-2} = \left[c - \frac{2}{3}x^3 - \frac{2}{3}x^3 \ell nx + \frac{2}{9}x^3\right] x^{-2}$$

$$\text{ή } u = \boxed{\mathbf{cx^{-2} - \frac{2}{3}x - \frac{2}{3}x\ell nx + \frac{2}{9}x = cx^{-2} - x\left(\frac{4}{9} + \frac{2}{3}\ell nx\right)}}$$

4) $\boldsymbol{y' - \dfrac{y}{1 + x} + (1 + x)y^4 = 0}$ ***, (1).***

Λύση

(1) $y' - \dfrac{1}{1 + x} y = -y^4(1 + x)$, (1α),

είναι προφανώς Δ.Ε.Β. με $p_1(x) = \dfrac{-1}{1 + x}$, $q_1(x) = -(1 + x)$, $\nu = 4$. Οπότε:

α) διαιρώ την (1α) δια y^4 και έχω:

$$y^{-4}\cdot y'-\frac{1}{1+x}y^{-3}=-(1+x),\ (1\beta).$$

β) Θέτουμε: $\mathbf{y^{-3}=u}\Rightarrow -3y^{-4}y'=u'\Leftrightarrow \mathbf{y^{-4}y'=\frac{u'}{-3}}$.

γ) Αντικαθιστούμε στην (1β): $\frac{u'}{-3}-\frac{1}{1+x}u=-(1+x)$ ή

ή $u'+\frac{3}{1+x}u=3(1+x)$, (2) που είναι Δ.Ε.Γ., οπότε:

$$u=\left[c+\int 3(1+x)\cdot e^{\int\frac{3}{1+x}dx}dx\right]e^{-\int\frac{3}{1+x}dx}=$$

$$=\left[c+3\int(1+x)\cdot e^{\ell n(1+x)^3}dx\right]e^{\ell n(1+x)^{-3}}=$$

$$=\left[c+3\int(x+1)(x+1)^3dx\right](x+1)^{-3}=$$

$$=\left[c+3\frac{(x+1)^5}{5}\right](x+1)^{-3}=c(x+1)^{-3}+\frac{3}{5}(x+1)^2$$

και επειδή $u=y^{-3}$, τελικά έχουμε:

$y^{-3}=c(x+1)^{-3}+\frac{3}{5}(x+1)^2$, (Γενική λύση της (1) σε πλεγμένη μορφή).

5) Να λυθεί η $\mathbf{4x^2yy'=3x(3y^2+2)+2(3y^2+2)^3}$*, (1).*

Λύση

Η (1) μπορεί να μετατραπεί σε Δ.Ε. Bernoulli κάνοντας εξ' αρχή την αντικατάσταση:

$\boxed{\mathbf{3y^3+2=t}}$, οπότε παραγωγίζοντας ως προς x

$6yy'=t'$ ή $\mathbf{yy'=\frac{t'}{6}}$ και αντικαθιστώντας στην (1):

$4x^2\cdot\frac{t'}{6}=3xt+2t^3$ ή

ή $t'-3xt\frac{6}{4x^2}=2t^3\frac{6}{4x^2}$ ή ή $t' - \frac{9}{2x}t = \frac{3}{x^2}t^3$, (2) που είναι Δ.Ε.Β. ως προς t.

Οπότε διαιρώ τη (2) με t^3, δηλαδή:

$t^{-3} \cdot t' = \frac{9}{2x}t^{-2} = \frac{3}{x^2}$, θέτω $\mathbf{t^{-2} = u} \Rightarrow$

$$\Rightarrow -2t^{-3}t' = u' \text{ ή}$$

$$\text{ή } \mathbf{t^{-3}t' = \frac{u'}{-2}}$$

αντικαθιστώ: $\frac{u'}{-2} - \frac{9}{2x}u = \frac{3}{x^2}$ ή $u' + \frac{9}{x}u = \frac{-6}{x^2}$, (3) που είναι γραμμική και κατά τα γνωστά:

$$u = \left[c + \int -\frac{6}{x^2} \cdot e^{\int \frac{9}{x}dx} dx\right] e^{-\int \frac{9}{x}dx} = \left[c - 6\int \frac{1}{x^2} \cdot e^{\ell n x^9} dx\right] e^{\ell n x^{-9}} =$$

$$= \left[c - 6\int x^7 dx\right] x^{-9} = \left[c - 6 \cdot \frac{x^8}{8}\right] x^{-9} = cx^{-9} - \frac{3}{4}x^{-1}$$

δηλαδή $u = t^{-2} = cx^{-9} - \frac{3}{4}x^{-1}$ ή (αφού $t = 3y^2 + 2$)

ή $\boxed{\mathbf{(3y^2 + 2)^{-2} = cx^{-9} - \frac{3}{4}x^{-1}}}$

που είναι η γενική λύση της αρχικής (1) σε πεπλεγμένη βέβαια μορφή.

2.6. Δ.Ε. Clairaut - (Δ.Ε.Cl.)

Δ.Ε. Clairaut είναι κάθε εξίσωση της μορφής: $\boxed{y = xy' + f(y')}$ (Ε)

όπου $f(y')$ είναι τυχαία συνάρτηση του y'

τρόπος λύσης:

Αποδεικνύεται ότι η Δ.Ε.Cl. έχει εκτός της γενικής λύσης και ιδιάζουσα λύση, δηλαδή:

Γενική λύση: $\boxed{y = cx + f(c)}$ (E_1)

Ιδιάζουσα λύση: $\boxed{\begin{matrix} y = cx + f(c) \\ 0 = x + f'(c) \end{matrix}}$ (E_2)

όπου, η μεν γενική λύση (E_1) βρίσκεται απλά και αμέσως, βάζοντας στην (Ε), αντί για y' μια αυθαίρετη σταθερά c, ενώ η ιδιάζουσα λύση (E_2) βρίσκεται δι' απαλειφής της c μεταξύ της γενικής λύσης και της παραγώγου (ως προς c) της γενικής λύσης, δηλαδή μεταξύ των εξισώσεων της (E_2).

Απόδειξη:

Επειδή η Δ.Ε.Cl. είναι λυμένη ως προς y, επιχειρούμε τον προσδιορισμό της y'. Έτσι παραγωγίζουμε την (Ε) ως προς (x), και έχουμε:

$y' = (x)'y' + x(y')' + \mathbf{f'(y')\cdot(y')'}$ (η f είναι σύνθετη ως προς y')

ή $y' = y' + xy'' + f'(y')\cdot y''$ ή $xy'' + f'(y')y'' = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow y''\big(x + f'(y')\big) = 0 \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} y'' = 0 & (1) \\ x + f'(y') = 0 & (2) \end{matrix}\right\}$$

Οπότε η μεν $(1) \Rightarrow \int (y')'dx = \int 0dx + c$

ή $\int \frac{d(y')}{dx}dx = 0 + c$ ή $\boxed{y' = c}$ (3),

και έτσι $(E) \overset{(3)}{\Leftrightarrow} \boxed{y = cx + f(c)}$, δηλαδή η γενική λύση (E_1), εξ' άλλου $(2) \Leftrightarrow x = -f'(y')$ και αντικαθιστώντας το στη γενική μορφή (Ε) έχουμε:

$y = -f'(y')\cdot y' + f(y')$ (4)

δηλαδή οι εξισώσεις (2) και (4)

$$\left\{\begin{matrix} \mathbf{x = -f'(y')} \\ \mathbf{y = -f'(y')\cdot y' + f(y')} \end{matrix}\right\} \quad (E_3)$$

είναι μια μερική λύση της Δ.Ε.Cl. υπό παραμετρική μορφή με παράμετρο τη y', η οποία, γενικά, δεν μπορεί να προκύψει από τη γενική λύση (E_1) για καμμιά τιμή της αυθαίρετης σταθεράς c, είναι δηλαδή
μια ιδιάζουσα λύση της Δ.Ε.Cl.

[Κάθε Δ.Ε.Cl. με $f(y')$ μη πρωτοβάθμιο πολυώνυμο ως προς y', έχει ιδιάζουσα λύση.]

Με δεδομένο ότι η γενική λύση (E_1) είναι μια μόνο-παραμετρική οικογένεια ευθειών, η ιδιάζουσα λύση (E_3) που προκύπτει με απαλειφή (όταν είναι δυνατή) του y' μεταξύ των (2) και (4), είναι η περιβάλλουσα της οικογένειας των ευθειών της γενικής λύσης (περιβάλλουσα μιας οικογένειας καμπύλων λέγεται η καμπύλη που εφάπτεται των καμπύλων μιας οικογένειας).

Αποδεικνύεται ότι η περιβάλλουσα (ιδιάζουσα λύση) μιας οικογένειας καμπύλων (γενική λύση), βρίσκεται με απαλειφή της σταθεράς c, μεταξύ της γενικής λύσης και της παραγώγου (ως προς c) της γενικής λύσης.

Άρα, σχετικά με τη Δ.Ε.Cl., η περιβάλλουσα ή ιδιάζουσα λύση, θα είναι η απαλείφουσα αυτών:

$$\left\{\begin{array}{l} y = cx + f(c) \\ 0 = x + f'(c) \end{array}\right\} \text{ ή ισοδύναμα των: } \left\{\begin{array}{l} x = -f'(y') \\ y = -f'(y')\cdot y' + f(y') \end{array}\right\}.$$

Παραδείγματα

1) Να λυθεί η Δ.Ε. $y = xy' + 2(y')^2$, *(1).*

Λύση

Προφανώς πρόκειται για Δ.Ε.Clairaut, δηλαδή της γενικής μορφής: $y = xy' + f(y')$.

Άρα η γενική της λύση προκύπτει αντικαθιστώντας στην (1) το y' με c, δηλαδή

$$\boxed{y = cx + 2c^2} \quad (2) \quad \text{(γενική λύση)}.$$

Η ιδιάζουσα λύση που παριστάνει την περιβάλλουσα των ευθειών της γενικής λύσης, προκύπτει με απαλοιφή της σταθεράς c μεταξύ της γενικής λύσης και της παραγώγου αυτής ως προς c, δηλαδή μεταξύ των εξισώσεων:

$$\left.\begin{array}{l} y = cx + 2c^2 \\ 0 = x + 4c \end{array}\right\}\begin{array}{l}(3)\\(4)\end{array}$$

$$\text{Έτσι } (4) \Leftrightarrow c = \frac{-x}{4}\cdot x + 2\left(\frac{-x}{4}\right)^2 = \frac{-x^2}{4} + 2\frac{x^2}{16} \text{ ή}$$

ή $y = \frac{-2x^2 + x^2}{8}$ ή $\boxed{\mathbf{y = \frac{-x^2}{8}}}$ (6) (ιδιάζουσα λύση),

δηλαδή η (6) είναι μια παραβολή της οποίας εφάπτονται οι ευθείες της γενικής λύσης (2).

2) Να λυθεί η Δ.Ε.* $\mathbf{y = xy' - (y')^3}$*, (1)

Λύση

Προφανώς είναι Δ.Ε.Cl., άρα η γενική λύση είναι: $\boxed{\mathbf{y = cx - c^3}}$ (2).

Η ιδιάζουσα λύση της (1), είναι η απλείφουσα ως προς c, των εξισώσεων:

$$\left.\begin{aligned} y &= cx - c^3 \\ 0 &= x - 3c^2 \end{aligned}\right\} \begin{matrix} (3) \\ (4) \end{matrix}$$

$(4) \Leftrightarrow x = 3c^2$ (5), οπότε

$(3) \overset{(5)}{\Leftrightarrow} y = c(3c^2) - c^3 = 3c^3 - c^3$ ή $y = 2c^3$ (6)

Υψώνω τη (5) στο κύβο και έχω: $x^3 = 27c^6$ (7)

ενώ υψώνω την (6) στο τετράγωνο: $y^2 = 4c^6$ (8)

Διαιρώ την (7) δια της (8) και έχω:

$\frac{x^3}{y^2} = \frac{27}{4}$ ή $\boxed{\mathbf{4x^3 = 27y^2}}$ (ιδιάζουσα λύση).

3) Να λυθεί η:* $\boldsymbol{y = xy' + \sqrt{4 + y'^2}}$*, (1)

Λύση

Είναι Δ.Ε.Cl., άρα η γενική λύση είναι: $\boxed{\mathbf{y = xc + \sqrt{4 + c^2}}}$ (2).

Η ιδιάζουσα λύση είναι η απαλείφουσα των:

$$\left.\begin{aligned} y &= xc + \sqrt{4 + c^2} \\ 0 &= x + \frac{2c}{2\sqrt{4 + c^2}} \end{aligned}\right\} \begin{matrix} (3) \\ (4) \end{matrix}$$

Οπότε:

$$(4) \Leftrightarrow x = \frac{-c}{\sqrt{4+c^2}} \Leftrightarrow x^2\left(4+c^2\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4x^2 + x^2c^2 - c^2 = 0 \Leftrightarrow c^2\left(x^2-1\right) = -4x^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow c^2 = \frac{4x^2}{1-x^2} \Leftrightarrow c = \frac{\pm 2x}{\sqrt{1-x^2}} \quad (5)$$

Θέτω τη (5) στην (3) και έχω:

$$y = x\frac{\pm 2x}{\sqrt{1-x^2}} + \sqrt{4+\left(\frac{\pm 2x}{\sqrt{1-x^2}}\right)^2} = \frac{\pm 2x^2}{\sqrt{1-x^2}} + \sqrt{\frac{4\left(1-x^2\right)+4x^2}{1-x^2}} =$$

$$= \frac{\pm 2x^2}{\sqrt{1-x^2}} + \sqrt{\frac{4}{1-x^2}} = \frac{\pm 2x^2}{\sqrt{1-x^2}} \pm \frac{2}{\sqrt{1-x^2}} \quad \text{ή } y = \frac{\pm 2\left(x^2 \pm 1\right)}{\sqrt{1-x^2}}$$

ή υψώνοντας στο τετράγωνο:

$$\boxed{\mathbf{y^2 = \frac{4\left(x^2 \pm 1\right)^2}{1-x^2}}} \quad (6) \qquad \text{(ιδιάζουσα λύση).}$$

4) Να λυθεί η Δ.Ε. $(y - xy')^2 = 1 + y'^2$, (1)

Λύση

Η (1) μπορεί να μετατραπεί σε Δ.Ε.Cl., ως εξής:

$$(1) \Leftrightarrow (y-xy')^2 = \left(\sqrt{1+y'^2}\right)^2 \Leftrightarrow (y-xy')^2 - \left(\sqrt{1+y'^2}\right)^2 = 0$$

$\Leftrightarrow \left(y - xy' + \sqrt{1+y'^2}\right)\left(y - xy' - \sqrt{1+y'^2}\right) = 0$, οπότε διασπάται σε 2 ισοδύναμες εξισώσεις:

$$\begin{cases} y = xy' - \sqrt{1+y'^2} & (2) \\ y = xy' + \sqrt{1+y'^2} & (3) \end{cases}$$ που προφανώς είναι και δύο Δ.Ε.Cl.

Έτσι, η μεν (2) βρίσκεται ότι έχει:

Γενική λύση: $\boxed{\mathbf{y = cx - \sqrt{1+c^2}}}$ (4)

Ιδιάζουσα λύση: $\boxed{\mathbf{y^2 = \frac{\left(x^2 \pm 1\right)^2}{1-x^2}}}$ (5)

η δε (3):

Γενική λύση: $\boxed{y = cx + \sqrt{1+c^2}}$ (6)

Ιδιάζουσα λύση: $\boxed{y^2 = \dfrac{\left(x^2 \pm 1\right)^2}{1-x^2}}$ (7) (ίση με την (5))

Σ' αυτή τη περίπτωση που η (1) διασπάται σε 2 ισοδύναμες τις (2) και (3), αποδεικνύεται γενικότερα, ότι η μεν γενική λύση της (1) είναι το γινόμενο των μερικών λύσεων (4) και (6), δηλαδή:

Γενική λύση της (1): $y = \left(cx - \sqrt{1+c^2}\right)\left(cx + \sqrt{1+c^2}\right)$ ή $\boxed{y = c^2x^2 - \left(1+c^2\right)}$ (8)

ενώ **ιδιάζουσα λύση της (1):** $\boxed{y^2 = \dfrac{\left(x^2 \pm 1\right)^2}{1-x^2}}$ (δηλαδή η κοινή ιδιάζουσα λύση των (2),(3)).

2.7. Δ.Ε. Lagrange - (Δ.Ε.L.)

Είναι της γενικής μορφής: $\boxed{\mathbf{y = x\varphi(y') + f(y')}}$ (1)

Προφανώς η Lagrange είναι γενίκευση της Clairaut, αφού για $\varphi(y') = y'$, η Δ.Ε.L. γίνεται ($y = xy' + f(y')$).

Για την εύρεση της γενικής λύσης της Δ.Ε. Lagrange, έχουμε διαδοχικά:

Θέτουμε $y' = P$, (για την διευκόλυνση των συμβολισμών),

οπότε η (1) γράφεται: $\boxed{\mathbf{y = x\varphi(P) + f(P)}}$, (1α).

Διαφορίζουμε την (1α):

(1α) $\Rightarrow Pdx = \varphi(P)dx + x\varphi'(P)dP + f'(P)dP$ ή

ή $[\varphi(P) - P]dx + [x\varphi'(P) + f'(P)]dP = 0$ ή

(διαιρούμε διά $[\varphi(P) - P]dP$, θεωρώντας $(\varphi(P) - P) \neq 0$)

ή $\dfrac{dx}{dP} + \dfrac{\varphi'(P)}{\varphi(P) - P}x = \dfrac{f'(P)}{P - \varphi(P)}$, (1β),

που αν θεωρήσουμε το P ως ανεξάρτητη μεταβλητή και το x ως άγνωστη συνάρτηση του P, είναι προφανώς Δ.Ε. Γραμμική και άρα κατά τα γνωστά η γενική λύση της (δες Δ.Ε.Γ.), θα είναι της μορφής:

$\boxed{\mathbf{x = c\varphi_1(P) + f_1(P)}}$, (2)

Οπότε, απαλείφοντας το P, μεταξύ των (2) και (1α), παίρνουμε τη γενική λύση της Δ.Ε. Lagrange.

Αν η απαλοιφή του P είναι αδύνατη, τότε αντικαθιστούμε το x από τη (2), στην (1α) και παίρνουμε το y σαν συνάρτηση του $P = y'$, δηλαδή:

$\boxed{\mathbf{y = c\varphi_2(P) + f_2(P)}}$ (3).

παρατήρηση: Αν α είναι μια ρίζα της $\varphi(P) - P = 0$, (που παραπάνω, κατά την αναζήτηση της γενικής λύσης της Δ.Ε.L., θεωρήσαμε $\varphi(P) - P \neq 0$), τότε: $\varphi(\alpha) - \alpha = 0 \Leftrightarrow \varphi(\alpha) = \alpha$, δηλαδή $P = \alpha$ ή $y' = \alpha$, οπότε η (1) δίνει: $\boxed{\mathbf{y = x\varphi(\alpha) + f(\alpha)}}$, (4), λύση μερική ή ιδιάζουσα της Δ.Ε.L., ανάλογα με το αν μπορεί να προκύψει από τη γενική λύση (3) ή όχι.

παραδείγματα (στη Lagrange):

1) Να βρεθεί το γενικό ολοκλήρωμα της Δ.Ε.: $y = x + 3(y')^2 - 2(y')^3$, (1).

Λύση

Πρόκειται για Δ.Ε.L., με $\varphi(y') = 1$ και $\varphi(y') = 3(y')^2 - 2(y')^3$.

Θέτουμε $y' = P$, οπότε $(1) \Leftrightarrow y = x + 3P^2 - 3P^3$, διαφορίζουμε:

$Pdx = dx + 6PdP - 6P^2dP$ ή $(1-P)dx + 6P(1-P)dP = 0$ ή

(θεωρώντας $(1-P) \neq 0 \Leftrightarrow P \neq 1$, διαιρούμε δια $(1-P)dP$),

ή $\frac{dx}{dP} + 6P = 0$, ολοκληρώνουμε ως προς P,

$\int \frac{dx}{dP}dP = \int -6PdP + c$ ή $\boxed{\mathbf{x = -3P^2 + c}}$, (2).

Οπότε αντικαθιστώντας το x από τη (2), στην (1), παίρνουμε:

$y = -3(y')^2 + c + 3(y')^2 - 2(y')^2$ ή $\boxed{\mathbf{y = -2P^3 + c}}$, (3).

Οι (2) και (3), είναι οι παραμετρικές εξισώσεις, ως προς $P = y'$, της γενικής λύσης της Δ.Ε. Lagrange (1).

Απαλοίφοντας δε το P, μεταξύ των (2) και (3), έχουμε τελικά τη γενική λύση:

$\boxed{\mathbf{4(x-c)^3 + 27(y-c)^2 = 0}}$, (4).

Τέλος για $P = 1$, δηλαδή $y' = 1$, η (1) δίνει:

$y = x + 3 \cdot 1^2 - 2 \cdot 1^3$ ή $\mathbf{y = x + 1}$, (5), που είναι ιδιάζουσα λύση της (1), αφού δεν μπορεί να προκύψει από τη γενική λύση (4), για κανένα c.

2) Όμοια της Δ.Ε.: $y = x + (1 + y') + y'^2$, (1).

Λύση

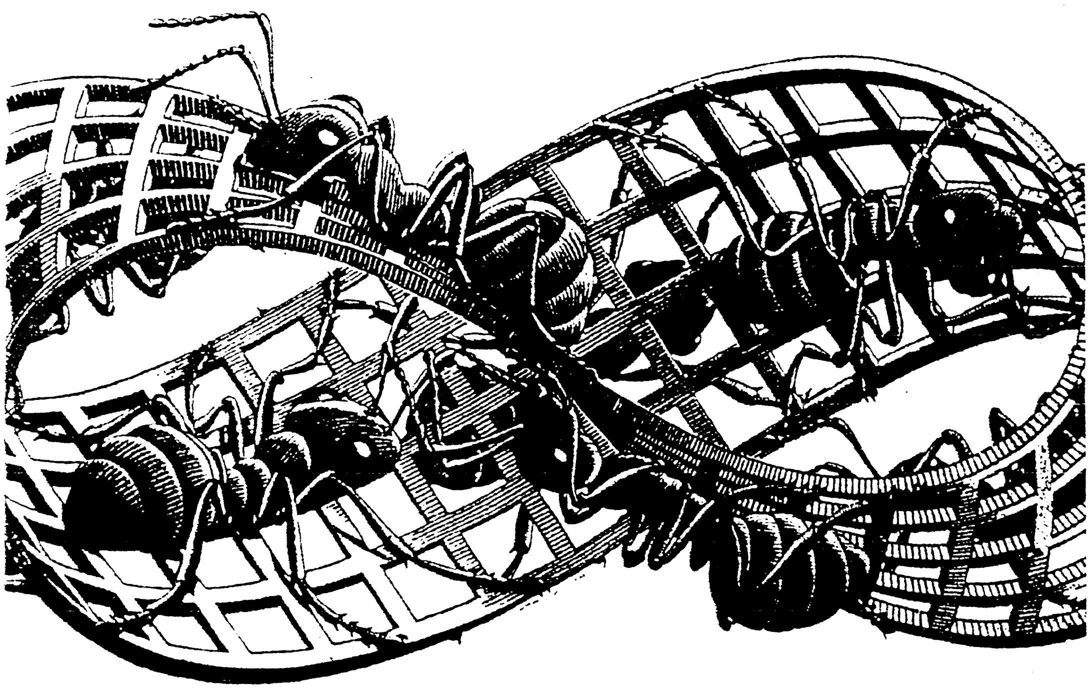
Θέτωντας $y' = P$, παίρνουμε $y = x(1+P) + P^2$, (1α).

Διαφορίζουμε: $Pdx = (1+P)dx + xdP + 2PdP$ ή $\frac{dx}{dP} + x = -2P$, που είναι Δ.Ε.Γ. 1ης τάξης, οπότε: $\mathbf{x = ce^{-P} - 2P + 2}$, (2).

Αντικαθιστώντας το x από τη (2) στην (1α), παίρνουμε:

$$y = ce^{-P}(1+P) - P^2 + 2, \quad (3).$$

Οι (2) και (3), αποτελούν τη γενική λύση της (1), υπό παραμετρική μορφή (ως προς P).



Ατέρμονη Ταινία Möbius

4. ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

$2^{ης}$ και ανώτερης τάξης

Δ.Ε. ΑΝΩΤΕΡΗΣ ΤΑΞΗΣ

ΓΕΝΙΚΑ:

Ονομάζουμε Δ.Ε. ανώτερης (ν-οστής) τάξης, κάθε Δ.Ε. με γενική μορφή:

$$\begin{cases} f(x,y,y',y'',\dots,y^{(\nu)}) = 0, & \text{ή αν λύνεται ως προς } y^{(\nu)} \\ y^{(\nu)} = f(x,y,y',\dots,y^{(\nu-1)}), & \text{όπου } \nu \geq 2. \end{cases}$$

Έτσι, αν ν=2, δηλαδή η ανώτερης τάξης παράγωγος ή διαφορικό που εμφανίζεται στη Δ.Ε. είναι 2ης τάξης, τότε η Δ.Ε. λέγεται επίσης 2ης τάξης, αν ν=3, ή Δ.Ε. λέγεται 3ης τάξης, κ.λ.π.

Γνωρίσαμε, ήδη, πως η γενική λύση μιας Δ.Ε. 1ης τάξης είναι της μορφής $y=\varphi(x,c)$ ή πλεγμένα $\varphi(x,y,c)=0$, δηλαδή περιέχει μια αυθαίρετη σταθερά c.

Κατ' επέκταση, η γενική λύση μιας Δ.Ε. ν-οστής τάξης, θα περιέχει κατά κανόνα ν αυθαίρετες σταθερές, δηλαδή θά 'ναι της μορφής $y=\varphi(x, c_1, c_2, \dots, c_\nu)$, ή πλεγμένα $\varphi(x, y, c_1, c_2, \dots, c_\nu)=0$.

[Ας σημειωθεί εδώ, ότι μια λύση με ν αυθαίρετες σταθερές, δεν σημαίνει κατ' ανάγκη πως είναι και η γενική λύση μιας Δ.Ε. ν-οστής τάξης, παρά μόνο όταν οι σταθερές αυτές είναι και ανεξάρτητες μεταξύ τους. Σχετικά, οι ακριβείς συνθήκες ύπαρξης και μοναδικότητας της γενικής λύσης μιας Δ.Ε. οποιασδήποτε τάξης, εξασφαλίζονται απ' το λεγόμενο **θεώρημα ύπαρξης**, που η μαθηματικά θεωρητική του προσέγγιση όμως, ξεφεύγει του ενδιαφέροντός μας]

Εξ άλλου, για τον προσδιορισμό μιας μερικής λύσης, ενώ για τις Δ.Ε. 1ης τάξης, όπως ήδη είδαμε, χρειάζονται 2 αρχικές συνθήκες $x=x_o$ και $y=y_o$, για τις Δ.Ε. ν--οστής τάξης απαιτούνται γενικά: $x=x_o$, $y=y_o$, $y' = y'_o, \dots, y^{(\nu-1)} = y_o^{(\nu-1)}$, δηλ. ν+1 δεδομένες αρχικές συνθήκες.

Απ' τη πληθώρα των μορφών των Δ.Ε. ανώτερης τάξης, ορισμένες μόνο περιπτώσεις μπορούμε να επιλύσουμε (ολοκληρώσουμε), απ' τις οποίες εμείς θα ασχοληθούμε μόνο με τις λεγόμενες **Γραμμικές Δ.Ε. ανώτερης τάξης**, και ειδικότερα αυτές της 2ης τάξης με σταθερούς μάλιστα συντελεστές, αφού αυτές είναι που παρουσιάζουν ιδιαίτερο ενδιαφέρον για τις τεχνικές εφαρμογές.

3.1. ΓΡΑΜΜΙΚΕΣ Δ.Ε. ΑΝΩΤΕΡΗΣ ΤΑΞΗΣ - (Δ.Ε.Γ.).

Ονομάζουμε Γραμμική Δ.Ε. ανώτερης (ν-οστής) τάξης, κάθε Δ.Ε. της μορφής:

$$y^{(\nu)} + P_1(x)y^{(\nu-1)} + P_2(x)y^{(\nu-2)} + \cdots + P_\nu(x)y = Q(x), \quad (1),$$

όπου $P_1(x),\ldots, P_\nu(x)$ και $Q(x)$, είναι συναρτήσεις του χ, (δηλαδή Γραμμικές λέγονται αυτές που είναι α' βαθμού ως προς y, y', y'', ..., $y^{(\nu)}$.).

Αν $Q(x)=0$, τότε η (1) γίνεται:

$$y^{(\nu)} + P_1(x)y^{(\nu-1)} + \cdots + P_\nu(x)y = 0, \quad (1о\mu)$$

και λέγεται "αντίστοιχη ομογενής της (1)" ή "χωρίς β' μέλος", ενώ η (1) λέγεται και "μη ομογενής" ή "με β' μέλος".

Για να βρούμε τη γενική λύση της (1), στηριζόμαστε στην ισχύ της πρότασης:

"Η γενική λύση της Δ.Ε.Γ. (1), ισούται με το άθροισμα της γενικής λύσης της αντίστοιχης ομογενούς (1ομ) και μιας μερικής λύσης της (1), δηλαδή

$\boxed{y_{\Delta E\Gamma}=y_{o\mu}+y_{\mu}}$."

Έτσι, το πρόβλημα μετατοπίζεται, κατά πρώτο στην εύρεση της γενικής λύσης της αντίστοιχης ομογενούς (1ομ) και κατά δεύτερο στο προσδιορισμό μιας μερικής λύσης της (1). Η ακριβής διαδικασία που ακολουθείται, για την απάντηση σ' αυτά τα δύο προβλήματα που μας οδηγεί η ισχύς της παραπάνω πρότασης, είναι και ο σκοπός των επόμενων παραγράφων.

3.2. ΟΜΟΓΕΝΕΙΣ Δ.Ε.Γ. ΑΝΩΤΕΡΗΣ ΤΑΞΗΣ.

Όπως προαναφέρθηκε, η αντίστοιχη ομογενής Δ.Ε.Γ., ν-οστής τάξης, είναι της μορφής: $y^{(\nu)}+P_1(x)y^{(\nu-1)}+\cdots+P_\nu(x)y=0$, (1ομ).

Για να βρούμε της γενική λύση της (1ομ), στηριζόμαστε στην ισχύ του παρακάτω θεωρήματος:

"Αν y_1, y_2, ..., y_ν, είναι ν γραμμικά ανεξάρτητες, μερικές λύσεις της (1ομ), τότε η γενική λύση της (1ομ) είναι: $y=c_1y_1+c_2y_2+\cdots+c_\nu y_\nu$, (2ομ), όπου c_1, c_2, ..., c_ν, είναι αυθαίρετες σταθερές".

Σημείωση:

Οι συναρτήσεις y_1, y_2, ..., y_ν, λέγονται **γραμμικά ανεξάρτητες** αν η σχέση: $c_1y_1+c_2y_2+\cdots+c_\nu y_\nu=0$, (3),

ισχύει μόνο όταν, $c_1=c_2=\cdots=c_\nu=0$,

(οπότε λοιπόν για τις Δ.Ε.Γ. ομογενείς λέμε τότε πως οι y_1, ..., y_ν, αποτελούν ένα **θεμελιώδες ή βασικό σύστημα λύσεων της (1ομ)**).

Ειδάλλως, αν δηλαδή, ισχύει η (3) με κάποιο από τα c_1, ..., c_ν, διάφορο του 0, τότε οι συναρτήσεις y_i, i=1, ..., ν, λέγονται γραμμικά εξαρτημένες.

Για να εξετάσουμε αν ν συναρτήσεις y_1, y_2, ..., y_ν, είναι γραμμικά ανεξάρτητες, εξετάζουμε ισοδύναμα αν η λεγόμενη ορίζουσα **Wronski** (W) είναι διάφορη του 0, δηλαδή αν

$$W=\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_\nu \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_\nu' \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1^{(\nu-1)} & y_2^{(\nu-1)} & \cdots & y_\nu^{(\nu-1)} \end{vmatrix}\neq 0,$$

Ειδάλλως αν W=0, τότε οι συναρτήσεις y_1,...y_ν, λέγονται γραμμικώς εξαρτημένες. (**Ειδικά**, αν πρόκειται για τον έλεγχο της ανεξαρτησίας 2 συναρτήσεων y_1, y_2, τότε αυτές είναι γραμμικώς ανεξάρτητες αν είναι $y_1/y_2\neq$ σταθεράς, ειδάλλως αν $y_1/y_2=$σταθερά, τότε y_1, y_2, γραμμικά εξαρτημένες, π.χ. $y_1=x$ και $y_2=2x$ $\Rightarrow y_1/y_2=1/2=$σταθερά, άρα y_1, y_2, είναι γραμμικώς εξαρτημένες, ενώ $y_1=2e^{2x}$, $y_2=2e^{5x}\Rightarrow y_1/y_2=e^{-3x}\neq$σταθεράς, άρα γραμμικώς ανεξάρτητες.

Έτσι λοιπόν, απ' τα παραπάνω προκύπτεί, πως για την εύρεση της γενικής λύσης της (1ομ), μας χρειάζεται ένα θεμελιώδες σύστημα λύσεών της, που όμως δεν είναι πάντα εύκολο και πολλές φορές ούτε καν δυνατό, να βρεθεί, επομένως γενικές μέθοδοι και κανόνες δεν υπάρχουν. Για μια όμως ειδική κατηγορία Δ.Ε.Γ. ομογενών, που είναι πολύ χρήσιμη στη πράξη, και συγκεκριμμένα αυτές που οι συντελεστές $P_1(x)$, ...,$P_\nu(x)$, είναι σταθεροί αριθμοί (κι' όχι συναρτήσεις του x), μπορεί εύκολα να βρεθεί ένα θεμελιώδες σύστημα λύσεων, όπως θα δούμε αμέσως παρακάτω, εξετάζοντας μάλιστα ειδικότερα απ' αυτές, τις Δ.Ε.Γ. ομογενείς $2^{ης}$ τάξης.

3.3. Δ.Ε.Γ. ΟΜΟΓΕΝΕΙΣ (με σταθερούς συντελεστές, $2^{ης}$ τάξης).

Οι Δ.Ε.Γ. ομογενείς με σταθερούς συντελεστές, $2^{ης}$ τάξης, είναι της γενικής μορφής:

$\boxed{y'' + \alpha_1 y' + \alpha_2 y = 0}$ **(1ομ), με α_1, α_2, (σταθερές) $\in \mathbf{R}$.**

Για να βρούμε τη γενική λύση της, αρκεί κατά τη **§** [3.2.], να βρούμε 2 γραμμικά ανεξάρτητες μερικές λύσεις της. Εύκολα διαπιστώνεται, πως μια μερική λύση της (1ομ) είναι της μορφής $y_1 = e^{\rho x}$, όπου **ρ** είναι ρίζα της εξίσωσης:

$\boxed{\kappa^2 + \alpha_1 \kappa + \alpha_2 = 0}$ (2),

[η (2) εύκολα προκύπτει απ' την (1ομ), θέτοντας κ αντί για y και θεωρώντας την τάξη παραγώγισης του y ως εκθέτη του κ.]

που λέγεται **χαρακτηριστική εξίσωση της (1ομ)** και οι ρίζες της **χαρακτηριστικές ρίζες**.

Πράγματι η $y_1 = e^{\rho x}$, όπου **ρ** είναι ρίζα της (2), είναι μια μερική λύση της (1ομ), αφού την επαληθεύει:

$$y_1'' + \alpha_1 y_1' + \alpha_2 y_1 = 0 \Leftrightarrow \left(e^{\rho x}\right)'' + \alpha_1\left(e^{\rho x}\right)' + \alpha_2\left(e^{\rho x}\right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\rho^2 e^{\rho x} + \alpha_1 \rho e^{\rho x} + \alpha_2 e^{\rho x} = 0 \Leftrightarrow \left(\rho^2 + \alpha_1 \rho + \alpha_2\right) e^{\rho x} = 0 \Leftrightarrow 0 = 0$$

Έτσι λοιπόν γίνεται φανερό, πως ανάλογα με το είδος των ριζών της χαρακτηριστικής εξίσωσης (2), προσδιορίζουμε κάθε φορά 2 γραμμικά ανεξάρτητες μερικές λύσεις της (1ομ), δηλαδή κατά την προϋγούμενη παράγραφο [3.2.], βρίσκουμε ένα θεμελιώδες σύστημα λύσεων της (1ομ).

Έτσι διακρίνουμε τις εξής 3 περιπτώσεις:

1) Η (2) έχει 2 ρίζες πραγματικές και άνισες, δηλαδή η (2) έχει $\Delta > 0$,

2) Η (2) έχει 2 ρίζες πραγματικές και ίσες, δηλαδή η (2) έχει $\Delta = 0$,

3) Η (2) έχει 2 ρίζες μιγαδικές (συζυγείς), δηλαδή η (2) έχει $\Delta < 0$.
Συγκεκριμμένα, αναλυτικά έχουμε:

περίπτωση $1^η$: (Χαρακτηριστικές ρίζες απλές πραγματικές).

Αν η χαρακτηριστική, εξίσωση (2) της (1ομ), έχει ρίζες απλές πραγματικές, $\boldsymbol{\rho_1}$, $\boldsymbol{\rho_2}$, τότε οι (προφανείς) μερικές λύσεις $\mathbf{y_1 = e^{\rho_1 x}}$ και $\mathbf{y_2 = e^{\rho_2 x}}$ είναι γράμμικά ανεξάρτητες αφού (δες και ορίζουσα Wronski),

$$y_1 / y_2 = e^{\rho_1 x} / e^{\rho_2 x} = e^{(\rho_1 - \rho_2)x} \neq \text{σταθεράς}.$$

Άρα, οι μερικές λύσεις y_1 και y_2, αποτελούν ένα θεμελιώδες σύστημα λύσεων της (1ομ) και επομένως κατά τη **§** [3.2.], **η γενική λύση** είναι:

$\boxed{y = c_1 e^{\rho_1 x} + c_2 e^{\rho_2 x}}$ $(2^*_{o\mu})$, c_1, c_2, αυθαίρετες σταθερές.

π.χ.

α) Να λυθεί η Δ.Ε. $y'' - y' - 2y = 0$.

Λύση

Η χαρακτηριστική εξίσωση είναι: $\kappa^2 - \kappa - 2 = 0$, με (χαρακτηριστικές) ρίζες: $\rho_1 = 2$, $\rho_2 = -1$. Άρα οι μερικές λύσεις $y_1 = e^{2x}$, $y_2 = e^{-x}$, αποτελούν ένα θεμελιώδες σύστημα λύσεων και άρα η γενική λύση είναι: $y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-x}$.

β) Επίσης η Δ.Ε. $8y'' + 2y' - 3y = 0$, καθώς και να βρεθεί η μερική λύση της με αρχικές συνθήκες $x_o = 0$, $y_o = -6$, $y'_o = 7$.

Λύση

Η χαρακτηριστική εξίσωση είναι: $8\kappa^2 + 2\kappa - 3 = 0$, με ρίζες $\rho_1 = \frac{1}{2}$, $\rho_2 = -\frac{3}{4}$.

Άρα, οι συναρτήσεις $y_1 = e^{\frac{1}{2}x}$, $y_2 = e^{-\frac{3}{4}x}$, που (προφανώς) είναι μερικές λύσεις, γραμμικά ανεξάρτητες, θ' αποτελούν σύμφωνα με τα προαναφερθέντα, ένα θεμελιώδες σύστημα λύσεων της δοσμένης Δ.Ε. και επομένως η γενική λύση είναι: $y = c_1 e^{\frac{1}{2}x} + c_2 e^{-\frac{3}{4}x}$ (I).

Για την εύρεση τώρα, της ζητούμενης μερικής λύσης, βρίσκουμε κατ' αρχή τη παράγωγο της γενικής λύσης: $y' = \frac{1}{2}c_1 e^{\frac{1}{2}x} - \frac{3}{4}c_2 e^{-\frac{3}{4}x}$ (II), οπότε αντικαθιστώντας τις δοσμένες αρχικές συνθήκες στις (I) και (II), παίρνουμε:

$$\left\{\begin{matrix} -6 = c_1 + c_2 \\ 7 = \frac{1}{2}c_1 - \frac{3}{4}c_2 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} c_1 = 2 \\ c_2 = -8 \end{matrix}\right\}.$$

Άρα, η ζητούμενη μερική λύση είναι: $y_\mu = 2e^{\frac{1}{2}x} - 8e^{-\frac{3}{4}x}$.

περίπτωση 2^η : (Χαρακτηριστική ρίζα διπλή πραγματική).

Αν η χαρακτιριστική εξίσωση (2) της (1ομ), έχει μία ρίζα διπλή πραγματική **ρ**, τότε εύκολα διαπιστώνεται πως ένα θεμελιώδες σύστημα λύσεων είναι οι μερικές λύσεις $\mathbf{y_1 = e^{\rho x}}$ και $\mathbf{y_2 = xe^{\rho x}}$

(Επειδή $e^{\rho x}$ και $e^{\rho x}$ ταυτίζονται, μια άλλη μερική λύση που βρίσκουμε είναι $xe^{\rho x}$).

Άρα, σ' αυτή τη περίπτωση, **η γενική λύση** είναι:

$\boxed{y = c_1 e^{\rho x} + c_2 x e^{\rho x} = (c_1 + c_2 x)e^{\rho x}}$ **($2^{**}_{o\mu}$), με c_1, c_2, αυθαίρετες σταθερές.**

π.χ.

α) **Να λυθεί η Δ.Ε.** $y'' + 4y' + 4y = 0$.

Λύση

Η χαρακτηριστική εξίσωση είναι: $\kappa^2 + 4\kappa + 4 = 0$, με ρίζες: $\rho_1 = \rho_2 = -2$. Άρα, η γενική λύση είναι: $y = c_1 e^{-2x} + c_2 x e^{-2x}$ ή $y = (c_1 + c_2 x)e^{-2x}$.

β) **Να βρεθεί η μερική λύση της** $y'' - 6y' + 9y = 0$, **με αρχικές συνθήκες** $x_o = 0$, $y_o = -1$, $y'_o = -3$.

Λύση

Πρέπει να βρούμε πρώτα τη γενική λύση. Οπότε, επειδή η χαρακτηριστική εξίσωση $\kappa^2 - 6\kappa + 9 = 0 \Leftrightarrow \rho_1 = \rho_2 = 3$, άρα η γενική λύση είναι:

$y = (c_1 + c_2 x)e^{3x}$, (I). Παραγωγίζοντας δε την (I), έχουμε:

$y' = 3c_1 e^{3x} + c_2 e^{3x} + 3c_2 x e^{3x}$, (II), οπότε αντικαθιστώντας τις δοσμένες αρχικές συνθήκες στις (I), (II), παίρνουμε:

$$\left\{\begin{matrix} -1 = (c_1 + c_2 \cdot 0)e^{3\cdot 0} \\ -3 = 3c_1 e^{3\cdot 0} + c_2 e^{3\cdot 0} + 3c_2 \cdot 0 \cdot e^{3\cdot 0} \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} -1 = c_1 \\ -3 = -3 + c_2 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} c_1 = -1 \\ c_2 = 0 \end{matrix}\right\}.$$

Άρα, η ζητούμενη μερική λύση, προκύπτει απ' τη γενική λύση (I), θέτοντας c_1=-1, c_2=0, δηλαδή:

$y_\mu = (-1 + 0 \cdot x)e^{3x} = -e^{3x}$.

περίπτωση 3^η : (Χαρακτηριστικές ρίζες μιγαδικές).

Αν η χαρακτηριστική εξίσωση (2) της (1ομ), έχει 2 ρίζες μιγαδικές (άρα συζυγείς), $\rho_{1,2} = \alpha \pm \beta_i$, τότε ένα θεμελιώδες σύστημα λύσων, είναι οι μερικές λύσεις:

$\mathbf{y_1 = e^{\alpha x}}$**συνβx** και $\mathbf{y_2 = e^{\alpha x}}$**ημβx**

και η **γενική λύση** τότε είναι:

$\boxed{y = e^{\alpha x}(c_1 συν βx + c_2 ημ βx)}$ **($2^{***}_{ομ}$), με c_1, c_2, αυθαίρετες σταθερές, ή ισοδύναμα:** $y = c_1 e^{\alpha x} ημ(βx + c_2)$ **ή** $y = c_1 e^{\alpha x} συν(βx + c_2)$.

(**Απόδειξη:** Οι συναρτήσεις $\left\{y_1 = e^{\rho_1 x} = e^{(\alpha+\beta_i)x},\ y_2 = e^{\rho_2 x} = e^{(\alpha-\beta_i)x}\right\}$ που προκύπτουν κατά τα παραπάνω, εύκολα διαπιστώνεται πως αποτελούν ένα θεμελιώδες σύστημα λύσεων της (1ομ), αφού την επαληθεύουν και είναι γραμμικά ανεξάρτητες. Άρα, η γενική λύση της (1ομ), σ' αυτή τη περίπτωση, θά' ναι:

$$\begin{aligned} y &= c_1^* y_1 + c_2^* y_2 = c_1^* e^{(\alpha+\beta_i)x} + c_2^* e^{(\alpha-\beta_i)x} = \\ &= c_1^* \cdot e^{\alpha x}(συνβx + iημβx) + c_2^* \cdot e^{\alpha x}(συνβx - iημβx) = \\ &= c_1^* e^{\alpha x} συνβx + c_1^* i \cdot e^{\alpha x} ημβx + c_2^* e^{\alpha x} συνβx - c_2^* i \cdot e^{\alpha x} ημβx = \\ &= e^{\alpha x}\left[(c_1^* + c_2^*)συνβx + i(c_1^* - c_2^*)ημβx\right] = e^{\alpha x}(c_3 συνβx + i \cdot c_4 ημβx), \end{aligned}$$

$$\left[\begin{array}{l} \text{ως γνωστό: } e^{\alpha+\beta i} = \\ = e^{\alpha}(συνβ + iημβ), \\ \text{(δες μιγαδικούς).} \end{array}\right]$$

που είναι βέβαια μια λύση μιγαδική, απ' την οποία όμως εύκολα προκύπτει πως μπορούμε να "τραβήξουμε" μια πραγματική γενική λύση, αφού οι 2 πραγματικές συναρτήσεις $e^{\alpha x}συνβx$ και $e^{\alpha x}ημβx$ διαπιστώνεται πως είναι μερικές λύσεις της (1ομ), γραμμικά ανεξάρτητες, δηλαδή αποτελούν ένα θεμελιώδες σύστημα λύσεων της (1ομ), απ' όπου και τελικά παίρνουμε τη πραγματική γενική λύση ($2^{***}_{ομ}$).

π.χ.

Να λυθεί η Δ.Ε. $y'' + y' + y = 0$.

Λύση

Έχει χαρακτηριστική εξίσωση: $\kappa^2 + \kappa + 1 = 0 \Leftrightarrow \rho_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{-\sqrt{3}}{2} i$ οπότε κατά τον ($2^{***}_{ομ}$), η γενική λύση είναι:

$$y = e^{-\frac{1}{2}x}\left(c_1 συν\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + c_2 ημ\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right)$$

3.4. ΓΕΝΙΚΕΥΣΗ (Δ.Ε.Γ. ομογενές με σταθερούς συντελεστές, ν-οστής τάξης).

Αυτές οι Δ.Ε. είναι της μορφής:

$y^{(\nu)} + \alpha_1 y^{(\nu-1)} + \alpha_2 y^{(\nu-2)} + \cdots + \alpha_{\nu-1} y' + \alpha_\nu y = 0$ με $\alpha_1, \ldots, \alpha_\nu \in R$.

Η αντίστοιχη χαρακτηριστική εξίσωση είναι:

$\kappa^\nu + \alpha_1 \kappa^{\nu-1} + \alpha_2 \kappa^{\nu-2} + \cdots + \alpha_{\nu-1}\kappa + \alpha_\nu = 0$, που όντας ν-οστού βαθμού πολυωνυμική εξίσωση θα δέχεται ν ρίζες (πραγματικές ή μιγαδικές, απλές ή πολλαπλές).

Επεκτείνοντας τα προαναφερθέντα για τις Δ.Ε.Γ. ομογενείς με σταθερούς συντελεστές, $2^{ης}$ τάξης, σ' αυτές της ν-οστής τάξης, η γενική λύση εξαρτάται κι εδώ, απ' το είδος των ριζών της χαρακτηριστικής εξίσωσης.

Έτσι έχουμε (γενίκευση):

1) Σε κάθε **απλή πραγματική ρίζα ρ**, αντιστοιχεί στη γενική λύση ένας όρος του τύπου $ce^{\rho x}$.

2) Σε κάθε **πολλαπλή πραγματική ρίζα ρ, πολλαπλότητας μ**, αντιστοιχεί στη γενική λύση ένας όρος του τύπου $(c_1 + c_2 x + \cdots + c_\mu x^{\mu-1})e^{\rho x}$, (δηλαδή ένας όρος της μορφής $ce^{\rho x}$, πολλαπλασιασμένος μ' ένα ακέραιο πολυώνυμο του x, βαθμού μ-1, με αυθαίρετους συντελεστές, όπου μ ο βαθμός πολλαπλότητας της ρίζας ρ).

3) Σε κάθε **ζεύγος απλών (συζυγών) μιγαδικών ριζών**, $\rho_1 = \alpha + \beta i$, $\rho_2 = \alpha - \beta i$, στη γενική λύση αντιστοιχεί ένας όρος με τύπο $e^{\alpha x}(c_1 \sigma\upsilon\nu\beta x + c_2 \eta\mu\beta x)$.

4) Σε κάθε ζεύγος **πολλαπλών (συζυγών) μιγαδικών ριζών, πολλαπλότητας μ**, στη γενική λύση αντιστοιχεί ένας όρος, με τύπο:
$e^{\alpha x}\left[(c_1 + c_2 x + \cdots + c_\mu x^{\mu-1})\sigma\upsilon\nu\beta x + (c_1^* + c_2^* x + \cdots + c_\mu^* x^{\mu-1})\eta\mu\beta x\right]$

π.χ.

Να λυθεί η Δ.Ε. $y''' - 2y'' + y' = 0$.

Λύση

Η αντίστοιχη χαρακτηριστική εξίσωση είναι:

$\kappa^3 - 2\kappa^2 + \kappa = 0 \Leftrightarrow \{\rho_1 = 0,\ \rho_2 = \rho_3 = 1\}$, Άρα οι μερικές λύσεις που δίνει κάθε ρίζα, $e^{\alpha x} = 1$, e^x, xe^x, θ' αποτελούν ένα θεμελιώδες σύστημα λύσεων, δηλαδή η γενική λύση είναι: $y = c_1 + c_2 e^x + c_3 x e^x$.

Δρ. Ιωάννης Αθ. Θεοδώρου
Τακτ. Καθηγητής ΑΤΕΙ

3.5. Παραδείγματα (στις Δ.Ε.Γ. ομογενείς με σταθερούς συντελεστές)

1) Να λυθεί η Δ.Ε. $y^{(4)} - 13y'' + 36y = 0$.

Λύση

Κατά τη γενίκευση της § [3.4.], αφού η Δ.Ε. είναι $4^{ης}$ τάξης, βρίσκουμε πρώτα κι' εδώ την αντίστοιχη χαρακτηριστική εξίσωση:

$\kappa^4 - 13\kappa^2 + 36 = 0 \Leftrightarrow \{\rho_1 = 3,\ \rho_2 = -3,\ \rho_3 = 2,\ \rho_4 = -2\}$, οπότε, σε όλες τις χαρακτηριστικές ρίζες, αντιστοιχούν οι γραμμικά ανεξάρτητες μερικές λύσεις: e^{3x}, e^{-3x}, e^{2x}, e^{-2x}. Άρα η γενική λύση είναι: $y = c_1e^{3x} + c_2e^{-3x} + c_3e^{2x} + c_4e^{-2x}$

2) Να βρεθεί το μερικό ολοκλήρωμα της Δ.Ε. $\ddot{y} - \dot{y} - 2y = 0$, ***που ικανοποιεί τις αρχικές συνθήκες:*** $x = 0,\ y = 0,\ \dot{y} = 3$, ***(σε διάφορες βιβλιογραφίες χρησιμοποιείται και ο παραπάνω συμβολισμός της παραγώγου δηλαδή με τελεία, όπως*** $\ddot{y} = y''$, $\dot{y} = y'$, ***κ.λ.π.).***

Λύση

Η χαρακτηριστική εξίσωση είναι: $\kappa^2 - \kappa - 2 = 0$, με ρίζες $\rho_1 = 2$, $\rho_2 = -1$. Άρα η γενική λύση είναι: $y = c_1e^{2x} + c_2e^{-x}$. Οπότε για τη ζητούμενη μερική λύση, αντικαθιστούμε τις δοσμένες αρχικές συνθήκες στη γενική λύση και στη παράγωγο της γενικής λύσης, δηλαδή έχουμε:

$$\left\{\begin{array}{l} y = c_1e^{2x} + c_2e^{-x} \\ \dot{y} = 2c_1e^{2x} - c_2e^{-x} \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} 0 = c_1 + c_2 \\ 3 = 2c_1 - c_2 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} c_1 = 1 \\ c_2 = -1 \end{array}\right\}$$

Επομένως, η ζητούμενη μερική λύση είναι: $y_\mu = e^{2x} - e^{-x}$.

3) Επίσης η μερική λύση της $\ddot{y} - 2\dot{y} = 0$, ***για*** $x = 0,\ y = 0$ ***και για*** $x = \ln 2,\ y = 3$.

Λύση

Η χαρακτηριστική εξίσωση είναι: $\kappa^2 - 2\kappa = 0$, με ρίζες $\rho_1 = 0$, $\rho_2 = 2$. Άρα η γενική λύση είναι: $y = c_1 + c_2e^{2x}$. Οπότε αντικαθιστώντας τις δοσμένες αρχικές συνθήκες στη γενική λύση, παίρνουμε:

$$\left\{\begin{matrix} c_1 + c_2 = 0 \\ c_1 + c_2 e^{2\ln 2} = 3 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} c_1 + c_2 = 0 \\ c_1 + c_2 e^{\ln 4} 3 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} c_1 + c_2 = 0 \\ c_1 + 4c_2 = 3 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} c_1 = -1 \\ c_2 = 1 \end{matrix}\right\}$$

Άρα, η ζητούμενη μερική λύση είναι: $y_\mu = -1 + e^{2x}$.

4) Να βρεθεί η ολοκληρωτική καμπύλη της $y'' + 2y' + 5y = 0$, που οκανοποιεί τις αρχικές συνθήκες: $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

Λύση

Ζητείται δηλαδή να βρεθεί η γραφική παράσταση της μερικής λύσης που ικανοποιεί τις δοσμένες αρχικές συνθήκες, πράγμα βέβαια που προϋποθέτει την εύρεση της γενικής λύσης. Έτσι, η αντίστοιχη χαρακτηριστική εξίσωση της παραπάνω Δ.Ε. είναι: $\kappa^2 + 2\kappa + 5 = 0$, με ρίζες $\rho_{1,2} = -1 \pm 2i$, οπότε κατά τον τύπο ($2^{***}_{o\mu}$) της $3^{ης}$ περίπτωσης, η γενική λύση θά' ναι:

$$y = e^{\alpha x}(c_1 \sigma \upsilon \nu \beta x + c_2 \eta \mu \beta x) = \mathbf{e^{-x}(c_1 \sigma \upsilon \nu 2x + c_2 \eta \mu 2x)}.$$

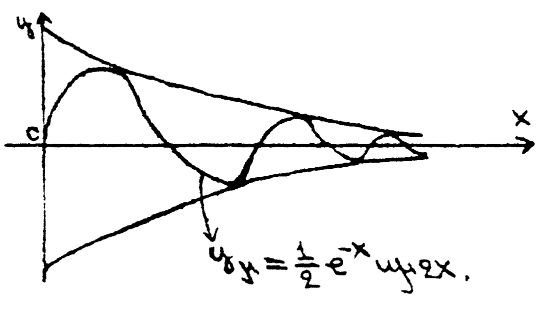
Για να βρούμε τη ζητούμενη μερική λύση, αρκεί να προσδιορίσουμε τις σταθερές c_1, c_2, οπότε αντικαθιστώντας στη γενική λύση και στη παράγωγό της, τις δοσμένες αρχικές συνθήκες παίρνουμε:

$$y = e^{-x}(c_1 \sigma \upsilon \nu 2x + c_2 \eta \mu 2x) \Leftrightarrow 0 = e^0(c_1 \cdot 1 + c_2 \cdot 0) \Leftrightarrow \mathbf{0 = c_1}, \text{ οπότε}$$

$$y' = -e^{-x}(c_1 \sigma \upsilon \nu 2x + c_2 \eta \mu 2x) + e^{-x}(-2c_1 \eta \mu 2x + 2c_2 \sigma \upsilon \nu 2x) =$$

$$= -e^{-x} 2c_2 \eta \mu 2x + e^{-x} \cdot 2c_2 \sigma \upsilon \nu 2x \Leftrightarrow 1 = -e^0 c_2 \cdot 0 + e^0 2 \cdot c_2 \cdot 1 \Leftrightarrow \mathbf{\frac{1}{2} = c_2}.$$

Άρα: $y_\mu = e^{-x}\left(0 + \frac{1}{2}\eta \mu 2x\right)$ ή $\mathbf{y_\mu = \frac{1}{2} e^{-x} \eta \mu 2x}$, με ολοκληρωτική καμπύλη (εννοείται ότι γίνεται πλήρως μελέτη της y_μ):



5) Να λυθεί η $y'' - 4y' + 13y = 0$.

Λύση

Η χαρακτηριστική εξίσωση είναι: $\kappa^2 - 4\kappa + 13 = 0$, με ρίζες $\rho_{1,2} = -2 \pm 3i$.

Άρα, ένα θεμελιώδες σύστημα λύσεων είναι οι $y_1 = e^{\alpha x}\sigma\upsilon\nu\beta x = e^{2x}\sigma\upsilon\nu 3x$ και $y_2 = e^{\alpha x}\eta\mu\beta x = e^{2x}\eta\mu 3x$, και η γενική λύση είναι: $y = e^{2x}(c_1\sigma\upsilon\nu 3x + c_2\eta\mu 3x)$.

3.6. Δ.Ε.Γ. ΜΗ ΟΜΟΓΕΝΕΙΣ ΜΕ ΣΤΑΘΕΡΟΥΣ ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΕΣ

Για την απλούστευση των πραγμάτων, θ' αναφερθούμε μόνο σ' αυτές της $2^{ης}$ τάξης που παρουσιάζουν και μεγαλύτερη χρησιμότητα στις εφαρμογές, τα ίδια όμως συμπεράσματα επεκτείνονται (ανάλογα) και γενικεύονται για τις οποιασδήποτε τάξης (ν-οστής).

Όπως ήδη έχει αναφερθεί, η γενική μορφή της υπό εξέταση Δ.Ε. Γραμμικής μη-ομογενούς (δηλαδή με β' μέλος διάφορο του 0), με σταθερούς συντελεστές και μάλιστα $2^{ης}$ τάξης, είναι:

$\boxed{y'' + \alpha_1 y' + \alpha_2 y = Q(x)}$ **(1), με α_1, $\alpha_2 \in R$ και $Q(x)$ = συναρτήσεις του x,**
ενώ η γενική λύση της, $y_{ΔΕΓ}$, είναι το άθροισμα: της γενικής λύσης $y_{ομ}$, της αντίστοιχης ομογενούς $y'' + \alpha_1 y' + \alpha_2 y = 0$, $(1_{ομ})$, πρόβλημα που αναπτύχθηκε στη προηγούμενη παράγραφο, και μιας μερικής λύσης y_μ της (1), δηλαδή:

$\boxed{y_{ΔΕΓ} = y_{ο\mu} + y_\mu}$ (2).

Θεωρώντας λοιπόν γνωστή τη γενική λύση της $(1_{ομ})$, αναγόμαστε πια στο πρόβλημα του προσδιορισμού μιας μερικής λύσης y_μ της (1), ώστε να αρκεί κατόπιν η απλή εφαρμογή της (2).

Οι συλλογιστικές αναζήτησης και οι μέθοδοι προσδιορισμού μιας μερικής λύσης της (1) είναι διάφορες, θ' αρκεστούμε όμως εμείς στις δύο πιο σημαντικές για τις εφαρμογές και συγκεκριμμένα:

α) στη μέθοδο των προσδιοριστέων συντελεστών και

β) στη μέθοδο μεταβολής των αυθαιρέτων σταθερών ή μέθοδος του Lagrange.

α) ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΩΝ ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΤΕΩΝ ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΩΝ

ΓΕΝΙΚΑ:

Η μέθοδος αυτή δεν είναι γενική, δηλαδή δεν απαντά σ' οποιαδήποτε περίπτωση της (1), παρά μόνο όταν το β' μέλος της, το Q(x) είναι της μορφής:

$Q(x) = e^{\alpha x}\left[Q_n(x)συνβx + Q_m(x)ημβx\right]$, (ή άθροισμα συναρτήσεων αυτής της μορφής), όπου α, β, γνωστοί αριθμοί και $Q_n(x)$, $Q_m(x)$, πολυώνυμα (n) και (m) βαθμού ως προς x, αντίστοιχα. Τότε βρίσκεται, πως μια μερική λύση, της (1), θάναι της μορφής: $y_\mu = x^\lambda e^{\alpha x}\left[P_\mu(x)συνβx + T_\mu(x)ημβx\right]$ (3), όπου λ είναι ο βαθμός πολλαπλότητας της ενδεχόμενης χαρακτηριστικής ρίζας ρ=α+βi, μ είναι ο μέγιστος των αριθμών n και m, και τα $P_\mu(x)$, $T_\mu(x)$ είναι πλήρη πολυώνυμα (μ) βαθμού ως προς x, με αγνώστους και διαφορετικούς προσδιοριστέους συντελεστές (που προσδιορίζονται απ' την αναγκαιότητα η y_μ να επαληθεύει ταυτοτικά την (1)).

Παρότι, η μέθοδος των προσδιοριστέων συντελεστών δεν είναι γενική, είναι όμως μάλλον η απλούστερη στους υπολογισμούς, και καλύπτει ένα σημαντικό μέρος απ' τις ανάγκες των τεχνολογικών εφαρμογών, ενώ η τεχνική της μπορεί να επεκταθεί και στις Δ.Ε.Γ. μη ομογενείς, με σταθερούς συντελεστές, οποιασδήποτε τάξης.

Τέλος χάριν απλότητας, θα εξετάσουμε εξειδικεύοντας τα παραπάνω, ανάλογα με το είδος της μορφής του Q(x), διακρίνοντας συγκεκριμμένα τις εξής περιπτώσεις:

περίπτωση 1^{η}: Αν Q(x) είναι πολυώνυμο (n) βαθμού ως προς x.

Τότε η (1), θα δέχεται μια μερική λύση της μορφής:

$\boxed{y_\mu = x^\lambda P_n(x)}$ (1α), όπου $P_n(x) = A_n x^n + A_{n-1}x^{n-1} + \cdots + A_1 x + A_0$, (δηλαδή $P_n(x)$, είναι πλήρες πολυώνυμο (n) βαθμού ως προς x, με άγνωστους συντελεστές), και λ είναι ο βαθμός πολλαπλότητας της ενδεχόμενης χαρακτηριστικής ρίζας, ρ=0, (προφανώς, αν το 0 δεν είναι ρίζα της χαρακτηριστικής εξίσωσης, τότε λ=0).

Ο προσδιορισμός των άγνωστων συντελεστών του πολυυωνύμου $P_n(x)$, δηλαδή των A_n, A_{n-1}, ..., A_1, A_0, (απ' όπου και το όνομα της εξεταζόμενης μεθόδου), γίνεται απ' το ότι η y_μ της μορφής (1α), οφείλει να ικανοποιεί ταυτοτικά την (1), να εξισώσουμε τους συντελεστές των ομοιόβαθμων όρων, οπότε απ' το προκύπτον σύστημα παίρνουμε και τις τιμές των αγνώστων A_n, A_{n-1}, ..., A_1, A_0.

Η ακριβής διαδικασία αποσαφηνίζεται πλήρως, στα παραδείγματα που ακολουθούν.

π.χ.

1) $2y'' + 2y' + 3y = x^2 + 2x - 1$, ***(1).***

Λύση

είναι $y_{ΓΕΓ} = y_{ο\mu} + y_\mu$, (2).

Η αντίστοιχη ομογενής είναι: $2y'' + 2y' + 3y = 0$, με χαρακτηριστική εξίσωση: $2\kappa^2 + 2\kappa + 3 = 0 \Leftrightarrow \rho_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2} i$, οπότε η γενική της λύση είναι:

$$y_{o\mu}=e^{-\frac{1}{2}x}\left[c_1\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\sqrt{5}}{2}x\right)+c_2\eta\mu\left(\frac{\sqrt{5}}{2}x\right)\right],\ (3).$$

Για να βρούμε μια μερική λύση της μη ομογενούς (1), παρατηρώντας πως το β' μέλος της είναι πολυώνυμο β' βαθμού ως προς x και το 0 δεν είναι χαρακτηριστική ρίζα, επομένως μια μερική της λύση θάναι της μορφής:

$$y_\mu = x^\lambda P_n(x) = x^0\left(A_2x^2 + A_1x + A_0\right) = A_2x^2 + A_1x + A_0,\ (4).$$

Άρα η (4) θα επαληθεύει την (1), οπότε:

$$(1)\overset{(4)}{\Rightarrow} 2\cdot\left(y_\mu\right)'' + 2\cdot\left(y_\mu\right)' + 3y_\mu = x^2 + 2x - 1 \text{ ή}$$

$$\left[\begin{array}{l} y'_\mu = 2A_2x + A_1, \\ y''_\mu = 2A_2 \end{array}\right]$$

$$\text{ή } 4A_2 + 4A_2x + 2A_1 + 3A_2x^2 + 3A_1x + 3A_0 = x^2 + 2x - 1$$

$$\text{ή } 3A_2x^2 + (3A_1 + 4A_2)x + (3A_0 + 2A_1 + 4A_2) = x^2 + 2x - 1$$

οπότε, εξισώνοντας τους συντελεστές των ομοιόβαθμων όρων:

$$\left\{\begin{array}{c} 3A_2 = 1 \\ 3A_1 + 4A_2 = 2 \\ 3A_0 + 2A_1 + 4A_2 = -1 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} A_1 = \frac{2}{9} \\ A_2 = \frac{1}{3} \\ A_0 = -\frac{25}{27} \end{array}\right\},$$

Άρα $y_\mu = A_2x^2 + A_1x + A_0 = \frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{9}x - \frac{25}{27}$, και άρα

$$y_{ΓΕΓ} = y_{o\mu} + y_\mu = e^{-\frac{1}{2}x}\left[c_1\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\sqrt{5}}{2}x\right)+c_2\eta\mu\left(\frac{\sqrt{5}}{2}x\right)\right] + \frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{9}x - \frac{25}{27}.$$

2) Να λυθεί η Δ.Ε. $y'' - y' = 4x^3$.

Λύση

Πρόκειται για Δ.Ε.Γ. μη ομογενή, με σταθερούς συντελεστές, $2^{ης}$ τάξης, άρα η γενική της λύση θάναι: $y_{ΓΕΓ} = y_{o\mu} + y_\mu$.

Έτσι, η γενική λύση της αντίστοιχης ομογενούς, επειδή έχει χαρακτηριστική εξίσωση $\kappa^2 - \kappa = 0$, με χαρακτηριστικές ρίζες $\rho_1 = 0$, $\rho_2 = 1$, είναι:

$$\mathbf{y_{o\mu}} = c_1e^{\rho_1x} + c_2e^{\rho_2x} = c_1e^{0x} + c_2e^{1x} = \mathbf{c_1 + c_2e^x}.$$

Εξ' άλλου, επειδή το β' μέλος της Δ.Ε. είναι $Q(x) = 4x^3$, άρα θάχει μια μερική λύση της μορφής $y_\mu = x^\lambda \cdot P_n(x)$, όπου λ είναι βαθμός πολλαπλότητας της χαρακτηριστικής ρίζας $\rho_1 = 0$, δηλαδή $\lambda = 1$ και $P_n(x) = P_3(x) = = A_3x^3 + A_2x^2 + A_1x + A_0$.

Επομένως, $y_\mu = x^1(A_3x^3 + A_2x^2 + A_1x + A_0) = A_3x^4 + A_2x^3 + A_1x^2 + A_0x$

Οπότε, αντικαθιστώντας τη y_μ στη δοσμένη Δ.Ε., οφείλει να την ικανοποιεί ταυτοτικά, δηλαδή παίρνουμε:

$(y_\mu)'' - (y_\mu)' = 4x^3$ ή $12A_3x^2 + 6A_2x^2 + 2A_1 - 4A_3x^3 - 3A_2x^2 - 2A_1x - A_0 \equiv 4x^3$ ή $-4A_3x^3 + (12A_3 - 3A_2)x^2 + (6A_2 - 2A_1)x + 2A_1 - A_0 \equiv 4x^3$, οπότε:

$$\left\{\begin{array}{c} -4A_3 = 4 \\ 12A_3 - 3A_2 = 0 \\ 6A_2 - 2A_1 = 0 \\ 2A_1 - A_0 = 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} A_3 = -1 \\ A_2 = -4 \\ A_1 = -12 \\ A_0 = -24 \end{array}\right\}$$

Άρα η ζητούμενη μερική λύση είναι:

$\mathbf{y_\mu = -x^4 - 4x^3 - 12x^2 - 24x}$.

Συνεπώς: $y_{\Delta E\Gamma} = y_{o\mu} + y_\mu \Leftrightarrow \mathbf{y_{\Delta E\Gamma} = c_1 + c_2e^x - x^4 - 4x^3 - 12x^2 - 24x}$.

3) Να λυθεί η Δ.Ε., $y'' - y' = x^2 + 3x$, και να βρεθεί η μερική λύση της που ικανοποιεί τις αρχικές συνθήκες: $y(0) = 1$, $y'(0) = 3$.

Λύση

Όμοια με τα προηγούμενα παραδείγματα, η χαρακτηριστική εξίσωση της αντίστοιχης ομογενούς είναι $\kappa^2 - 3\kappa = 0$, με ρίζες $\rho_1 = 0$, $\rho_2 = 3$, άρα

$\mathbf{y_{o\mu}} = c_1e^{\rho_1x} + c_2e^{\rho_2x} = \mathbf{c_1 + c_2e^{3x}}$.

Εξ' άλλου, $y_\mu = x^\lambda \cdot P_n(x) = x^1P_2(x) = A_2x^3 + A_1x^2 + A_0x$, που σαν μερική λύση της Δ.Ε., οφείλει να την ικανοποιεί ταυτοτικά, δηλαδή $(y_\mu)'' - 3(y_\mu)' = x^2 + 3x$ ή

$6A_2x + 2A_1 - 9A_2x^2 - 6A_1x - 3A_0 = x^2 + 3x$,

ή $-9A_2x^2 + 6(A_2 - A_1)x + 2A_1 - 3A_0 = x^2 + 3x$, οπότε:

$$\begin{Bmatrix} -9A_2 = 1 \\ 6(A_2 - A_1) = 3 \\ 2A_1 - 3A_0 = 0 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} A_2 = -\dfrac{1}{9} \\ A_1 = -\dfrac{11}{18} \\ A_0 = -\dfrac{11}{27} \end{Bmatrix}$$

άρα $\mathbf{y_\mu = -\dfrac{1}{9}x^3 - \dfrac{11}{18}x^2 - \dfrac{11}{27}x}$ και έτσι

$$\mathbf{y_{ΔΕΓ} = y_{o\mu} + y_\mu = c_1 + c_2e^{3x} - \frac{1}{9}x^3 - \frac{11}{18}x^2 - \frac{11}{27}x}.$$

Για τη ζητούμενη μερική λύση, έχουμε αντικαθιστώντας, τις αρχικές συνθήκες στη $y_{ΔΕΓ}$ και

$$y'_{ΔΕΓ} : \begin{Bmatrix} 1 = c_1 + c_2 \\ 3 = 3c_1 - \dfrac{11}{27} \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} c_2 = \dfrac{92}{81} \\ c_1 = -\dfrac{11}{81} \end{Bmatrix} \Rightarrow \mathbf{y_\mu^* = \frac{-11}{81} + \frac{92}{81}e^{3x} - \frac{1}{9}x^3 - \frac{11}{18}x^2 - \frac{11}{27}x}$$

περίπτωση 2η: Αν Q(x) είναι της μορφής $Q_n(x)e^{ax}$.

όπου α γνωστός αριθμός και $\mathbf{Q_n(x)}$ πολυώνυμο **(n)** βαθμού ως προς x. Τότε η αρχική $\mathbf{y'' + a_1y' + a_2y = Q_n(x)e^{ax}}$, **(1)**, θα δέχεται μια μερική λύση της μορφής: $\boxed{\mathbf{y_\mu = x^\lambda P_n(x)e^{ax}}}$ **(1β)**, όπου $P_n(x)$, πολυώνυμο (n) βαθμού με άγνωστους συντελεστές και λ είναι ο βαθμός πολλαπλότητας της ενδεχόμενης χαρακτηριστικής ρίζας $\rho = \alpha$. Ο προσδιορισμός των άγνωστων συντελεστών του $P_n(x)$, γίνεται όπως και στην προηγούμενη 1η περίπτωση, δηλαδή μεσ' απ' τη ταυτοτική επαλήθευση της Δ.Ε. (1), απ' τη (1β).

π.χ.

Να λυθεί η Δ.Ε. $\boldsymbol{y'' - 4y' + 3y = 2xe^{3x}}$.

Λύση

Η χαρακτηριστική εξίσωση είναι: $\kappa^2 - 4\kappa + 3 = 0$, με ρίζες $\rho_1 = 1$, $\rho_2 = 3$.

Άρα $\mathbf{y_{o\mu} = c_1e^x + c_2e^{3x}}$.

Μια μερική λύση της Δ.Ε. είναι της μορφής:

$y_\mu = x^\lambda P_n(x)e^{3x}$, όπου $P_n(x) = A_1x + A_0$, αφού $Q_n(x) = 2x$, και λ ο βαθμός πολλαπλότητας της χαρακτηριστικής ρίζας $\rho = 3 = \alpha$, αφού $e^{\alpha x} = e^{3x}$ (αν το $\alpha = 3 =$ (ο συντελεστής του εκθέτη του e), δεν τύχαινε να είναι χαρακτηριστική ρίζα $\rho_2 = 3$, τότε θα είχαμε $\lambda = 0$).

Έτσι $y_\mu = x^1(A_1x + A_0)e^{3x} = (A_1x^2 + A_0x)e^{3x}$.

Οπότε αντικαθιστώντας την y_μ στη δοσμένη Δ.Ε., οφείλει να την ικανοποιεί ταυτοτικά, από όπου και προσδιορίζουμε τους άγνωστους συντελεστές A_1, A_0, δηλαδή:

$$(y_\mu)'' - 4(y_\mu)' + 3y_\mu = 2xe^{3x} \Leftrightarrow (3A_1x^2 + 12A_1x + 9A_0x + 2A_1 + 6A_0)e^{3x} -$$
$$-4(3A_1x^2 + 3A_0x + 2A_1x + A_0)e^{3x} + 3(A_1x^2 + A_0x)e^{3x} = 2xe^{3x}$$

οπότε μετά τις απλοποιήσεις και αναγωγές, παίρνουμε:

$$\begin{Bmatrix} 4A_1 = 2 \\ 2A_1 + 2A_0 = 0 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} A_1 = 1/2 \\ A_0 = -1/2 \end{Bmatrix}. \text{ Άρα: } y_\mu = \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x\right)e^{3x}.$$

Συνεπώς η γενική λύση της αρχικής Δ.Ε. είναι:

$$y = y_{o\mu} + y_\mu = c_1e^x + c_2e^{3x} + \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x\right)e^{3x}.$$

περίπτωση 3η: Αν $Q(x)$ είναι της μορφής $Q_n(x)e^{\alpha x}\eta\mu\beta x$,

ή της μόρφής $Q_n(x)e^{\alpha x}\sigma\upsilon\nu\beta x$, όπου $Q_n(x)$ πολυώνυμο (n) βαθμού ως προς x και α,β γνωστοί αριθμοί.

Τότε η Δ.Ε. (1) $y'' + \alpha_1y' + \alpha_2y = Q(x)$, θα δέχεται μια μερική λύση της μορφής:

$$\boxed{y_\mu = x^\lambda e^{\alpha x}[P_n(x)\cdot \eta\mu\beta x + T_n(x)\sigma\upsilon\nu\beta x]} \quad \textbf{(1γ)},$$

όπου $P_n(x)$ και $T_n(x)$, είναι πολυώνυμα (n) βαθμού ως προς x, με άγνωστους (προσδιοριστέους) συντελεστές και λ η πολλαπλότητα της ενδεχόμενης χαρακτηριστικής ρίζας $\rho = \alpha + \beta i$, (που βέβαια αν δεν υπάρχει χαρακτηριστική ρίζα $\rho = \alpha + \beta i$ τότε λ=0).

Ο προσδιορισμός των συντελεστών των $P_n(x)$ και $T_n(x)$, γίνεται όπως και στις 2 προηγούμενες περιπτώσεις, δηλαδή μέσα από τη ταυτοτική επαλήθευση της (1), από την (1γ).

π.χ.

Να λυθεί η Δ.Ε. $y'' - y = xe^x \sigma\upsilon\nu x$.

Λύση

Η χαρακτηριστική εξίσωση είναι: $\kappa^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow \rho_{1,2} = \pm 1$.

Άρα $\mathbf{y_{o\mu} = c_1e^x + c_2e^{-x}}$.

Η Q(x) είναι της μορφής $Q_n(x)e^{\alpha x}\sigma\upsilon\nu\beta x$ με $Q_n(x) = x$, και $\alpha = \beta = 1$, ενώ επειδή η $\alpha + \beta i = 1 + i$, δεν είναι ρίζα της χαρακτηριστικής εξίσωσης άρα λ=0.

Έτσι, μια μερική λύση, είναι κατά τον τύπο (1γ):

$$y_\mu = \overset{e^x}{x^0}\left[(A_1x + A_0)\sigma\upsilon\nu(1x) + (B_1x + B_0)\eta\mu(1x)\right] = \mathbf{e^x\left[(A_1x + A_0)\cdot \sigma\upsilon\nu x + (B_1x + B_0)\cdot \eta\mu x\right]}.$$

Οπότε, αντικαθιστώντας τη y_μ, ατην αρχική Δ.Ε., οφείλει να την ικανοποιεί ταυτοτικά, δηλαδή:

$y_\mu'' - y_\mu \equiv xe^x\sigma\upsilon\nu x \Leftrightarrow$ (μετά τις πράξεις και τις αναγωγές)

$\Leftrightarrow (2A_1 + 2B_0 + 2B_1 - A_0)\sigma\upsilon\nu x + (2B_1 - B_0 - 2A_1 - 2A_0)\eta\mu x + (2B_1 - A_1)x\sigma\upsilon\nu x -$

$+(-2A_1 - B_1)x\eta\mu x \equiv x\sigma\upsilon\nu x$, οπότε παίρνουμε το σύστημα:

$$\begin{Bmatrix} 2A_1 + 2B_0 + 2B_1 - A_0 = 0 \\ 2B_1 - B_0 - 2A_1 - 2A_0 = 0 \\ 2B_1 - A_1 = 1 \\ -2A_1 - B_1 = 0 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} A_0 = 14/25 \\ A_1 = -1/5 \\ B_0 = 2/25 \\ B_! = 2/5 \end{Bmatrix}$$

Άρα: $\mathbf{y_\mu = e^x\left[\left(-\frac{1}{5}x + \frac{14}{25}\right)\sigma\upsilon\nu x + \left(\frac{2}{5}x + \frac{2}{25}\right)\eta\mu x\right]}$.

Άρα, τελικά: $\mathbf{y = y_{o\mu} + y_\mu}$.

Σημείωση (γενίκευση):

Αν το β' μέλος Q(x) της (1), είναι γενικότερης μορφής από αυτές που αναπτύχθηκαν στις 3 προηγούμενες περιπτώσεις, ή είναι ακόμα και άθροισμα της γενικής μορφής του Q(x) που αναφέρθηκε στα "γενικά" της μεθόδου των προσδιοριστέων συντελεστών, τότε κάνουμε χρήση της εξής πρότασης:

Αν $y'' + \alpha_1y' + \alpha_2y = Q_1(x) + Q_2(x)$, (1) με y_{μ_1} μια μερικής λύση της $y'' + a_1 y' + a_2 y = Q_1(x)$,

και y_{μ_2} μια μερικής λύση της $y'' + a_1 y' + a_2 y = Q_2(x)$,

τότε το άθροισμα $y_{\mu_1} + y_{\mu_2} = y_\mu$, είναι μια μερική λύση της (1).

(Η πρόταση ισχύει και όταν η (1) έχει συντελεστές μη σταθερούς).

Άρα λοιπόν, αν Q(x) είναι άθροισμα των 3 μορφών που εξετάστηκαν, αρκεί να υπολογίσουμε χωριστά τη y_{μ_1} και τη y_{μ_2}, που αντιστοιχούν στις $Q_1(x)$ και $Q_2(x)$, οπότε η ζητούμενη μερική λύση που αντιστοιχεί στη Q(x) θα είναι:

$$\boxed{\mathbf{y}_\mu = \mathbf{y}_{\mu_1} + \mathbf{y}_{\mu_2}}$$

Τέλος, αν η μορφή της Q(x), δεν ανήκει σε καμμιά από τις προηγούμενες περιπτώσεις, τότε εφαρμόζουμε την αμέσως επόμενη γενική μέθοδο του Lagrange ή μέθοδο της μεταβολής των αυθαίρετων σταθερών.

Καθηγητής-Συγγραφέας
Ιωάννης Αθ. Θεοδώρου
(Δρ. Μαθηματικός-Στατιστικός)

παραδείγματα: (στις Δ.Ε.Γ. μη ομογενείς, με σταθερούς συντελεστές, με τη μέθοδο των προσδιοριστέων συντελεστών).

1) Να λυθεί η Δ.Ε. $y'' + 4y = \sigma\upsilon\nu 2x + \sigma\upsilon\nu 4x$.

Λύση

Η χαρακτηριστική εξίσωση της αντίστοιχης ομογενούς είναι: $\kappa^2 + 4 = 0$, με ρίζες $\rho_{1,2} = \pm 2i$.

Άρα: $y_{o\mu} \underset{\substack{\alpha=0\\ \beta=2}}{\overset{(2^{***}_{o\mu})}{=}} e^{\alpha x}(c_1 \sigma\upsilon\nu\beta x + c_2 \eta\mu\beta x) = \mathbf{c_1}\sigma\upsilon\nu\mathbf{2x} + \mathbf{c_2}\eta\mu\mathbf{2x}$.

Για να βρούμε μια μερική λύση της αρχικής Δ.Ε., παρατηρούμε πως το β' μέλος της, $Q(x)$, δεν ανήκει σε καμμιά από τις 3 περιπτώσεις που εξετάσαμε, είναι όμως άθροισμα των $Q_1(x) = \sigma\upsilon\nu 2x$ και $Q_2(x) = \sigma\upsilon\nu 4x$, που η κάθε μια τους, είναι της μορφής της $3^{\eta\varsigma}$ περίπτωσης. Άρα η μορφή της ζητούμενης μερικής λύσης y_μ, θα είναι το άθροισμα των μερικών λύσεων $y_{\mu 1}$, $y_{\mu 2}$, για $Q_1(x)$ και $Q_2(x)$, αντίστοιχα, (δες προηγούμενη σημείωση-γενίκευση), δηλαδή το άθροισμα των $y_{\mu 1}$ και $y_{\mu 2}$ που προκύπτουν από τις Δ.Ε.:

$$\begin{Bmatrix} y'' + 4y = \sigma\upsilon\nu 2x \\ y'' + 4y = \sigma\upsilon\nu 4x \end{Bmatrix} \begin{matrix} (\mathrm{I}) \\ (\mathrm{II}) \end{matrix}$$

Έτσι για μεν την (I), θα έχουμε κατά τον (1γ) της $3^{\eta\varsigma}$ περίπτωσης:

$y_{\mu 1} = x^\lambda e^{\alpha x}[P_n(x)\eta\mu\beta x + T_n(x)\sigma\upsilon\nu\beta x]$, με $\alpha = 0$, $\beta = 2$, $n = 0$ και $\lambda = 1$, αφού $\alpha + \beta i = 0 + 2i =$ (χαρακτηριστική ρίζα πολλαπλότητας $\lambda = 1$).

Άρα: $y_{\mu 1} = x(A_0\eta\mu 2x + B_0\sigma\upsilon\nu 2x)$, που αντικαθιστώντας την, στην (I) θα την επαληθεύει ταυτοτικά, δηλαδή:

$(y_{\mu_1})'' + 4y_{\mu_1} \equiv \sigma\upsilon\nu 2x$ ή

$4A_0\sigma\upsilon\nu 2x - 4B_0\eta\mu 2x \equiv \sigma\upsilon\nu 2x$,

$$\left[\begin{array}{l} \text{είναι: } y'_{\mu_1} = A_0\eta\mu 2x + B_0\sigma\upsilon\nu 2x + x(2A_0\sigma\upsilon\nu 2x - 2B_0\eta\mu 2x) \\ \text{και} \begin{cases} y''_{\mu_1} = 2A_0\sigma\upsilon\nu 2x - 2B_0\eta\mu 2x + 2A_0\sigma\upsilon\nu 2x - 2B_0\eta\mu 2x - \\ -4x(A_0\eta\mu 2x + B_0\sigma\upsilon\nu 2x) \end{cases} \end{array}\right]$$

οπότε: $\begin{Bmatrix} 4A_0 = 1 \\ -4B_0 = 0 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} A_0 = \frac{1}{4} \\ B_0 = 0 \end{Bmatrix}$. Άρα $\mathbf{y_{\mu_1}} = \mathbf{\frac{1}{4}}\eta\mu\mathbf{2x}$.

Όμοια, για την (II), κατά τον (1γ), με $\alpha = 0$, $\beta = 4$, $n = 0$ και $\lambda = 0$, αφού $\alpha + \beta i = 0 + 4i$, δεν είναι χαρακτηριστική ρίζα.

Άρα: $y_{\mu_2} = A_1\eta\mu 4x + B_1\sigma\upsilon\nu 4x$, που αντικαθιστώντας την, στη (II) θα την επαληθεύει ταυτοτικά, από όπου παίρνουμε: $A_1 = 0$, $B_1 = -1/12$.

Άρα $\mathbf{y_{\mu_2}} = -\mathbf{\frac{1}{12}}\sigma\upsilon\nu\mathbf{4x}$. Έτσι, $y_\mu = y_{\mu_1} + y_{\mu_2} = \frac{1}{4}\eta\mu 2x - \frac{1}{12}\sigma\upsilon\nu 4x$.

Τέλος, η γενική λύση της αρχικής: $\mathbf{y} = \mathbf{y_{o\mu}} + \left(\mathbf{y_{\mu_1}} + \mathbf{y_{\mu_2}}\right) =$

$$= \mathbf{c_1}\sigma\upsilon\nu\mathbf{2x} + \mathbf{c_2}\eta\mu\mathbf{2x} + \mathbf{\frac{1}{4}}\eta\mu\mathbf{2x} - \mathbf{\frac{1}{12}}\sigma\upsilon\nu\mathbf{4x}.$$

2) Να λυθεί η Δ.Ε. $y'' - 2y' + 3y = x + \eta\mu x$.

Λύση

Η χαρακτηριστική εξίσωση της αντίστοιχης ομογενούς είναι: $\kappa^2 - 2\kappa + 3 = 0$, με ρίζες $\rho_{1,2} = 1 \pm i\sqrt{2}$.

Άρα: $\mathbf{y_{o\mu}} \underset{\substack{\alpha=1 \\ \beta=\sqrt{2}}}{\overset{(2^{***}_{o\mu})}{=}} \mathbf{e^x}\left(\mathbf{c_1}\sigma\upsilon\nu\mathbf{\sqrt{2}x} + \mathbf{c_2}\eta\mu\mathbf{\sqrt{2}x}\right)$.

Επειδή $Q(x) = x + \eta\mu x$, δηλαδή είναι άθροισμα των $Q_1(x) = x$ και $Q_2(x) = \eta\mu x$, μπορούμε να βρούμε μια μερική λύση της αρχικής Δ.Ε., προσθέτοντας από μια μερική λύση των εξής Δ.Ε.:

$$\begin{cases} y'' - 2y' + 3y = x \\ y'' - 2y' + 3y = \eta\mu x \end{cases}$$

Έτσι, η $Q_1(x) = x$, που είναι πολυώνυμο βαθμού $n = 1$, και με $\lambda = 0$, θα δέχεται μια μερική λύση της μορφής $y_{\mu_1} = A_1x + A_0$, και κατά τα γνωστά, προσδιορίζοντας ότι $A_1 = 1/3$, $A_0 = 2/9$, παίρνουμε:

$$\mathbf{y_{\mu_1}} = \mathbf{\frac{1}{3}x} + \mathbf{\frac{2}{9}}.$$

Όμοια, η $Q_2(x) = \eta\mu x$, θα δέχεται μια μερική λύση της μορφής:

$\mathbf{y_{\mu_2}} = x^\lambda e^{\alpha x}\left[P_n(x)\eta\mu\beta x + T_n(x)\sigma\upsilon\nu\beta x\right] = \mathbf{B_0}\sigma\upsilon\nu\mathbf{x} + \mathbf{B_1}\eta\mu\mathbf{x}$, αφού $\alpha = 0$, $\beta = 1$, $n = 0$, $\lambda = 0$,

Οπότε, προσδιορίζοντας κατά τα γνωστά, ότι: $B_0 = B_1 = \frac{1}{4}$, παίρνουμε:

$$\mathbf{y_{\mu_2}} = \mathbf{\frac{1}{4}}\sigma\upsilon\nu\mathbf{x} + \mathbf{\frac{1}{4}}\eta\mu\mathbf{x}.$$

Άρα $y_\mu = y_{\mu_1} + y_{\mu_2} = \frac{1}{3}x + \frac{2}{9} + \frac{1}{4}\sigma\upsilon\nu x + \frac{1}{4}\eta\mu x$.

Τέλος, $y = y_{o\mu} + y_\mu = e^x\left(c_1\sigma\upsilon\nu\sqrt{2}x + c_2\eta\mu\sqrt{2}x\right) + \frac{1}{3}x + \frac{2}{9} + \frac{1}{4}\sigma\upsilon\nu x + \frac{1}{4}\eta\mu x$.

3) Να λυθεί η Δ.Ε. $y'' - 2y' - 3y = e^{4x}$.

Λύση

Χαρακτηριστική εξίσωση: $\kappa^2 - 2\kappa - 3 = 0$, με ρίζες $\rho_1 = 3$, $\rho_2 = -1$, άρα:

$y_{o\mu} = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-x}$. Έξ άλλου κατά τον (1β) της $2^{ης}$ περίπτωσης θα είναι:

$y_\mu = x^\lambda P_n(x)e^{\alpha x}$, με $\alpha = 4$, $n = 0$ και $\lambda = 0$, αφού $\alpha = 4$ δεν είναι χαρακτηριστική ρίζα, επομένως: $y_\mu = A_0 e^{4x}$ και αντικαθιστώντας την, στην αρχική θα την επαληθεύει ταυτοτικά, από όπου τελικά παίρνουμε $A_0 = 1/5$.

Άρα, η γενική λύση είναι: $y = y_{o\mu} + y_\mu = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-x} + \frac{1}{5}e^{4x}$.

β) ΜΕΘΟΔΟΣ ΜΕΤΑΒΟΛΗΣ ΤΩΝ ΑΥΘΑΙΡΕΤΩΝ ΣΤΑΘΕΡΩΝ (ή μέθοδος LAGRANGE).

Η μέθοδος αυτή είναι γενική, δηλαδή εφαρμόζεται για την εύρεση μερικής λύσης, οποιασδήποτε Δ.Ε. γραμμικής, μη-ομογενούς, ν-οστής τάξης, με συντελεστές σταθερούς αλλά και μεταβλητούς, με την προϋπόθεση πως γνωρίζουμε τη γενική λύση της αντίστοιχης γραμμικής ομογενούς.

Εμείς θα περιορίσουμε το ενδιαφέρον μας, στην εφαρμογή της μεθόδου για Δ.Ε.Γ. μη ομογενείς, με σταθερούς συντελεστές, ν-οστής τάξης κατ' αρχή, καταλήγοντας τελικά σε αυτές της $2^{ης}$ τάξης.

Έτσι, έστω $y^{(\nu)} + \alpha_1 y^{(\nu-1)} + \alpha_2 y^{(\nu-2)} + \cdots + \alpha_\nu y = Q(x)$, (1), γνωρίζοντας ότι η αντίστοιχη ομογενής έχει γενική λύση:

$y_{o\mu} = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \cdots + c_\nu y_\nu$, $(2_{o\mu})$.

Θεωρώντας πως οι αυθαίρετες σταθερές της $(2_{o\mu})$, $c_1, c_2, \ldots, c_\nu$, δεν είναι ανεξάρτητες του x, αλλά είναι συναρτήσεις του x, τότε η $(2_{o\mu})$ γίνεται:

$y_{o\mu} = c_1(x)y_1 + c_2(x)y_2 + \cdots + c_\nu(x)y_\nu$, (3).

Αν επιπλέον θεωρήσουμε πως η (3) είναι μια μερική λύση της (1), θα πρέπει προφανώς η (3) να επαληθεύει την (1). Αποδεικνύεται, πως για να συμβαίνει αυτό, θα πρέπει οι παράγωγοι ως προς x, των συναρτήσεων $c_1(x), c_2(x), \ldots, c_\nu(x)$, να ικανοποιούν το σύστημα:

$$\left.\begin{cases} c_1'y_1 + c_2'y_2 + \cdots + c_\nu'y_\nu = 0 \\ c_1'y_1' + c_2'y_2' + \cdots + c_\nu'y_\nu' = 0 \\ \vdots \\ c_1'y_1^{(\nu-2)} + c_2'y_2^{(\nu-2)} + \cdots + c_\nu'y_2^{(\nu-2)} = 0 \\ c_1'y_1^{(\nu-1)} + c_2'y_2^{(\nu-1)} + \cdots + c_\nu'y_2^{(\nu-1)} = Q(x) \end{cases}\right\} (4)$$

που έχει πάντα μια λύση ως προς $c_1', c_2', \ldots, c_\nu'$, και μοναδική, αφού η ορίζουσα Wronski των συναρτήσεων $y_1, y_2, \ldots, y_\nu$, που είναι διάφορη του 0, αφού οι $y_1, \ldots, y_\nu$, αποτελούν ένα θεμελιώδες σύστημα λύσεων.

Λύνοντας το (4) ως προς $c_1'(x), \ldots, c_\nu'(x)$, παίρνουμε:

$$\left.\begin{cases} c_1'(x) = \sigma_1(x) \\ c_2'(x) = \sigma_2(x) \\ \cdots\cdots\cdots \\ c_\nu'(x) = \sigma_\nu(x) \end{cases}\right\} \Rightarrow \left.\begin{cases} c_1'(x) = \int \sigma_1(x)dx \\ c_2'(x) = \int \sigma_2(x)dx \\ \cdots\cdots\cdots \\ c_\nu'(x) = \int \sigma_\nu(x)dx \end{cases}\right\} (5)$$

από όπου και προσδιορίζουμε τη ζητούμενη μερική λύση (3).

Παρότι η μέθοδος αυτή είναι γενικότερη της προηγούμενης, αφού εφαρμόζεται για οποιαδήποτε μορφή της Q(x), παρουσιάζει όμως μερικές φορές δυσκολίες στην αναλυτική ολοκλήρωση των (5), και έτσι είναι προτιμότερο να καταφεύγουμε σε αυτή, μόνο όταν δεν μπορεί να εφαρμοστεί η μέθοδος των προσδιοριστέων συντελεστών.

Ειδικά μάλιστα, για 2^{ης} τάξης Δ.Ε.Γ., μη ομογενή, με σταθερούς συντελεστές, η μέθοδος μεταβολής των αυθαίρετων σταθερών, δίνει:

Έστω $\boxed{y'' + \alpha_1 y' + \alpha_2 y = Q(x)}$, (1), με γενική λύση της αντίστοιχης ομογενούς:

$\boxed{y_{ο\mu} = c_1 y_1 + c_2 y_2}$, $(2_{ο\mu})$,

δηλαδή οι λύσεις y_1, y_2, είναι ένα θεμελιώδες σύστημα λύσεων της $(1_{ο\mu})$.

Οπότε θεωρώντας τη $(2_{ο\mu})$, με $c_1 = c_1(x)$ και $c_2 = c_2(x)$, σαν μια μερική λύση της (1), οδηγούμαστε στο σύστημα:

$$\left.\begin{cases} c_1'(x)y_1 + c_2'(x)y_2 = 0 \\ c_1'(x)y_1' + c_2'(x)y_2' = Q(x) \end{cases}\right\} (4),$$

που έχει ορίζουσα συντελεστών την $W(y_1, y_2) \neq 0$, (W=(ορίζουσα Wronski των y_1, y_2) $= \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}$

Λύνοντας το σύστημα (4), ως προς $c_1'(x)$, $c_2'(x)$, παίρνουμε:

$$c_1'(x) = \frac{-y_2 \cdot Q(x)}{W(y_1, y_2)} \text{ και } c_2'(x) = \frac{y_1 \cdot Q(x)}{W(y_1, y_2)},$$

και ολοκληρώνοντας:

$$\mathbf{c_1(x) = -\int \frac{y_2 \cdot Q(x)dx}{W(y_1, y_2)} + c_1^*, \quad c_2(x) = \int \frac{y_1 \cdot Q(x)dx}{W(y_1, y_2)} + c_2^*}, \ (6),$$

(όπου αγνοούμε τις αυθαίρετες σταθερές c_1^*, c_2^*, των ολοκληρώσεων, μιας και ψάχνουμε μόνο για μερική λύση).

Τέλος, από τις (6), μπορούμε αμέσως να βρούμε τη ζητούμενη μερική λύση y_μ της (1), μέσα από τον τύπο:

$$\boxed{y_\mu = -y_1\int \frac{y_2 \cdot Q(x)dx}{W(y_1, y_2)} + y_2\int \frac{y_1 \cdot Q(x)dx}{W(y_1, y_2)}} \quad (7), \text{ με } W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} \neq 0 .$$

Παραδείγματα: (στις Δ.Ε.Γ. μη ομογενείς, με μέθοδο LAGRANGE).

1) Να λυθεί η Δ.Ε. $y'' - 6y' + 9y = \frac{1}{x^2} e^{3x}$.

Λύση

Η χαρακτηριστική εξίσωση είναι: $\kappa^2 - 6\kappa + 9 = 0$, με ρίζες $\rho_1 = \rho_2 = 3$.

Άρα: $y_{o\mu} = (c_1 + c_2 x)e^{3x} = c_1 e^{3x} + c_2 x e^{3x}$,

δηλαδή ένα θεμελιώδες σύστημα λύσεων της $(1_{o\mu})$, είναι:

$y_1 = e^{3x}$, $y_2 = xe^{3x}$,

Κατά τον τύπο (7) της μεθόδου Lagrange, μια μερική λύση είναι:

$$y_\mu = -e^{3x}\int \frac{xe^{3x}\cdot x^{-2}e^{3x}dx}{\begin{vmatrix} e^{3x} & xe^{3x} \\ 3e^{3x} & e^{3x}+3xe^{3x}\end{vmatrix}} + xe^{3x}\int \frac{e^{3x}\cdot x^{-2}e^{3x}dx}{\begin{vmatrix} e^{3x} & xe^{3x} \\ 3e^{3x} & e^{3x}+3xe^{3x}\end{vmatrix}} =$$

$$= -e^{3x}\int \frac{x^{-1}e^{3x}dx}{e^{3x}} + xe^{3x}\int \frac{x^{-2}e^{3x}dx}{e^{3x}} =$$

$$= -e^{3x}\cdot \ell nx + xe^{3x}\left(-\frac{1}{x}\right) = -e^{3x}\cdot \ell nx - e^{3x}$$

Άρα η γενική λύση της αρχικής είναι:

$\mathbf{y = y_{o\mu} + y_\mu = c_1 e^{3x} + c_2 x e^{3x} - e^{3x}\cdot \ell nx - e^{3x}}$.

2) Να λυθεί η Δ.Ε. $y'' + \frac{2}{x}y' + y = \frac{\sigma\varphi x}{x}e^{3x}$, *όταν* $y_{o\mu} = c_1\frac{\eta\mu x}{x} + c_2\frac{\sigma\upsilon\nu x}{x}$.

Λύση

Πρόκειται για Δ.Ε.Γ. μη ομογενή, με μεταβλητούς συντελεστές, και με θεμελιώδες σύστημα λύσεων της αντίστοιχης ομογενούς: $y_1 = \frac{\eta\mu x}{x}$, $y_2 = \frac{\sigma\upsilon\nu x}{x}$,

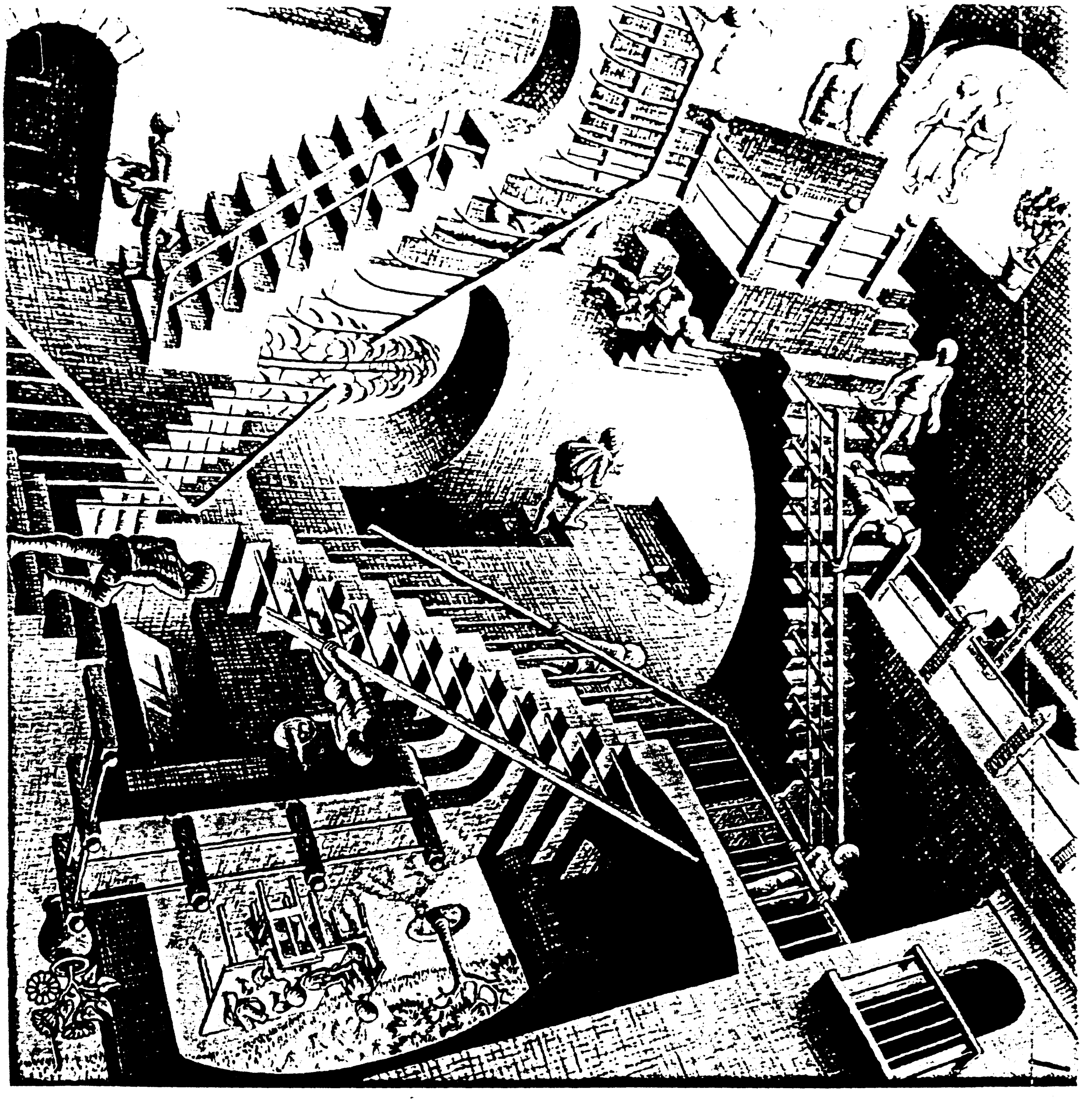
ενώ $W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = -\frac{1}{x^2}$.

Άρα κατά τον (7), που ισχύει και για Δ.Ε.Γ. με μεταβλητούς συντελεστές, μια μερική λύση είναι:

$$\mathbf{y}_\mu = -\frac{\eta\mu x}{x}\int \frac{\frac{\sigma\upsilon\nu x}{x}\cdot\frac{\sigma\varphi x}{x}}{-\frac{1}{x^2}}dx + \frac{\sigma\upsilon\nu x}{x}\int \frac{\frac{\eta\mu x}{x}\cdot\frac{\sigma\varphi x}{x}}{-\frac{1}{x^2}}dx =$$

$$= \frac{\eta\mu x}{x}\int \frac{\sigma\upsilon\nu^2 x dx}{\eta\mu x} - \frac{\sigma\upsilon\nu x}{x}\int \sigma\upsilon\nu x dx = \frac{\eta\mu x}{x}\left[\ell n\left(\varepsilon\varphi\frac{x}{2}\right) + \sigma\upsilon\nu x\right] - \frac{\sigma\upsilon\nu x}{x}\eta\mu x =$$

$$= \frac{\eta\mu \mathbf{x}\,\ell \mathbf{n}\left(\varepsilon\varphi\frac{\mathbf{x}}{\mathbf{2}}\right)}{\mathbf{x}}.$$ Τέλος $\mathbf{y} = \mathbf{y}_{o\mu} + \mathbf{y}_\mu$.

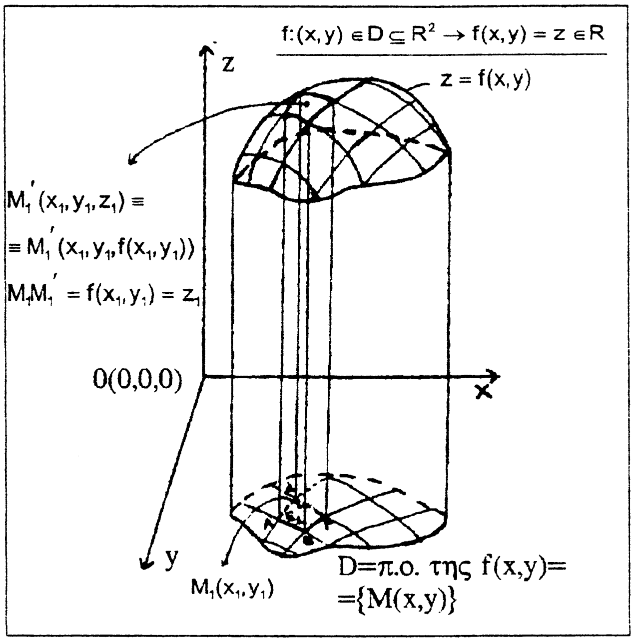


5. ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ ΠΟΛΛΩΝ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ

(Διπλά - Τριπλά - Πολλαπλά Ολοκληρώματα, Εφαρμογές)

ΠΟΛΛΑΠΛΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ

1. ΔΙΠΛΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ



Έστω μια διμεταβλητή πραγματική συνάρτηση, ορισμένη σε ένα κλειστό και φραγμένο επίπεδο τόπο D, δηλαδή:

$f:(x,y) \in D \subseteq R^2 \rightarrow f(x,y) = z \in R$.

Χωρίζουμε το D, με οποιονδήποτε τρόπο σε ν μικρά υποχωρία (π.χ. σε ορθογώνια παραλληλόγραμμα), με εμβαδό το καθένα E_1, E_2,..., E_ν και διαμέτρους αντίστοιχα δ_1, δ_2,..., δ_ν, (λέμε διάμετρο ενός χωρίου, την απόσταση των πιο απομακρυσμένων σημείων του χωρίου).

Εκλέγουμε σε κάθε υποχωρίο, από ένα οποιοδήποτε σημείο $M_i(x_i, y_i)$ και σχηματίζουμε τα γινόμενα, του εμβαδού $E_i=E_{ΑΒΓΔ}$ του κάθε υποχωρίου επί την τιμή της συνάρτησης στο αντίστοιχο σημείο, δηλαδή τα γινόμενα $E_i \cdot f(x_i, y_i)$, με i=1,...,ν.

Το άθροισμα όλων αυτών των γινομένων, λέγεται **ολοκληρωτικό άθροισμα** της συνάρτησης f(x,y) μέσα στον τόπο D, δηλαδή:

$$E_1 f(x_1,y_1) + E_2 f(x_2,y_2) + \cdots + E_\nu f(x_\nu,y_\nu) = \sum_{i=1}^{\nu} E_i f(x_i,y_i).$$

Ορισμός:

Ονομάζουμε **διπλό ολοκλήρωμα** της συνάρτησης f(x,y) στον επίπεδο τόπο D, το όριο του ολοκληρωτικού αθροίσματος (δηλαδή $\nu \rightarrow +\infty$), όταν η μέγιστη των διαμέτρων τείνει στο 0, δηλαδή συμβολικά:

$$\boxed{\iint_D f(x,y)dE \overset{op}{=} \lim_{\max\delta_i \to 0} \sum_{i=1}^{\nu} f(x_i,y_i) \cdot E_i},$$

όπου $dE = dxdy$, με dx, dy, οι πλευρές ενός στοιχειώδους ορθογωνίου, από τα άπειρα υποχωρία-ορθογώνια που έχουμε θεωρήσει, δηλαδή $dE = dxdy$ = το εμβαδόν οριακά ενός στοιχειώδους υποχωρίου. (Αναφερόμαστε εδώ, σε καρτεσιανές συντεταγμένες).

Αποδεικνύεται, πως αν η συνάρτηση f(x,y) είναι συνεχής στο κλειστό χωρίο D, τότε το παραπάνω όριο του ολοκληρωτικού αθροίσματος υπάρχει και είναι ανεξάρτητο και του τρόπου διαμέρισης του D σε υποχωρία και της εκλογής των σημείων M_i, (θεώρημα ύπαρξης διπλού ολοκληρώματος).

ΕΡΜΗΝΕΙΑ:

Χωρίζοντας το τόπο D σε υποχωρία, σχηματίζουμε τις βάσεις ισάριθμων κυλίνδρων. Ο όγκος του κυλίνδρου με βάση $E_1=E_{ΑΒΓΔ}$, (δες σχήμα), είναι προσεγγιστικά ίσος με τον όγκο του κυλίνδρου ίδιας βάσης E_1 και ύψους $M_1M_1' = f(x_1, y_1) = z_1$. Άρα, ο πρώτος όρος $E_1 \cdot f(x_1, y_1)$ του ολοκληρωτικού αθροίσματος, εκφράζει προσεγγιστικά τον όγκο του μερικού κυλίνδρου βάσης E_1, ενώ το ολοκληρωτικό άθροισμα εκφράζει προσεγγιστικά τον όγκο V ολόκληρου του "κυλινδροειδούς" σώματος. Όσο μάλιστα αυξάνει ο αριθμός των υποχωρίων, τόσο αυξάνει και ο βαθμός προσέγγισης του V. Έτσι λοιπόν, το όριο του ολοκληρωτικού αθροίσματος δηλαδή το διπλό ολοκλήρωμα $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$, δίνει τον ακριβή όγκο του "κυλινδροειδούς".

1.1 ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΩΝ ΔΙΠΛΩΝ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΩΝ

1) $\iint\limits_D cf(x,y)dxdy = c\iint\limits_D f(x,y)dxdy$, c=σταθερά.

2) $\iint\limits_{D=D_1+D_2} f(x,y)dxdy = \iint\limits_{D_1} f(x,y)dxdy + \iint\limits_{D_2} f(x,y)dxdy$, [Γενίκευση για $D=D_1+\ldots+D_\nu$].

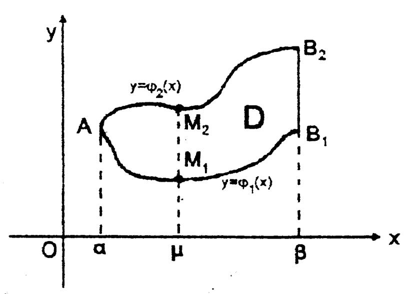
3) $\iint\limits_D \underbrace{f(x,y)}_{1}dxdy = \iint\limits_{D_1} dxdy =$ Εμβαδόν τόπου D,

Δηλαδή το εμβαδόν επίπεδου τόπου D, που ορίζεται από 2 καμπύλες, δίνεται από το $\iint\limits_{D_1} dxdy = E_D$

4) $\iint\limits_D [f_1(x,y) \pm \cdots \pm f_\nu(x,y)]dxdy = \iint\limits_D f_1(x,y)dxdy \pm \cdots \pm \iint\limits_D f_\nu(x,y)dxdy$.

1.2. ΚΑΝΟΝΕΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΥ ΔΙΠΛΩΝ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΩΝ

α)



Αν ο περίγυρος του τόπου D, τέμνεται από οποιαδήποτε ευθεία κάθετη στο x'x το πολύ σε 2 σημεία, τότε ο τόπος D εκφράζεται από τις ανισότητες:

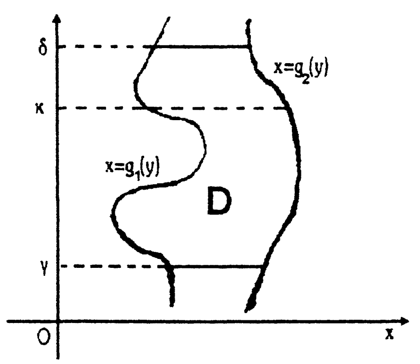
$$\boxed{\alpha \le x \le \beta,\ \varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x)}; \quad (1)$$

(όπου α και β οι ακραίες τετμημένες του D, ενώ $\varphi_1(x)$ και $\varphi_2(x)$ είναι οι συναρτήσεις των καμπύλων AM_1B_1 και AM_2B_2).

Τότε, σε αυτή την περίπτωση, το διπλό ολοκλήρωμα υπολογίζεται από τον τύπο:

$$\boxed{\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int_\alpha^\beta dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy}, \quad (1\alpha)$$

β)



Αν ο περίγυρος του τόπου D, τέμνεται από οποιαδήποτε ευθεία κάθετη στον y'y το πολύ σε 2 σημεία, τότε ο τόπος D εκφράζεται από τις ανισότητες:

$$\boxed{g_1(y) \le x \le g_2(y),\ \gamma \le y \le \delta}, \quad (2)$$

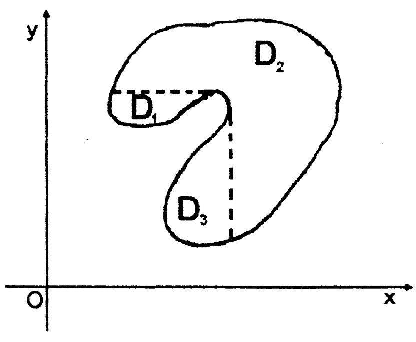
κατ' αναλογία προς την (1).

Τότε , το διπλό ολοκλήρωμα είναι:

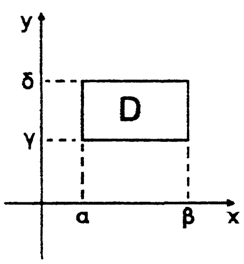
$$\boxed{\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int_\gamma^\delta dy \int_{g_1(y)}^{g_2(y)} f(x,y)dx}, \quad (2\alpha).$$

γ) Αν το πεδίο ολοκλήρωσης D είναι πιο σύνθετο από τις προηγούμενες περιπτώσεις (α) και (β), τότε μπορούμε να το χωρίσουμε κατάλληλα σε τέτοια μέρη, ώστε να πέφτουμε στις περιπτώσεις (α), (β).

π.χ.



Εξ άλλου, αν το D είναι πιο απλό, π.χ. το ορθογώνιο του σχήματος δηλαδή:



$$D = \{(x,y) \in R^2 : \alpha \le x \le \beta,\ \gamma \le y \le \delta\}$$

τότε:

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int_\alpha^\beta dx \int_\gamma^\delta f(x,y)dy\,.$$

Παρατηρήσεις:

i) Κατ' αρχή εκλέγουμε και στα διπλά ολοκληρώματα, ένα άξονα ως προς τον οποίο ολοκληρώνουμε. Η διπλή ολοκλήρωση γίνεται, ολοκληρώνοντας διαδοχικά ως προς προς κάθε μεταβλητή. Έτσι, αν ολοκληρώνουμε πρώτα ως προς x, τότε τα μεν όρια του x είναι συναρτήσεις του y (δηλαδή οι εξισώσεις των καμπύλων ως προς y, $g_1(y)$, $g_2(y)$, που συναντά διαδοχικά μια παράλληλη ευθεία ως προς τον x'x), θεωρώντας κατά την ολοκλήρωση το y σταθερά, ενώ τα όρια του y, κατά τη δεύτερη ολοκλήρωση ως προς y, είναι σταθερές (οι τεταγμένες των κοινών σημείων των καμπύλων που σχηματίζουν τον D).

Ανάλογα, όταν ολοκληρώνουμε πρώτα ως προς y.

Συγκεκριμμένα, έχουμε:

ολοκλήρωση ως προς τον άξονα y'y, (ολοκλήρωση πρώτα ως προς x):

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_\gamma^\delta \left(\int_{g_1(y)}^{g_2(y)} f(x,y)dx \right) dy$$

(όρια του y σταθερά)=(οι τεταγμένες των κοινών σημείων των καμπύλων που περικλείουν τον D).

(όρια του x, συναρτήσεις του y)=(κάτω όριο $x=g_1(y)$ άνω όριο $x=g_2(y)$, είναι οι εξισώσεις των καμπύλων που συναντά κατά σειρά μια τυχαία παράλληλη ευθεία ως προς τον άξονα x'x).

ολοκλήρωση ως προς τον άξονα x'x, (ολοκλήρωση πρώτα ως προς y):

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_\alpha^\beta \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy \right) dx$$

(όρια του x σταθερά)=(οι τετμημένες των κοινών σημείων των καμπύλων που περικλείουν τον D).

(όρια του y, συναρτήσεις του x)=(κάτω όριο $y=\varphi_1(x)$ άνω όριο $y=\varphi_2(x)$, είναι οι εξισώσεις των καμπύλων που συναντά κατά σειρά μια τυχαία παράλληλη ευθεία ως προς τον άξονα y'y).

ii) Ένα διπλό ολοκλήρωμα είναι μηδέν, δηλαδή $\iint_D f(x,y)dxdy = 0$, όταν:

α) f περιττή συνάρτηση ως προς x και χωρίο D συμμετρικό ως προς τον y'y,

β) f περιττή συνάρτηση ως προς y και χωρίο D συμμετρικό ως προς τον x'x,

γ) f περιττή συνάρτηση ως προς το ζεύγος (x,y) και το χωρίο D συμμετρικό ως προς την αρχή των αξόνων O(0,0).

iii) Συχνά, ένα διπλό ολοκλήρωμα $\iint_D f(x,y)dxdy$ υπολογίζεται ευκολότερα με μια αλλαγή των μεταβλητών, δηλαδή θέτοντας: $x = x(u,v)$, $y = y(u,v)$. Τότε, ο τύπος μετασχηματισμού ενός διπλού ολοκληρώματος είναι:

$$\boxed{\iint_D \mathbf{f(x,y)dxdy} = \iint_{D^*} \mathbf{f[x(u,v),\ y(u,v)]} \cdot \left\| \begin{matrix} \frac{\vartheta x}{\vartheta u} & \frac{\vartheta x}{\vartheta v} \\ \frac{\vartheta y}{\vartheta u} & \frac{\vartheta y}{\vartheta v} \end{matrix} \right\| \cdot \mathbf{dudv}}, \quad (3),$$

όπου οι συναρτήσεις x(u,v), y(u,v), δέχονται συνεχείς μερικές παραγώγους στον νέο τόπο D^* του R^2, ενώ η λεγόμενη ιακωβιανή ορίζουσα του μετασχηματισμού ζ, είναι $\neq 0$, δηλαδή

$$\zeta = \begin{Vmatrix} \dfrac{\vartheta x}{\vartheta \rho} & \dfrac{\vartheta x}{\vartheta \theta} \\ \dfrac{\vartheta y}{\vartheta \rho} & \dfrac{\vartheta y}{\vartheta \theta} \end{Vmatrix} \neq 0, \text{ μέσα στον } D^*,$$

[οι διπλές γραμμές στην ορίζουσα της (3) σημαίνουν την απόλυτη τιμή της ιακωβιανής, δηλαδή $|\zeta|$.]

Μια συνηθισμένη, αλλαγή μεταβλητών στη πράξη, είναι από καρτεσιανές συντεταγμένες (x,y) σε πολικές (ρ,θ), θέτοντας $x = \rho\sigma\upsilon\nu\theta$ και $y = \rho\eta\mu\theta$, οπότε τότε έχουμε:

$$\zeta = \begin{vmatrix} \dfrac{\vartheta x}{\vartheta \rho} & \dfrac{\vartheta x}{\vartheta \theta} \\ \dfrac{\vartheta y}{\vartheta \rho} & \dfrac{\vartheta y}{\vartheta \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dfrac{\vartheta(\rho\sigma\upsilon\nu\theta)}{\vartheta \rho} & \dfrac{\vartheta(\rho\sigma\upsilon\nu\theta)}{\vartheta \theta} \\ \dfrac{\vartheta(\rho\eta\mu\theta)}{\vartheta \rho} & \dfrac{\vartheta(\rho\eta\mu\theta)}{\vartheta \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sigma\upsilon\nu\theta & -\rho\eta\mu\theta \\ \eta\mu\theta & \rho\sigma\upsilon\nu\theta \end{vmatrix} = \rho\sigma\upsilon\nu^2\theta - \rho\eta\mu^2\theta = \rho,$$

οπότε ο τύπος (3) γίνεται:

$$\boxed{\iint_D \mathbf{f(x,y)dxdy} = \iint_{D^*} \mathbf{f[\rho\sigma\upsilon\nu\theta,\ \rho\eta\mu\theta]\cdot\rho\cdot d\rho d\theta}}, \quad (3\alpha).$$

Η αλλαγή σε πολικές συντεταγμένες γίνεται συνήθως όταν ο τόπος D είναι κύκλος. Συγκεκριμμένα, ο κύκλος έχει γενικά τη μορφή: $x^2 + y^2 + Ax + By + \Gamma = 0$, με κέντρο $K\left(\frac{-A}{2}, \frac{-B}{2}\right)$ και ακτίνα $\rho = \frac{1}{2}\sqrt{A^2 + B^2 - 4\Gamma}$, τότε θέτοντας $x = -\frac{A}{2} + \rho\sigma\upsilon\nu\theta$, $y = -\frac{B}{2} + \rho\eta\mu\theta$, αναγόμαστε σε κύκλο κέντρου 0(0,0) και ακτίνας $\rho = \frac{1}{2}\sqrt{A^2 + B^2 - 4\Gamma}$. Οπότε, αν ο τόπος ολοκλήρωσης D είναι ολόκληρος ο κύκλος τότε, τα όρια του θ είναι: από θ=0, μέχρι θ=2π, αν D είναι ο μισός κύκλος, τότε: από θ=0, μέχρι θ=π, και αν D είναι το τέταρτο του κύκλου, τότε: από θ=0, μέχρι θ=π/2. Προφανώς σε όλες τις περιπτώσεις, $\rho = \frac{1}{2}\sqrt{A^2 + B^2 - 4\Gamma}$, $dxdy = \rho d\rho d\theta$.

Επίσης, αν ο τόπος ολοκλήρωσης D είναι έλλειψη της μορφής $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$, τότε θέτοντας x=αu, y=βv, παίρνουμε $dxdy = |\zeta| dudv = \alpha\beta dudv$, οπότε η έλλειψη μετασχηματίζεται σε κύκλο της μορφής $u^2 + v^2 = 1$. Ξαναθέτοντας $u = \rho\sigma\upsilon\nu\theta$, $v = \rho\eta\mu\theta$, παίρνουμε $dudv = |\zeta| d\rho d\theta = \rho d\rho d\theta$, από όπου τελικά: $dxdy = \alpha\beta\rho d\rho d\theta$, ενώ για τα όρια των ρ, θ, έχουμε: Τα όρια του ρ είναι πάντοτε: από ρ=0, μέχρι ρ=1. Τα όρια του θ είναι: αν ο τόπος ολοκλήρωσης D είναι όλη η έλλειψη (δηλαδή όλος ο κύκλος $u^2 + v^2 = 1$), θα είναι από θ=0, μέχρι θ=2π, αν D η μισή έλλειψη, τότε θ=0, μέχρι θ=π, και αν το τέταρτο της έλλειψης (δηλαδή το τέταρτο του προκύπτοντος κύκλου, $u^2 + v^2 = 1$) είναι από θ=0, μέχρι θ=π/2.

1.3. ΕΚΦΡΑΣΗ ΦΥΣΙΚΩΝ ΚΑΙ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΩΝ ΜΕΓΕΘΩΝ ΜΕΣΩ ΤΩΝ ΔΙΠΛΩΝ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΩΝ.

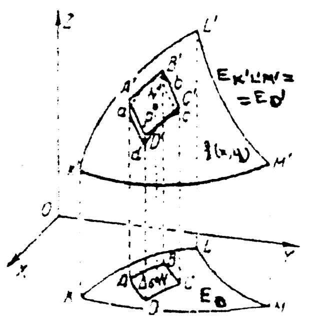
Με τα διπλά ολοκληρώματα, μπορούμε να εκφράζουμε και να υπολογίζουμε αρκετά φυσικά και γεωμετρικά μεγέθη.

Γνωρίσαμε ήδη, από τον ορισμό του διπλού ολοκληρώματος, πως το $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$, εκφράζει τον όγκο V στερεού σώματος (κυλινδροειδές), με κάτω βάση τον επίπεδο τόπο $D \subseteq R^2$ και πάνω βάση την επιφάνεια $f(x,y) = z$. Είδαμε επίσης (δες 1.1., (3)), πως αν $f(x,y) = 1$, τότε το $\iint\limits_D dxdy$ εκφράζει το εμβαδό E_D, του τόπου D.

Μπορούμε ακόμα να υπολογίσουμε μέσω των διπλών ολοκληρωμάτων, διάφορα χαρακτηριστικά ενός επιπέδου σώματος D (π.χ. μιας επίπεδης πλάκας εμβαδού E_D, με αμελητέα τρίτη διάσταση), όπως μάζα (m), πυκνότητα (δ), κέντρο βάρους (K), ροπές αδράνειας, κ.λ.π..

Έτσι, σχηματικά, έχουμε τον παρακάτω πίνακα:

Μέγεθος	Έκφραση σε ορθογώνιες συντεταγμένες	Έκφραση σε πολικές συντεταγμένες	Παρατηρήσεις
Κέντρο βάρους (K) σώματος D (ομογενής πλάκα)	$x_K = \dfrac{\iint\limits_D xdxdy}{\iint\limits_D dxdy} = \dfrac{\iint\limits_D xdxdy}{E_D}$ $y_K = \dfrac{\iint\limits_D ydxdy}{\iint\limits_D dxdy} = \dfrac{\iint\limits_D ydxdy}{E_D}$	$\dfrac{\iint\limits_D \rho^2 συν\theta d\rho d\theta}{E_D}$ $\dfrac{\iint\limits_D \rho^2 ημ\theta d\rho d\theta}{E_D}$	Οι συντεταγμένες του K στο επίπεδο xOy, είναι x_K, y_K.
Ροπές αδράνειας: ομογενούς επιπέδου σώματος D, (ομογενής πλάκα)	$I_x = \iint\limits_D y^2dxdy$ $I_y = \iint\limits_D x^2dxdy$ $I_o = \iint\limits_D (x^2+y^2)dxdy$	$\iint\limits_D \rho^3 ημ^2\theta d\rho d\theta$ $\iint\limits_D \rho^3 συν^2\theta d\rho d\theta$ $\iint\limits_D \rho^2 d\rho d\theta$	I_x=ροπή αδράνειας του D που στρέφεται περί τον άξονα Ox. I_y=ροπή αδράνειας του D που στρέφεται περί τον Oy. I_o=ροπή αδράνειας του D που στρέφεται περί τον O(ή τον Oz).

Ροπές αδράνειας: μη ομογενούς επιπέδου σώματος D, (μη ομογενής πλάκα)	$I_x = \iint_D y^2 \cdot \delta dxdy$ $I_y = \iint_D x^2 \cdot \delta dxdy$ $I_o = \iint_D (x^2 + y^2)\delta dxdy$	(ανάλογα)	$\delta = \delta(x, y) =$ επιφανειακή πυκνότητα του D, που μεταβάλλεται σαν συνάρτηση των x, y.
Μάζα (m) Επίπεδης πλάκας D	$m = \iint_D \delta(x, y)dxdy$	(ανάλογα)	$\delta = \delta(x, y) =$ επιφανειακή πυκνότητα του D
Όγκος (V), κυλίνδρου βάσης D	$V = \iint_D f(x, y)dxdy$	$\iint_D f(x, y)\rho d\rho d\theta$	
Εμβαδόν E_D, επίπεδης επιφάνειας D	$E_D = \iint_D dxdy$	$\iint_D \rho d\rho d\theta$	
Εμβαδόν ($E_{K'L'M'}$) της καμπύλης, επιφάνειας K'L'M', (δηλαδή της f(x,y)=z με $(x,y) \in D \subseteq R^2$).	$E_{K'L'M'} =$ $= \iint_D \sqrt{1 - \left(\frac{\vartheta z}{\vartheta x}\right)^2 - \left(\frac{\vartheta z}{\vartheta y}\right)^2} dxdy$	$\iint_D \sqrt{\rho^2 + \rho^2\left(\frac{\vartheta z}{\vartheta \rho}\right)^2 + \left(\frac{\vartheta z}{\vartheta \theta}\right)^2} d\rho d\theta$	

Παραδείγματα (στο διπλό ολοκλήρωμα):

1) $\int_1^2 \int_3^4 \frac{dxdy}{(x+y)^2}$.

Λύση

Το πεδίο ολοκλήρωσης ορίζεται από τις ανισότητες $3 \leq x \leq 4$, $1 \leq y \leq 2$ και παριστάνει ένα ορθογώνιο με πλευρές παράλληλες στους άξονες Ox, Oy.

Υπολογίζουμε πρώτα το ορισμένο ολοκλήρωμα $\int_3^4 \frac{dx}{(x+y)^2}$, θεωρώντας το y σταθερό:

$$\int_3^4 \frac{dx}{(x+y)^2} = \int_3^4 (x+y)^{-2} d(x+y) = \frac{-1}{x+y}\Bigg|_3^4 = \frac{1}{y+3} - \frac{1}{y+4},$$ οπότε:

$$\int_1^2\int_3^4 \frac{dxdy}{(x+y)^2} = \int_1^2\left(\int_3^4 \frac{dx}{(x+y)^2}\right)dy = \int_1^2\left(\frac{1}{y+3}-\frac{1}{y+4}\right)dy =$$

$$= \left(\ell n(y+3) - \ell n(y+4)\right)\Big|_1^2 = \left(\ell n\frac{y+3}{y+4}\right)\Big|_1^2 =$$

$$= \ell n\frac{5}{6} - \ell n\frac{4}{5} = \ell n\frac{25}{24} \approx 0{,}0408.$$

2) α) $\displaystyle\int_1^3\int_2^5\left(5x^2y-2y^3\right)dxdy$, ***β)*** $\displaystyle\int_{\pi/2}^{\pi}\int_0^4 t^2\eta\mu 2\varphi dtd\varphi$.

Λύση

α) $$\int_1^3 dy\int_2^5\left(5x^2y-2y^3\right)dx = \int_1^3 dy\left[5y\frac{x^3}{3}-2y^3x\right]_2^5 =$$

$$= \int_1^3 dy\left[\frac{625}{3}y - 10y^3 - \frac{40}{3}y + 4y^3\right]_2^5 = \int_1^3 dy\left(195y - 6y^3\right) =$$

$$= \left(195\frac{y^2}{2} - 6\frac{y^4}{4}\right)\Big|_1^3 = 660.$$

β) $$\int_{\pi/2}^{\pi}\int_0^4 t^2\eta\mu 2\varphi dtd\varphi = \int_{\pi/2}^{\pi} d\varphi\int_0^4 t^2\eta\mu 2\varphi dt =$$

$$= \int_{\pi/2}^{\pi} d\varphi\left(\eta\mu 2\varphi\int_0^4 t^2dt\right) = \int_{\pi/2}^{\pi} d\varphi\left(\eta\mu 2\varphi\left(\frac{t^3}{3}\Big|_0^4\right)\right) =$$

$$= \int_{\pi/2}^{\pi}\frac{64}{3}\eta\mu 2\varphi d\varphi = -\frac{32}{3}\sigma\upsilon\nu 2\varphi\Big|_{\pi/2}^{\pi} = -\frac{64}{3}.$$

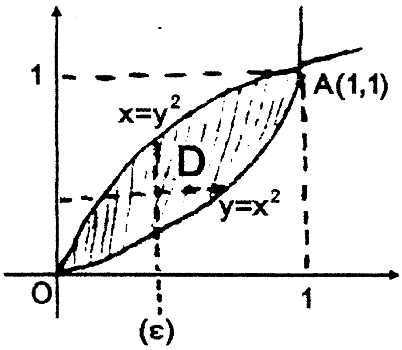
3) Να υπολογιστεί το $\displaystyle\iint_D\left(y^2+x\right)dxdy$, ***όταν ο τόπος D περιορίζεται από τις παραβολές:*** $y = x^2$, $y^2 = x$.

Λύση

α΄ λύση: Ολοκληρώνουμε πρώτα ως προς y, θεωρώντας το x σταθερό. Τότε τα όρια του x θα είναι σταθερά, δηλαδή θα είναι οι τετμημένες των κοινών σημείων των καμπύλων που σχηματίζουν τον D, που βρίσκονται λύνοντας το σύστημα των εξισώσεων των παραβολών, δηλαδή:

$\left\{\begin{matrix} y = x^2 \\ y^2 = x \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} (x = 0,\ y = 0) \\ (x = 1,\ y = 1) \end{matrix}\right\}$, άρα όρια του x, 0 και 1.

Εξάλλου, όρια του y, είναι συναρτήσεις του x, που βρίσκονται φέρνοντας τυχαία ευθεία (ε) παράλληλη στον άξονα των y, που συναντά πρώτα τη καμπύλη $y = x^2$ (κάτω όριο) και μετά τη καμπύλη $y = \sqrt{x}$ (άνω όριο).



Άρα, έχουμε:

$$\iint_D \left(y^2 + x\right)dxdy = \int_0^1 \left(\int_{x^2}^{\sqrt{x}} \left(y^2 + x\right)dy \right)dx =$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{y^3}{3} + xy \right)\Bigg|_{x^2}^{\sqrt{x}} dx = \int_0^1 \left(\frac{\sqrt{x}^3}{3} + x\sqrt{x} - \frac{\left(x^2\right)^3}{3} - x^3 \right)dx =$$

$$\int_0^1 \left(\frac{1}{3}x^{\frac{3}{2}} + x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3}x^6 - x^3 \right)dx = \int_0^1 \left(\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3}x^6 - x^3 \right)dx =$$

$$= \left(\frac{4}{3}\frac{x^{\frac{3}{2}+1}}{\frac{3}{2}+1} - \frac{1}{3}\frac{x^7}{7} - \frac{x^4}{4} \right)\Bigg|_0^1 = \cdots = \frac{33}{140}.$$

β΄ λύση: Ολοκληρώνουμε πρώτα ως προς x, θεωρώντας το y σταθερό. Έχουμε τότε:

$$\int_0^1 \left(\int_{y^2}^{\sqrt{y}} \left(y^2 + x\right)dx \right)dy = \int_0^1 \left(xy^2 + \frac{x^2}{2} \right)\Bigg|_{y^2}^{\sqrt{y}} dy =$$

$$= \int_0^1 \left(y^{\frac{5}{2}} + \frac{y}{2} - \frac{3}{2}y^4 \right)dy = \cdots = \frac{33}{140}.$$

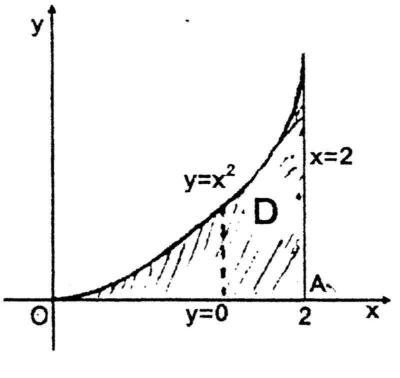
Παρατήρηση: Το εμβαδόν του τόπου D, με διπλή ολοκλήρωση, είναι:

$$\iint_D dxdy = \int_0^1 \left(\int_{x^2}^{\sqrt{x}} dy \right)dx = \int_0^1 \left(y\Big|_{x^2}^{\sqrt{x}} \right)dx =$$

$$= \int_0^1 \left(\sqrt{x} - x^2\right)dx = \left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - \frac{x^3}{3} \right)\Bigg|_0^1 = \frac{1}{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3} = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}.$$

4) Να υπολογιστεί το $\iint\limits_D (x-y)dxdy$, στο τόπο: $D=\{y=0,\ y=x^2,\ x=2\}$.

Λύση



Θα ολοκληρώσουμε ως προς τον άξονα $x'x$, δηλαδή θα ολοκληρώσουμε πρώτα ως προς $y'y$. Επειδή φέρνοντας μια ευθεία παράλληλη προς τον $y'y$, βρίσκει διαδοχικά $y=0$ και ύστερα τη καμπύλη $y=x^2$, άρα όρια ως προς y: κάτω όριο=0, άνω όριο=x^2.

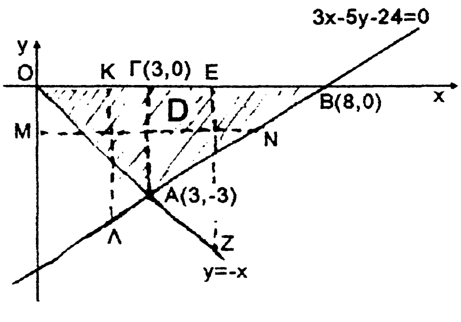
Εξάλλου όρια του x σταθερά, οι τετμημένες 0 και 2, οπότε έχουμε:

$$\iint\limits_D (x-y)dxdy=\int_0^2\left(\int_0^{x^2}(x-y)dy\right)dx=\int_0^2\left(xy-\frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_0^{x^2}dx=$$

$$=\int_0^2\left(x^3-\frac{x^4}{2}\right)dx=\left(\frac{x^4}{4}-\frac{x^5}{10}\right)\Bigg\|_0^2=\frac{2^4}{4}-\frac{2^5}{10}=4-\frac{32}{10}=\frac{40}{10}-\frac{32}{10}=\frac{4}{5}.$$

5) Να υπολογιστεί το $\iint\limits_D ydxdy$, όπου ο τόπος D είναι το τριγωνικό χωρίο με πλευρές: $y=0,\ y=-x,\ 3x-5y-24=0$.

Λύση



Εύκολα γίνεται φανερό, ότι συμφέρει εδώ να ολοκληρώσουμε ως προς τον άξονα $y'y$, δηλαδή πρώτα ως προς x και μετά ως προς y. (άρα όρια του x, συναρτήσεις του y και όρια του y σταθερά, η μικρότερη και η μεγαλύτερη τιμή των τεταγμένων των κοινών σημείων των καμπύλων). Γιατί αν ολοκληρώναμε ως προς τον $x'x$, θα έπρεπε να χωρίσουμε το τόπο (ΟΑΒ) στα υποχωρία (ΟΑΓ) και (ΓΑΒ), δηλαδή να κάνουμε 2 ολοκληρώσεις, (αυτό φαίνεται και από το ότι μια τυχαία παράλληλη (ΚΛ) προς τον $x'x$, συναντά άλλοτε την ΟΑ και ύστερα την ΑΒ, ανώ μια άλλη (ΕΖ) συναντά πρώτα την ΑΒ και ύστερα την ΟΑ).

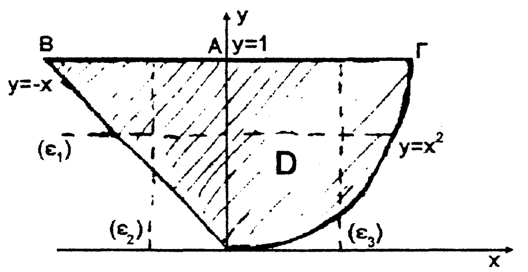
Έτσι έχουμε: $\iint\limits_D y dxdy = \int_{-3}^{0}\left(\int_{-y}^{\frac{5y+24}{3}} y dx\right)dy = \int_{-3}^{0}(yx)\Big|_{-y}^{\frac{5y+24}{3}} dy =$

$$= \int_{-3}^{0}\left(y\frac{5y+24}{3} - y(-y)\right)dy = \int_{-3}^{0}\left(\frac{5y^2}{3} + 8y + y^2\right)dy = \left(\frac{5}{3}\frac{y^3}{3} + 8\frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_{-3}^{0} =$$

$$= -\frac{5}{3}\frac{(-3)^3}{3} - 8\frac{(-3)^2}{3} - \frac{(-3)^3}{3} = \frac{5\cdot 3^3}{3^2} - 8\frac{3^2}{2} + \frac{3^3}{3} = 15 - 36 + 9 = -12.$$

6) Να υπολογιστεί το $\iint\limits_D x dxdy$, στο χωρίο: $D = \{y = -x,\ y = 1,\ y = x^2\}$

Λύση



Εδώ, δεν συμφέρει να ολοκληρώσουμε ως προς τον άξονα $x'x$, γιατί τυχαία παράλληλη στον $y'y$, τέμνει το περίγραμμα του D σε διαφορετικές κάθε φορά καμπύλες (δες (ε_2), (ε_3)). Άρα, θα ολοκληρώσουμε κατά την παράλληλη (ε_1), δηλαδή ως προς τον $y'y$, άρα πρώτα ως προς x, με όρια τις συναρτήσεις του y ($x = -y$, $x = \sqrt{y}$), και μετά ως προς y, με σταθερά όρια τη μικρότερη και τη μεγαλύτερη τεταγμένη των κοινών σημείων των καμπύλων δηλαδή 0 και 1, αντίστοιχα.
Έτσι έχουμε:

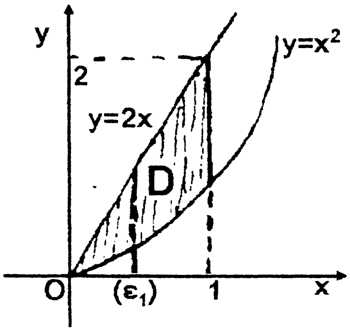
$$\iint\limits_D x dxdy = \int_0^1 dy\left(\int_{-y}^{\sqrt{y}} x dx\right) = \int_0^1 dy\left(\frac{x^2}{2}\Bigg|_{-y}^{\sqrt{y}}\right) = \int_0^1 dy\left(\frac{y}{2} - \frac{y^2}{2}\right) =$$

$$= \left(\frac{y^2}{4} - \frac{y^3}{6}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{1}{4} - \frac{1}{6} = \frac{1}{12}.$$

7) Να υπολογιστεί το $\iint\limits_D dxdy$, όταν $D = \{y = 2x,\ y = x^2,\ 0 \le x \le 1\}$.

Λύση

Εδώ, επειδή $f(x,y) = 1$, άρα κατά την [1.1.], (3), ζητείται να βρεθεί το εμβαδόν το εμβαδόν του τόπου D, με διπλή ολοκλήρωση.
Εδώ συμφέρει να ολοκληρώσουμε ως προς τον άξονα $x'x$, δηλαδή πρώτα ως προς y και μετά ως προς x, δηλαδή:



$$\iint_D dxdy = \int_0^1 dx\left(\int_{x^2}^{2x} dy\right) = \int_0^1 dx\left(y\Big|_{x^2}^{2x}\right) =$$
$$= \int_0^1 \left(2x - x^2\right)dx = \left(2\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^1 = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}.$$

8) Να υπολογιστεί το $\iint_D \left(\sigma\upsilon\nu^2 x + \eta\mu^2 y\right)dxdy$***, όταν*** $D = \left\{\begin{matrix} 0 \le x \le \frac{\pi}{4} \\ 0 \le y \le \frac{\pi}{4} \end{matrix}\right\}$.

Λύση

Προφανώς έχουμε:

$$\iint_D \left(\sigma\upsilon\nu^2 x + \eta\mu^2 y\right)dxdy = \int_0^{\pi/4} dx \int_0^{\pi/4} \left(\sigma\upsilon\nu^2 x + \eta\mu^2 y\right)dy = \int_0^{\pi/4} dx \int_0^{\pi/4} \left(\sigma\upsilon\nu^2 x + \frac{1 - \sigma\upsilon\nu 2y}{2}\right)dy =$$
$$= \int_0^{\pi/4} dx\left(y\sigma\upsilon\nu^2 x + \frac{1}{2}y - \frac{1}{4}\eta\mu 2y\right)\Bigg|_0^{\pi/4} = \int_0^{\pi/4}\left(\frac{\pi}{4}\sigma\upsilon\nu^2 x + \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}\right)dx =$$
$$= \left(\frac{\pi}{8}\left(x + \frac{1}{2}\eta\mu 2x\right) + \left(\frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}\right)x\right)\Bigg|_0^{\pi/4} = \frac{\pi}{8}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}\right)\frac{\pi}{4} = \frac{\pi^2}{16}.$$

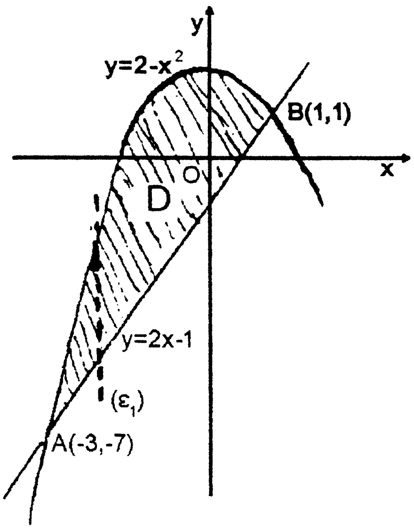
9) Να υπολογιστεί: $I = \int_1^2 dx \int_x^{x^2} (2x - y)dy$.

Λύση

$$I = \int_1^2 dx\left(2xy - \frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_x^{x^2} = \int_1^2 dx\left(2x^3 - \frac{x^4}{2} - 2x^2 + \frac{x^2}{2}\right) =$$
$$= \left(2\frac{x^4}{4} - \frac{1}{2}\frac{x^5}{5} - 2\frac{x^3}{3} + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_1^2 = \left(\frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{10}x^5 - \frac{1}{2}x^3\right)\Bigg|_1^2 = \cdots = 0{,}9.$$

10) $\iint_D (x - y)dxdy$***, όταν*** $D = \left\{y = 2 - x^2,\ y = 2x - 1\right\}$.

Λύση



Κατασκευάζουμε το τόπο D, που περικλείεται από τη παραβολή $y = 2 - x^2$ και την ευθεία $y = 2x - 1$, που τέμνονται στα σημεία A(-3,-7) και B(1,1).

Συμφέρει εδώ να ολοκληρώσουμε ως προς τον άξονα $x'x$, δηλαδή πρώτα ως προς y, με όρια τις συναρτήσεις του x, ($y = 2x - 1$, $y = 2 - x^2$) και μετά ως προς x, με σταθερά όρια τις τετμημένες των κοινών σημείων A και B, δηλαδή:

$$\iint_D (x-y)dxdy = \int_{-3}^{1} dx \int_{2x-1}^{2-x^2} (x-y)dy =$$

$$= \int_{-3}^{1} dx \left(xy - \frac{y^2}{2} \right) \Bigg|_{2x-1}^{2-x^2} = \int_{-3}^{1} \left(2x - x^3 - 2 + 2x^2 - \frac{1}{2}x^4 - 2x^2 + x + 2x^2 - 2x + \frac{1}{2} \right) dx =$$

$$= \int_{-3}^{1} \left(-\frac{1}{2}x^4 - x^3 + 2x^2 + x - \frac{3}{2} \right) dx = \left(-\frac{1}{10}x^5 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x \right) \Bigg|_{-3}^{1} = \frac{64}{15}.$$

11) $\iint_D (x+2y)dxdy$***, όταν*** $D = \{x = 2,\ x = 3,\ y = x,\ y = 2x\}$.

Λύση

Είναι: $\iint_D (x+2y)dxdy = \int_2^3 dx \int_x^{2x} (x+2y)dy =$

$$= \int_2^3 \left(xy + y^2 \right) \Big|_x^{2x} = \int_2^3 \left(2x^2 + 4x^2 - x^2 - x^2 \right) dx =$$

$$= 4\int_2^3 x^2 dx = \frac{4}{3}x^3 \Big|_2^3 = \frac{4}{3}3^3 - \frac{4}{3}2^3 = 36 - \frac{32}{3} = \frac{108-32}{3} = \frac{76}{3}.$$

12) Να υπολογιστεί σε πολικές συντεταγμένες το $\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\,dxdy$***, όταν D είναι το 1ο τεταρτημόριο του δίσκου*** $x^2 + y^2 \le a^2$.

Λύση

Θέτωντας $x = \rho\sigma\upsilon\nu\theta$, $y = \rho\eta\mu\theta$, έχουμε (δες [1.2.], παρατήρηση (iii)):

$$\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\,dxdy = \iint_D \sqrt{\rho^2\sigma\upsilon\nu^2\theta+\rho^2\eta\mu^2\theta}\cdot\rho d\rho d\theta =$$

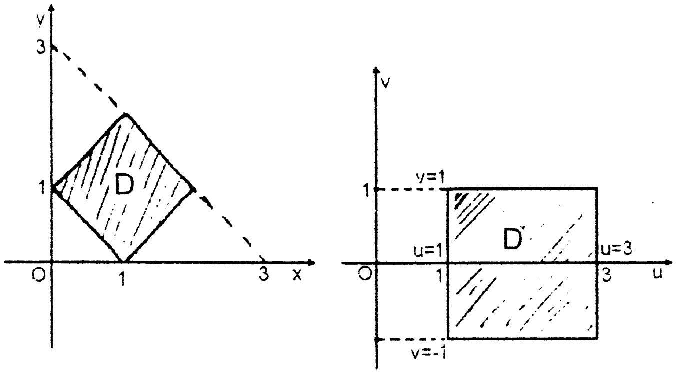
$$= \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^{\alpha}\rho^2 d\rho = \int_0^{\pi/2} d\theta\left(\frac{\rho^3}{3}\right)\Bigg|_0^{\alpha} = \int_0^{\pi/2}\frac{\alpha^3}{3}d\theta = \left(\frac{\alpha^3}{3}\theta\right)\Bigg|_0^{\pi/2} = \frac{\pi\alpha^3}{6}.$$

$$\left[\begin{matrix}\text{προφανώς:}\\ 0\le\rho\le\alpha \ \text{και}\\ 0\le\theta\le\frac{\pi}{2}\end{matrix}\right]$$

(Προφανώς εδώ, υπολογίσαμε το 1/8 του όγκου σφαίρας ακτίνας α. Έτσι, $V\sigma\varphi = 8\cdot\frac{\pi\alpha^3}{6}\frac{4}{3}\pi\alpha^3$).

13) Να υπολογιστεί το $\iint_D (x+y)^3(x-y)^2\,dxdy$, όταν ο τόπος D είναι το τετράγωνο που περικλείεται από τις ευθείες: $x+y=1$, $x-y=1$, $x+y=3$, $x-y=-1$.

Λύση



$$D = \frac{1}{2}D^*$$

Είναι ευκολότερο μάλλον εδώ, να υπολογίσουμε το διπλό ολοκλήρωμα, αλλάζοντας μεταβλητές.

Έτσι θέτοντας $x+y=u$ και $x-y=v$, παίρνουμε:

$x=\frac{1}{2}(u+v)$ και $y=\frac{1}{2}(u-v)$, οπότε (δες [1.2.] παρατήρηση (iii)):

$$\iint_D (x+y)^3(x-y)^2dxdy = \iint_{D^*} u^3v^2\cdot\left\|\begin{matrix}\frac{\vartheta x}{\vartheta u} & \frac{\vartheta x}{\vartheta v}\\ \frac{\vartheta y}{\vartheta u} & \frac{\vartheta y}{\vartheta v}\end{matrix}\right\| dudv = \iint_{D^*} u^3v^2\cdot\left\|\begin{matrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\end{matrix}\right\| dudv =,$$

$$= \iint_{D^*} u^3v^2\cdot\left|-\frac{1}{2}\right|dudv = \frac{1}{2}\iint_{D^*} u^3v^2dudv, \quad (\alpha), \ \text{όπου}\ \zeta| = \frac{1}{2}\ \text{και}$$

$D^* = \{u=1,\ u=3,\ v=1,\ v=3\}$. Άρα, $(\alpha)\Leftrightarrow \frac{1}{2}\int_1^3 u^3du\int_{-1}^1 v^3dv =$

$$= \frac{1}{2}\int_1^3 u^3\left(\frac{v^3}{3}\Big|_{-1}^{1}\right)du = \frac{1}{2}\int_1^3 u^3\,\frac{1}{3}(1+1)du = \frac{2}{6}\int_1^3 u^3 du =$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{u^4}{4}\Big|_1^3\right) = \frac{1}{12}\left(u^4\Big|_1^3\right) = \frac{1}{12}(81-1) = \frac{80}{12} = \frac{20}{3}.$$

14) Να υπολογιστεί το $\iint\limits_D \ell n\left(x^2+y^2\right)dxdy$, όταν το χωρίο D είναι στεφάνη που περικλείεται μεταξύ των περιφερειών: $x^2+y^2=e^2$, $x^2+y^2=e^4$.

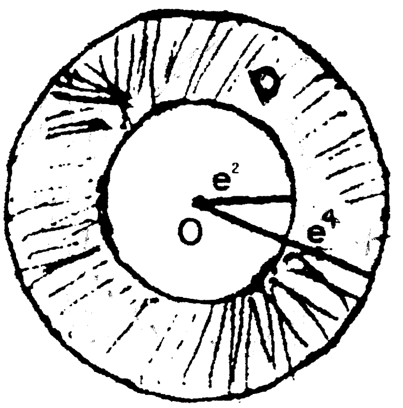
Λύση

Περνάμε σε πολικές συντεταγμένες, θέτοντας $x=\rho\sigma\upsilon\nu\theta$, $y=\rho\eta\mu\theta$, οπότε κατά την [1.2.], παρατήρηση (iii), ζ=ρ, άρα:

$$\iint\limits_D \ell n\left(x^2+y^2\right)dxdy = \iint\limits_D \ell n\left(\rho^2\sigma\upsilon\nu^2\theta+\rho^2\eta\mu^{2\theta}\right)|\zeta|d\rho d\theta =$$

$$= \iint\limits_D \left(\ell n\cdot\rho^2\right)\rho d\rho d\theta = 2\iint\limits_D \rho\cdot\ell n\rho\cdot d\rho d\theta = 2\int_0^{2\pi}d\theta\int_e^{e^2}\rho\cdot\ell n\rho\cdot d\rho =$$

$$\left[\begin{array}{l}\text{προφανώς:}\\ e\le\rho\le e^2 \text{ και}\\ 0\le\theta\le 2\pi\end{array}\right]$$



$$2\int_0^{2\pi}d\theta\left(\frac{1}{2}\rho^2\ell n\rho-\frac{1}{4}\rho^2\right)\Big|_e^{e^2} = 2\int_0^{2\pi}d\theta\left(\frac{1}{2}e^4\ell ne^2-\frac{1}{4}e^4-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{2}e^2\ell ne+\frac{1}{4}e^2\right) = 2\int_0^{2\pi}d\theta\left(\frac{3}{4}e^2-\frac{1}{4}e^2\right) =$$

$$= \left(\frac{3}{4}e^2\theta-\frac{1}{4}e^2\theta\right)\Big|_0^{2\pi} = \frac{3}{2}e^4 2\pi-\frac{1}{2}e^2 2\pi=$$

$$= 3e^4\pi-e^2\pi=\pi e^2\left(3e^2-1\right).$$

15) Να υπολογιστεί το εμβαδόν κύκλου ακτίνας ρ = α και κέντρου 0(0,0).

Λύση

Το εμβαδόν του $1^{ου}$ τεταρτημορίου είναι με $D=\left\{x^2+y^2\le\alpha^2\right\}$:

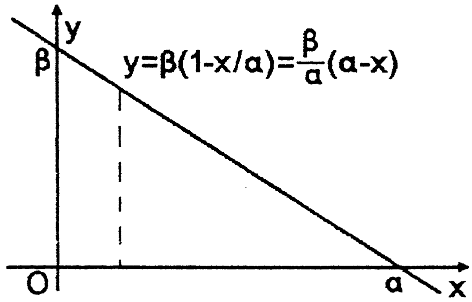
$$\frac{E}{4} = \iint\limits_D dxdy = \iint\limits_D \rho d\rho d\theta = \int_0^{\alpha}\rho d\rho\int_0^{\pi/2}d\theta = \int_0^{\pi/2}\left(\frac{\rho^2}{2}\Big|_0^{\alpha}\right)d\theta =$$

$$= \int_0^{\pi/2} \frac{\alpha^2}{2} d\theta = \left(\frac{\alpha^2}{2}\theta\right)\Bigg|_0^{\pi/2}. \quad \text{Άρα } E_\alpha = \pi\alpha^2.$$

16) Να υπολογιστεί η ροπή αδράνειας του (επίπεδου) σώματος D που περικλείεται από τις γραμμές: $\frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta} = 1$, $x = 0$, $y = 0$, ως προς O.

Λύση

Η ροπή αδράνειας του D, ως προς την αρχή των αξόνων O, είναι:



$$I = \iint_D (x^2 + y^2) dxdy = \int_0^\alpha dx \int_0^{\frac{\beta}{\alpha}(\alpha - x)} (x^2 + y^2) dy =$$

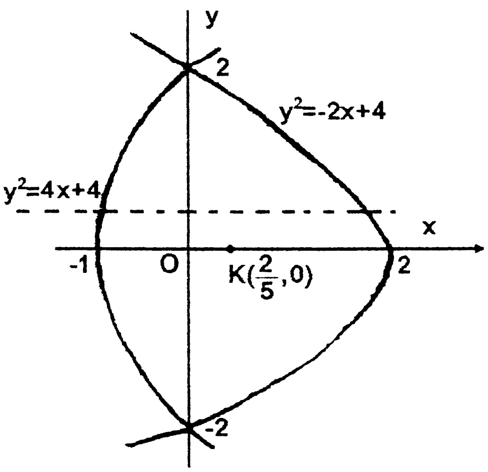
$$= \int_0^\alpha dx \left(x^2 y + \frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_0^{\frac{\beta}{\alpha}(\alpha - x)} =$$

$$= \int_0^\alpha \left(\frac{\beta}{\alpha} x^2 (\alpha - x) + \frac{1}{3}\frac{\beta^3}{\alpha^3}(\alpha - x)^3\right) dx =$$

$$= \left(\frac{1}{3}\beta x^3 - \frac{\beta}{4\alpha}x^4 - \frac{1}{3}\frac{\beta^3}{\alpha^3}\frac{1}{4}(\alpha - x)^4\right)\Bigg|_0^\alpha = \cdots = \frac{\alpha\beta(\alpha^2 + \beta^2)}{12}.$$

17) Να υπολογιστούν οι συντεταγμένες του κέντρου βάρους K του (επίπεδου) σώματος D που περικλείεται από τις καμπύλες $y^2 = 4x + 4$, $y^2 = -2x + 4$.

Λύση



Κατά τον πίνακα της §[1.3.], θεωρώντας το σώμα D σαν ομογενή επίπεδη πλάκα (δηλαδή η επιφανειακή πυκνότητα δ(x,y) του D, θεωρείται ίση με 1), οι συντεταγμένες του κέντρου βάρους K, x_K και y_K, είναι:

$$x_K = \frac{\iint_D x dxdy}{\iint_D dxdy = E_D}, \quad y_K = \frac{\iint_D y dxdy}{\iint_D dxdy = E_D}$$

Επειδή από το σχήμα του D διαπιστώνεται πως αυτό είναι συμμετρικό ως προς τον άξονα των x, άρα προφανώς το κέντρο βάρους K θα βρίσκεται πάνω στον $x'x$, δηλαδή θα έχει $y_\kappa = 0$.

Έτσι επομένει να βρούμε τη x_κ, οπότε έχουμε:

$$E_D = \iint_D dxdy = 2\iint_{D/2} dxdy = 2\int_0^2 dy \int_{\frac{y^2-4}{4}}^{\frac{4-y^2}{2}} dx = 2\int_0^2 \left(\frac{4-y^2}{2} - \frac{y^2-4}{4} \right) dy =$$

$$= 2\int_0^2 \left(3 - \frac{3y^2}{4} \right) dy = 6\left(y - \frac{y^3}{12} \right)\Bigg|_0^2 = 8.$$

$$\text{Άρα:} \quad x_\kappa = \frac{\iint_D xdxdy}{E_D} = \frac{1}{8} \cdot 2\int_0^2 dy \int_{\frac{y^2-4}{4}}^{\frac{4-y^3}{2}} xdx =$$

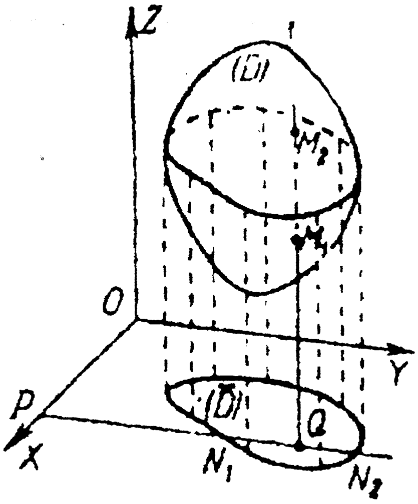
$$= \frac{1}{8}\int_0^2 \left(\frac{1}{4}\left(4-y^2\right)^2 - \frac{1}{16}\left(y^2-4\right)^2 \right) dy = \frac{1}{8}\int_0^2 \left(3 - \frac{3}{2}y^2 + \frac{3}{16}y^4 \right) dy =$$

$$= \frac{1}{8}\left(3y - \frac{y^3}{2} + \frac{3y^5}{80} \right)\Bigg|_0^2 = \frac{2}{5}. \quad \text{Έτσι} \quad K = \left(\frac{2}{5}, 0 \right).$$

2. ΤΡΙΠΛΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ

Έστω μια, τριών μεταβλητών, πραγματική συνάρτηση, ορισμένη σε ένα κλειστό και φραγμένο τόπο D του R^3, δηλαδή:

$$f:(x,y,z)\in D\subseteq R^3 \to f(x,y,z)=W\in R.$$



Χωρίζουμε αυθαίρετα τον τόπο D, σε ν μικρά υποχωρία, με όγκο το καθένα V_1, V_2, ..., V_ν και διαμέτρους αντίστοιχα δ_1, δ_2, ..., δ_ν.

Παίρνουμε σε κάθε υποχωρίο από ένα τυχαίο σημείο $M_i(x_i,y_i,z_i)$ και σχηματίζουμε τα γινόμενα του αντίστοιχου όγκου V_i, επί την τιμή της f στο σημείο M_i, δηλαδή τα γινόμενα $V_i\cdot f(x_i,y_i,z_i)$, $i=1,\dots,\nu$.

Το άθροισμα όλων αυτών των γινομένων, λέγεται **ολοκληρωτικό άθροισμα** της f(x,y,z) στον τόπο D του R^3, δηλαδή:

$$V_1\cdot f(x_1,y_1,z_1)+\dots+V_\nu\cdot f(x_\nu,y_\nu,z_\nu)=\sum_{i=1}^{\nu} V_i\cdot f(x_i,y_i,z_i).$$

ΟΡΙΣΜΟΣ:

Ονομάζουμε **τριπλό ολοκλήρωμα** της συνάρτησης f(x,y,z) στο $D\subseteq R^3$, το όριο του ολοκληρωτικού αθροίσματος (δηλαδή $\nu\to\infty$), όταν η μέγιστη των διαμέτρων τείνει στο 0, δηλαδή συμβολικά:

$$\boxed{\iiint_D f(x,y,z)dV \overset{\text{ορ}}{=} \lim_{\max V_i\to 0}\sum_{i=1}^{\nu} f(x_i,y_i,z_i)\cdot V_i}$$

ανάλογα με το διπλό ολοκλήρωμα, η έκφραση dxdydz, λέγεται στοιχείο όγκου σε ορθογώνιες συντεταγμένες.

Αποδεικνύεται, πως αν η συνάρτηση f(x,y,z) είναι συνεχής στο D, τότε το παραπάνω όριο υπάρχει και είναι ανεξάρτητο και του τρόπου διαμέρισης του D σε υποχωρία και της εκλογής των σημείων M_i, (θεώρημα ύπαρξης τριπλού ολοκληρώματος).

ΕΡΜΗΝΕΙΑ ΦΥΣΙΚΗ - ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΟΥ ΤΡΙΠΛΟΥ.

Έστω D ο χώρος που καταλαμβάνει ένα στερεό σώμα και $f(x_i,y_i,z_i)=\delta_i$, η πυκνότητα του σώματος στο σημείο $M_i(x_i,y_i,z_i)$. Τότε το ολοκληρωτικό άθροισμα στον τόπο D, δίνει κατά προσέγγιση τη μάζα m του σώματος, ενώ το τριπλό ολοκλήρωμα $\iiint\limits_D f(x,y,z)dxdydz$ δίνει ακριβώς την τιμή της μάζας m (σε καρτεσιανές συντεταγμένες).

Οι ιδιότητες που αναφέρθηκαν για το διπλό ολοκλήρωμα, ισχύουν ανάλογα και για το τριπλό ολοκλήρωμα.

Για τον υπολογισμό του τριπλού, χωρίζουμε (αν είναι αναγκαίο) τον δοσμένο όγκο σε τέτοια μέρη, έτσι ώστε η “οριζόντια” προβολή $\overline{D}$, του κάθε μέρους D, να είναι ένας επίπεδος τόπος (όπως για το διπλό ολοκλήρωμα, δες §[1.2.]), ενώ κάθε “κατακόρυφη” ευθεία τέμνει τα σύνορα του D το πολύ σε δύο σημεία, (δες παραπάνω σχήμα, σημεία M_1 και M_2). Έτσι, κάθε τέτοιο μέρος D, ανάγεται σε διπλό ολοκλήρωμα από τον τύπο:

$$\iiint\limits_D f(x,y,z)dxdydz = \iint\limits_D dxdy \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz\,, \quad (1)$$

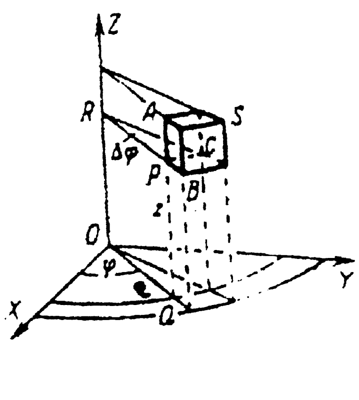
όπου οι συναρτήσεις $z_1(x,y)$, $z_2(x,y)$, είναι τα τμήματα QM_1 και QM_2 και όπου κατά την ολοκλήρωση του $\int\limits_{z_1}^{z_2} f(x,y,z)dz$ τα μεγέθη x, y, θεωρούνται σταθερά, ενώ το αποτέλεσμά του θεωρείται συνάρτηση των x και y, οπότε, μετά από αυτή την ολοκλήρωση ως προς z, το β΄ μέλος της (1) μετασχηματίζεται σε διπλό ολοκλήρωμα. Τελικά, δηλαδή το τριπλό ολοκλήρωμα, ανάγεται σε 3 απλά ολοκληρώματα:

$$\boxed{\iiint\limits_D \mathbf{f(x,y,z)dxdydz} = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \mathbf{dx} \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} \mathbf{dy} \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} \mathbf{f(x,y,z)dz}}, \quad (2)$$

[όπου οι συναρτήσεις $y_1(x)$, $y_2(x)$ είναι οι τεταγμένες PN_1, PN_2.]

Παρατηρήσεις:

α) Κυλινδρικές συντεταγμένες



Η θέση του σημείου P στο χώρο R^3, μπορεί να προσδιοριστεί από το ευθύγραμμο τμήμα z=QP και τις πολικές συντεταγμένες $\rho = OQ$, $\varphi = x\hat{O}Q$ της προβολής του Q στο επίπεδο xOy. Τα μεγέθη ρ, φ, z, ονομάζονται κυλινδρικές συντεταγμένες ή ημιπολικές του σημείου P. Οι καρτεσιανές συντεταγμένες και οι κυλινδρικές συντεταγμένες ενός σημείου P, συνδέονται (όταν η αρχή O ταυτίζεται με τον πόλο και ο άξονας Ox με τον πολικό άξονα), μέσω των σχέσεων:

$\boxed{\mathbf{x = \rho\,συνφ, \quad y = \rho\,ημφ}}$, (και στα δυο συστήματα οι κατηγμένες ταυτίζονται).

Μέγεθος	Έκφραση σε ορθογώνιες συντεταγμένες	Έκφραση σε κυληνδρικές συντεταγμένες	Έκφραση σε σφαιρικές συντεταγμένες	Παρατηρήσεις
Όγκος Στερεού (D)	$V_D = \iiint_D dxdydz$	$\iiint_D \rho d\rho d\varphi dz$	$\iiint_D \rho^2 \eta\mu\theta d\rho d\varphi d\theta$	
Μάζα (m) Στερεού (D) με πυκνότητα (δ)	$m_D = \iiint_D \delta dxdydz$	$\iiint_D \delta \rho d\rho d\varphi dz$	$\iiint_D \delta \rho^2 \eta\mu\theta d\rho d\varphi d\theta$	$\delta = \delta(x, y, z)$ είναι η μεταβλητή πυκνότητα του σώματος
Κέντρο βάρους (K), στερεού (D) με πυκνότητα $\delta = \delta(x, y, z)$	$x_\kappa = \frac{1}{m_D} \iiint_D \delta x dxdydz$ $y_\kappa = \frac{1}{m_D} \iiint_D \delta y dxdydz$ $z_\kappa = \frac{1}{m_D} \iiint_D \delta z dxdydz$	(ανάλογα)	(ανάλογα)	Αν δ=1 (οπότε $m = \delta V \Rightarrow m = V$ (αριθμητικά)) οι τύποι γίνονται απλούστεροι
Ροπές αδράνειας γεωμετρικού στερεού (D) ως προς τους άξονες $x'x$, $y'y$, $z'z$ αντίστοιχα	$I_x = \iiint_D (y^2 + z^2) dxdydz$ $I_y = \iiint_D (x^2 + z^2) dxdydz$ $I_z = \iiint_D (y^2 + x^2) dxdydz$	$\iiint_D \rho^3 d\rho d\varphi dz$	$\iiint_D \rho^4 \eta\mu^3\theta d\rho d\varphi d\theta$	

Παραδείγματα (στο τριπλό ολοκλήρωμα).

1) Έστω ότι ένας τόπος D του χώρου R^3, δίνεται από τις ανισότητες:

$\alpha \le x \le \beta$, $\gamma \le y \le \delta$, $\varepsilon \le z \le \zeta$, *δηλαδή είναι ένα παραλληλεπίπεδο με ακμές παράλληλες στους άξονες. Να βρεθεί η μάζα του παραλληλεπιπέδου, όταν* $\alpha = 0$, $\beta = 1$, $\gamma = 2$, $\delta = 4$, $\varepsilon = 0$, $\zeta = 3$, $f(x,y,z) = 1$.

Λύση

Προφανώς, πρέπει να υπολογίσουμε το:

$$\iiint_D f(x,y,z)dxdydz = \int_\alpha^\beta\int_\gamma^\delta\int_\varepsilon^\zeta f(x,y,z)dzdydx = \int_\alpha^\beta dx\int_\gamma^\delta dy\int_\varepsilon^\zeta f(x,y,z)dz.$$

Άρα: $$\int_0^1 dx\int_2^4 dy\int_0^3 dz = \int_0^1 dx\int_2^4 dy\left(z\Big|_0^3\right) = \int_0^1 dx\int_2^4 3dy = \int_0^1 dx\left(3y\Big|_2^4\right) =$$

$$= \int_0^1 (3\cdot 4 - 3\cdot 2)dx = 6x\Big|_0^1 = 6.$$

Ο ρόλος των x,y,z μπορεί να εναλλαγεί, δηλαδή η σειρά ολοκλήρωσης δεν έχει σημασία, προφανώς $V_{παρ/δου}=6$.

2) Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\int_0^1\int_2^4\int_0^3 (x+y+z)dxdydz$.

Λύση

$$\int_0^1 dz\int_2^4 dy\int_0^3 (x+y+z)dx = \int_0^1 dz\int_2^4 dy\left(\frac{x^2}{2}+(y+z)x\right)\Bigg|_0^3 =$$

$$= \int_0^1 dz\int_2^4 dy\left(\frac{9}{2}+3y+3z\right) = \cdots = 30.$$

3) Να υπολογιστεί το $I = \iiint_D zdxdydz$, *όταν ο τόπος D ορίζεται από τις ανισότητες:* $0 \le x \le \frac{1}{2}$, $x \le y \le 2x$, $0 \le z \le \sqrt{1-x^2-y^2}$.

Λύση

Έχουμε: $$\int_0^{1/2} dx\int_x^{2x} dy\int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} zdz = \frac{1}{2}\int_0^{1/2} dx\int_x^{2x}\left(z^2\Big|_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}}\right)dy =$$

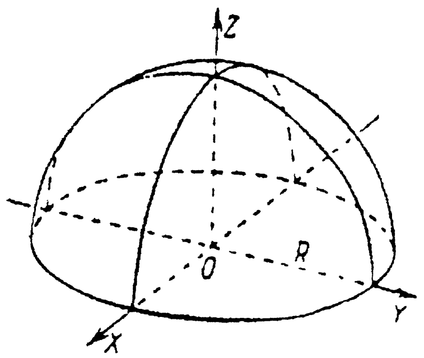
$$= \frac{1}{2}\int_0^{1/2} dx \int_x^{2x} \left(1 - x^2 - y^2\right) dy = \frac{1}{2}\int_0^{1/2} \left(y - yx^2 - \frac{y^3}{3} \right)\Bigg|_x^{2x} dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{1/2} \left(2x - 2x^3 - \frac{8}{3}x^3 - x + x^3 + \frac{1}{3}x^3 \right) dx = \frac{1}{2}\int_0^{1/2} \left(x - \frac{10}{3}x^3 \right) dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{6}x^4 \right)\Bigg|_0^{1/2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{8} - \frac{5}{6}\cdot\frac{1}{16} \right) = \frac{7}{192}.$$

4) Να υπολογιστεί το $I = \iiint\limits_D zdxdydz$, όταν ο τόπος D είναι ένα ημισφαίριο ακτίνας R.

Λύση



Το I εκφράζει τη στατική ροπή του ημισφαιρίου ως προς το επίπεδο xOy όπου δ (πυκνότητα) ημισφαιρίου ίση με 1.

Προφανώς η "οριζόντια" προβολή του ημισφαίριου στο επίπεδο xOy, είναι ο κύκλος $x^2 + y^2 \le R^2$, έτσι ώστε $\alpha = -R \le x \le R = \beta$.

$\gamma = y_1(x) = -\sqrt{R^2 - x^2} \le y \le \sqrt{R^2 - x^2} = y_2(x) = \delta$

Το κατώτερο και το ανώτερο όριο ως προς z, είναι η μικρότερη και μεγαλύτερη αντίστοιχα κατηγμένη, δηλαδή, από $z_1(x,y) = 0$, μέχρι $z_2(x,y) = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$.

Άρα, κατά τον τύπο (2) της §[2.], θα έχουμε:

$$\iiint\limits_D f(x,y,z)dxdydz = \int_\alpha^\beta dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz =$$

$$= \int_{-R}^{R} dx \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} dy \int_0^{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} zdz = \int_{-R}^{R} dx \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} \left(\frac{z^2}{2}\Bigg|_0^{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} \right) dy =$$

Υπενθυμίζεται πως η εξίσωση της σφαίρας με κέντρο Κ στην αρχή (καρτεσιανές συντεταγμένες) των αξόνων 0(0,0,0) και ακτίνα R είναι: $x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \Leftrightarrow z^2 = R^2 - x^2 - y^2$.

$$= \int_{-R}^{R} dx \int_{-\sqrt{R^2-x}}^{\sqrt{R^2-x}} dy \left(\frac{R^2 - x^2 - y^2}{2} \right) = \frac{1}{2}\int_{-R}^{R} dx \left[\left(R^2 - x^2\right)y - \frac{y^3}{3} \right]_{-\sqrt{R^2 - x}}^{\sqrt{R^2 - x}} =$$

$$=\frac{2}{3}\int_{-R}^{R}\left(R^2-x^2\right)^{3/2}dx=\frac{2}{3}\left[\frac{1}{4}x\left(R^2-x^2\right)^{3/2}+\frac{3}{8}R^2x\left(R^2-x^2\right)^{1/2}+\frac{3}{8}R^4\text{τοξημ}\frac{x}{R}\right]_{-R}^{R}=\frac{\pi R^4}{4}.$$

Παρατήρηση: Η μάζα m του ημισφαίριου (για δ(x,y,z)=1), ισούται αριθμητικά (όπως και στο παράδειγμα (1)) με τον όγκο του, $\frac{2}{3}\pi R^3$.

Εξάλλου, αν παίρναμε κυλινδρικές συντεταγμένες, θα είχαμε:

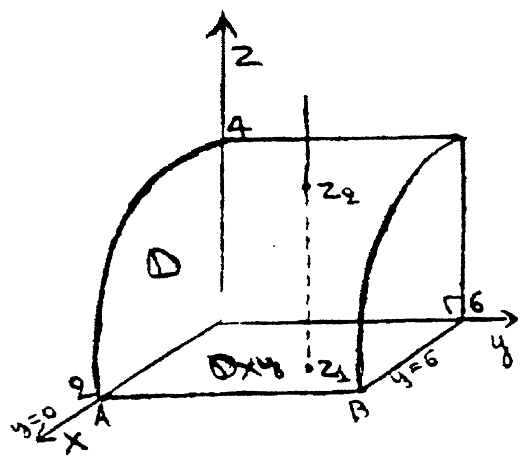
$$I=\iiint_D f(x,y,z)dxdydz=\iiint_D z\rho d\rho d\varphi dz=\int_0^R dz\int_0^{\sqrt{R^2-x^2}}d\rho\int_o^{2\pi}z\rho d\varphi=$$

$$=2\pi\int_0^R dz\int_0^{\sqrt{R^2-x^2}}z\rho d\rho=2\pi\int_0^R zdz\left(\frac{\rho^2}{2}\right)\Bigg|_0^{\sqrt{R^2-x^2}}=$$

$$=\pi\int_0^R\left(R^2-z^2\right)zdz=\frac{\pi R^4}{4}.$$

5) Να βρεθεί ο όγκος του τόπου D, που περικλείεται μεταξύ του παραβολικού κυλίνδρου $z=4-x^2$ και των επιπέδων: $x=0$, $y=0$, $y=6$, $z=0$.

Λύση



Προφανώς, μετά την κατασκευή του τόπυο D, η προβολή του D στο επίπεδο xOy είναι το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ (Dxy).

Άρα ο ζητούμενος όγκος, είναι:

$$\iiint_D dxdydz=\iint_{Dxy}dxdy\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)}dz=$$

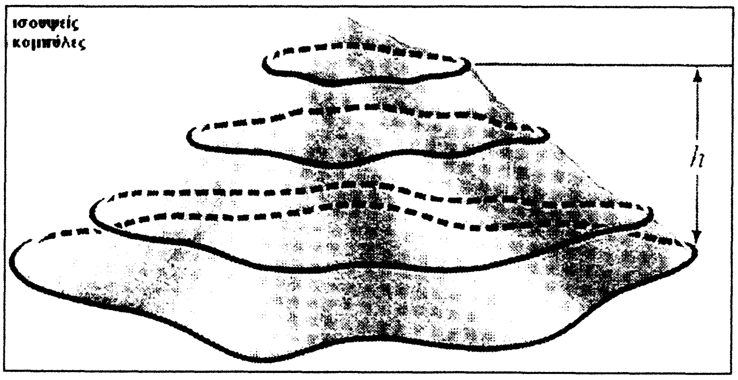
$$=\iint_{Dxy}dxdy\int_0^{4-x^2}dz=\iint_{Dxy}dxdy\left(z\Big|_0^{4-x^2}\right)=$$

$$=\int_0^2 dx\int_0^6 dy\left(4-x^2\right)=\int_0^2\left(\left(4-x^2\right)y\Big|_0^6\right)dx=\int_0^2 6\left(4-x^2\right)dx=$$

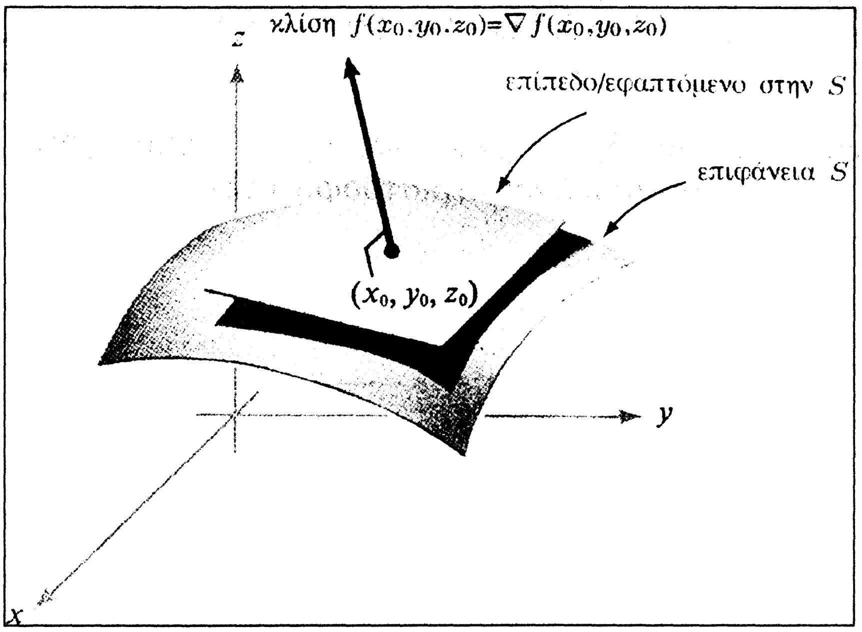
$$=\left(24x-6\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^2=48-16=32\quad\text{μονάδες όγκου.}$$

6. ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΗΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ

(Διανυσματική συνάρτηση, κατευθυνόμενη παράγωγος, κλίση-απόκλιση-περιστροφή, κτλ)



Συγγραφέας
Ιωάννης Αθ. Θεοδώρου
Τακτικός Καθηγητής - ΑΤΕΙ Λαμίας
(Δρ. Μαθηματικός-Στατιστικός)


κλίση $f(x_0,y_0,z_0)=\nabla f(x_0,y_0,z_0)$
επίπεδο/εφαπτόμενο στην S
επιφάνεια S
(x_0, y_0, z_0)
z
y
x

ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ

1. ΓΕΝΙΚΑ.

1.1. ΕΝΝΟΙΑ ΠΕΔΙΟΥ.

Η έννοια του πεδίου είναι η βάση για πολυάριθμες έννοιες της σύγχρονης φυσικής. Η αυστηρά θεμελιωμένη όμως αναλυτική μελέτη της θεωρίας του πεδίου ξεφεύγει των ορίων των παρόντων μαθημάτων και κατά συνέπεια θα περιοριστούμε στα απαραίτητα για τις απαιτήσεις μας στοιχεία, με σύντομες επεκτάσεις.

Έτσι κατά μια γενική άποψη, **ονομάζουμε πεδίο μια περιοχή A του χώρου** (συνήθως του $\Re^3$ ή του $\Re^2$ - γενικά του $\Re^\nu$, $\nu \in N^*$), **μέσα στην οποία κατανέμεται ένα** (φυσικό) **μέγεθος, έτσι ώστε σε κάθε σημείο $M \in A \subseteq \Re^\nu$ ν' αντιστοιχίζεται μια τιμή του μεγέθους.**

π.χ.

Στην περιοχή A της ατμόσφαιρας της γης $\left(A \subseteq \Re^3\right)$, κατανέμεται ως γνωστόν το μέγεθος θερμοκρασία, έτσι ώστε σε κάθε σημείο M της ατμόσφαιρας ν΄αντιστοιχίζεται η τιμή της θερμοκρασίας του.

1.2. ΕΙΔΗ ΠΕΔΙΩΝ.

Διακρίνουμε κατά βάση, δύο είδη πεδίων. Τα **Αριθμητικά** και τα **Διανυσματικά Πεδία.** Συγκεκριμένα :

Ένα πεδίο λέγεται **αριθμητικό** ή **βαθμωτό** ή **μονόμετρο** (champ scalaire), όταν διέπεται από αριθμητικό μέγεθος, ενώ λέγεται **διανυσματικό** πεδίο (champ vectoriel) όταν διέπεται από διανυσματικό μέγεθος.

Υπενθυμίζεται ότι, ένα μέγεθος λέγεται αριθμητικό ή βαθμωτό ή μονόμετρο, όταν για τον προσδιορισμό του αρκεί μόνον ένας αριθμός, δηλαδή το μέτρο του, όπως π.χ. τα μεγέθη : μήκος, μάζα, εμβαδόν, όγκος, χρόνος, ωμική αντίσταση, θερμοκρασία, κ.λ.π., ενώ αντίθετα ένα μέγεθος λέγεται διανυσματικό, όταν για τον προσδιορισμό του χρειάζονται περισσότεροι του ενός αριθμοί, όπως π.χ. τα μεγέθη : δύναμη, ταχύτητα, επιτάχυνση, ροπή αδράνειας, βάρος, κ.λ.π.

Έτσι **αριθμητικά** πεδία είναι : π.χ. : το πεδίο θερμοκρασίας ενός σώματος (όπου προφανώς, όσο πλησιέστερα στην πηγή της θερμότητας τόσο και υψηλότερη θερμοκρασία), το πεδίο του δυναμικού στο χώρο γύρω ~~από~~ ένα φορτίο, η κατανομή της πίεσης ενός υγρού, η κατανομή της πυκνότητας ενός (ανομοιογενούς) σώματος, κ.λ.π. ενώ **διανυσματικά** πεδία είναι π.χ. : το πεδίο βαρύτητας της γης, η ένταση του ηλεκτρικού ή μαγνητικού πεδίου, το πεδίο ταχυτήτων της ροής ενός υγρού, κ.λ.π.

1.3. ΠΕΔΙΟ ΚΑΙ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΠΕΔΙΟΥ.

Κάθε πεδίο εκφράζεται απ' τη συνάρτηση **f,** που σε κάθε σημείο **M** της περιοχής $A \subseteq \Re^\nu$, αντιστοιχίζει την τιμή **f(M)** του μεγέθους που κατανέμεται στο πεδίο.

Έτσι η **f,** που λέγεται και **συνάρτηση πεδίου,** χαρακτηρίζεται και σαν **αριθμητική** ή **διανυσματική συνάρτηση,** ανάλογα με το αν το πεδίο που εκφράζει είναι αριθμητικό ή διανυσματικό, αντίστοιχα.

Χάριν απλούστευσης στην πράξη, συνήθως ταυτίζουμε το πεδίο με τη συνάρτηση του πεδίου, μια απλούστευση που υπαγορεύεται κυρίως από τη φυσική, όπου τα διάφορα αριθμητικά και διανυσματικά πεδία περιγράφονται πλήρως (μετά τη μαθηματικοποίησή τους) μέσω των αντίστοιχων αριθμητικών (πραγματικών) ή διανυσματικών συναρτήσεων.

Έτσι στα επόμενα, ο όρος αριθμητικό (ή βαθμωτό) πεδίο, σημαίνει ισοδύναμα μια αριθμητική (πραγματική) συνάρτηση f, δηλαδή :

$$f : A \subseteq \Re^{\nu} \to \Re, \quad \left[\begin{array}{l} \textit{όπου ως γνωστό, A υποσύνολο του ευκλείδιου χώρου } \Re^{\nu}\textit{, διάστασης} \\ \nu\textit{, με } \Re^{\nu} = \Re \times \Re \times \ldots \times \Re = (\textit{καρτεσιανό γινόμενο, } \nu\textit{ - φορές}) \end{array}\right.$$

και πιο συγκεκριμένα, όπως συνήθως στην πράξη για $\nu = 3$ ή $\nu = 2$,

$f : A \subseteq \Re^3 \to \Re$, δηλαδή $f : M(x, y, z) \in \Re^3 = \Re \times \Re \times \Re \to f(M) \in \Re$, ή

$f : A \subseteq \Re^2 \to \Re$, δηλαδή $f : M(x, y) \in \Re^2 = \Re \times \Re \to f(M) \in \Re$,

ενώ ο όρος διανυσματικό πεδίο, σημαίνει ισοδύναμα τη διανυσματική $\vec{f}$, δηλαδή :

$\vec{f} : A \subseteq \Re^{\nu} \to \Re^{\mu}$,

και ειδικότερα, όπως συνήθως στις εφαρμογές για $\nu = \mu = 3$ ή $\nu = \mu = 2$,

$\vec{f} : A \subseteq \Re^3 \to \Re^3$, δηλαδή

$$\vec{f} :(x, y, z) = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = \vec{w} \in \Re^3 \to \vec{f}(x, y, z) = \vec{f}\left(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}\right) = \vec{f}\left(\vec{w}\right) \in \Re^3 \text{ ή}$$

$\vec{f} : A \subseteq \Re^2 \to \Re^2$, δηλαδή

$$\vec{f} :(x, y) = x\vec{i} + y\vec{j} = \vec{w} \in \Re^2 \to \vec{f}(x, y) = \vec{f}\left(x\vec{i} + y\vec{j}\right) = \vec{f}\left(\vec{w}\right) \in \Re^2.$$

1.4. ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ - ΣΧΟΛΙΑ.

α) Η γενική μορφή συναρτήσεων μεταξύ (Ευκλείδειων) χώρων είναι :

$\vec{f} : A \subseteq \Re^{\nu} \to \Re^{\mu}$, όπου $\nu, \mu \in N^*$, δηλαδή,

$$f:(x_1, x_2, \ldots, x_{\nu}) \in A \subseteq \Re^{\nu} \to f(x_1, x_2, \ldots, x_{\nu}) =$$

$$= \left[f_1 \cdot (x_1, x_2, \ldots, x_{\nu}), f_2 \cdot (x_1, x_2, \ldots, x_{\nu}), \ldots, f_{\mu} \cdot (x_1, x_2, \ldots, x_{\nu})\right] \in \Re^{\mu},$$

που σημαίνει βέβαια μια πολυδιάστατη συνάρτηση με πεδίο ορισμού το υποσύνολο A του ν - διάστατου χώρου $\Re^{\nu}$ και με τιμές εντός του μ - διάστατου χώρου $\Re^{\mu}$.

Συγκεκριμένα : **όταν $\nu \geq 1$ και $\mu = 1$,** μιλάμε για **πραγματικές συναρτήσεις** - και μάλιστα **πολλών** (ανεξάρτητων πραγματικών) **μεταβλητών** για $\nu > 1$, ενώ **μιας** (ανεξάρτητης πραγματικής) **μεταβλητής** για $\nu = 1$, ενώ, **όταν $\nu \geq 1$ και**

$\mu > 1$, μιλάμε για **διανυσματικές συναρτήσεις** - και μάλιστα **πολλών** (ανεξάρτητων πραγματικών) **μεταβλητών** για $v > 1$, ενώ **μιας** (ανεξάρτητης πραγματικής) **μεταβλητής** για $v = 1$.

β) Ένα πεδίο ή μια συνάρτηση πεδίου, μπορεί να εξαρτάται και από κάποια παράμετρο (συνήθως απ' το χρόνο t), οπότε χαρακτηρίζεται σαν **μη μόνιμο πεδίο,** π.χ. η θερμοκρασία του περιβάλλοντος της γης, όπως αντίθετα (να μην επηρεάζεται χρονικά), οπότε χαρακτηρίζεται σαν **μόνιμο ή στατικό πεδίο,** π.χ. το ηλεκτροστατικό ή μαγνητοστατικό πεδίο (όταν η ένταση του πεδίου δε μεταβάλλεται χρονικά).

1.5. ΥΠΕΝΘΥΜΙΣΕΙΣ ΒΑΣΙΚΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ ΑΠ' ΤΑ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ.

I) Ορισμός διανυσματικού χώρου.

Ένα σύνολο A ή πιο απλά - όπως συνήθως στην πράξη - έστω $A = \Re^3 = \Re \times \Re \times \Re$, (γενικότερα $A = \Re^v$, $v \in N^*$), ονομάζεται **διανυσματικός χώρος** (επί του σώματος $K = \Re$), εάν είναι εφοδιασμένο με δύο πράξεις (νόμους), (+) και $(\cdot)$ - εσωτερικής και εξωτερικής σύνθεσης, αντίστοιχα - έτσι ώστε :

α) Ως προς την πρόσθεση $\left[+ : \left(\vec{x}, \vec{y}\right) \in A \times A \to \left(\vec{x} + \vec{y}\right) \in A\right]$, το σύνολο $A = \Re^3$, να είναι αντιμεταθετική (αβελιανή) ομάδα, δηλαδή :

α_1) $\vec{x} + \vec{y} = \vec{y} + \vec{x}$, $\forall \vec{x}, \vec{y} \in A$, (αντιμεταθετική ιδιότητα),

α_2) $\left(\vec{x} + \vec{y}\right) + \vec{z} = \vec{x} + \left(\vec{y} + \vec{z}\right)$, $\forall \vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in A$, (προσεταιριστική ιδιότητα),

α_3) Υπάρχει ένα και μοναδικό στοιχείο $\vec{0} \in A$, τέτοιο ώστε, $\vec{0} + \vec{x} = \vec{x}$, $\forall \vec{x} \in A$, (ουδέτερο στοιχείο - μηδενικό διάστημα),

α_4) $\left(\forall \vec{x} \in A\right)\left(\exists -\vec{x} \in A\right)\left[\vec{x} + \left(-\vec{x}\right) = \vec{0}\right]$, ($-\vec{x}$ = αντίθετο του $\vec{x}$).

β) Ως προς τον εξωτερικό νόμο $\left[\cdot : (\lambda, x) \in K \times A \to \lambda \cdot x \in A\right]$, να ισχύουν οι ιδιότητες :

β_1) $\lambda \cdot \left(\vec{x} + \vec{y}\right) = \lambda \cdot \vec{x} + \lambda \cdot \vec{y}$, $\forall \lambda \in K = \Re$, $\forall \vec{x}, \vec{y} \in A = \Re^3$,

β_2) $(\lambda + \kappa) \cdot \vec{x} = \lambda \cdot \vec{x} + \kappa \cdot \vec{x}$, $\forall \lambda, \kappa \in \Re$, $\forall \vec{x} \in A$,

β_3) $1 \cdot \vec{x} = \vec{x}$, $\forall \vec{x} \in A$, όπου 1 είναι το ουδέτερο στοιχείο του σώματος $K = \Re$, με νόμο τον πολλαπλασιασμό,

β_4) $(\lambda \cdot \kappa) \cdot \vec{x} = \lambda \cdot \left(\kappa \cdot \vec{x}\right) = \kappa \cdot \left(\lambda \cdot \vec{x}\right)$, $\forall \lambda, \kappa \in K$, $\forall \vec{x} \in A$.

Σημείωση : Για την αποσαφήνιση των παρεμβαλλόμενων όρων (σώμα, κ.λ.π.), κρίνεται σκόπιμο ν' αναφερθούν εν συντομία, οι μαθηματικοί ορισμοί των συνήθων αλγεβρικών δομών και συγκεκριμένα :

1) **Νόμος εσωτερικής σύνθεσης :** Έστω σύνολο E και το καρτεσιανό γινόμενο $E \times E$. Κάθε απεικόνιση $f : A \subseteq E \times E \to E$, δηλαδή $f : (\alpha, \beta) \in E \times E \to (\alpha\, f\, \beta) \in E$, λέγεται νόμος ή πράξη εσωτερικής σύνθεσης επί του συνόλου E.

2) **Ομάδα :** Έστω σύνολο G, επί του οποίου έχουμε ορίσει ένα νόμο εσωτερικής σύνθεσης $\square$, δηλαδή, $\square : (\alpha, \beta) \in G \times G \to (\alpha \square \beta) \in G$.

   Έστω ότι ο νόμος $\square$, πληρεί τις εξής ιδιότητες :

   α) $(\alpha \square \beta) \square \gamma = \alpha \square (\beta \square \gamma)$, $\forall\, \alpha, \beta, \gamma \in G$, (προσεταιριστική ιδιότητα),

   β) $(\exists e \in G)\,[\alpha \square e = e \square \alpha = \alpha]$, $\forall\, \alpha \in G$, (e = ουδέτερο στοιχείο του $\square$),

   γ) $(\forall x \in G)\,(\exists y \in G)\,[x \square y = e]$, (το y λέγεται αντίθετο ή αντίστροφο στοιχείο του x και συμβολίζεται $y = -x$ ή $y = x^{-1}$).

   Το σύνολο G, εφοδιασμένο με τον παραπάνω ορισθέντα νόμο εσωτερικής σύνθεσης $\square$, λέγεται ομάδα.

   (Αν μάλιστα ο νόμος $\square$, ικανοποιεί και την ιδιότητα $x \square y = y \square x$, $\forall x, y \in G$, τότε η ομάδα G λέγεται αντιμεταθετική ή αβελιανή).

   π.χ. Αν στο σύνολο των ρητών αριθμών Q, ορίσουμε ένα νόμο εσωτερικής σύνθεσης, που είναι η συνήθως πρόσθεση των κλασμάτων, δηλαδή $\square = +$, $+ : \left(\frac{p_1}{q_1}, \frac{p_2}{q_2}\right) \in Q \times Q \to \frac{p_1}{q_1} + \frac{p_2}{q_2} = \frac{p_1 \cdot q_2 + p_2 \cdot q_1}{q_1 \cdot q_2} \in Q$, τότε εύκολα διαπιστώνεται ότι το Q καθίσταται αβελιανή ομάδα ως προς την πρόσθεση.

3) **Δακτύλιος :** Το σύνολο $\Re$ λέγεται δακτύλιος, εάν είναι εφοδιασμένο με δύο νόμους εσωτερικής σύνθεσης (+) και $(\cdot)$, δηλαδή,

$$\left[+ : (\alpha, \beta) \in \Re \times \Re \to +(\alpha, \beta) \overset{\text{ορ.}}{=} \alpha + \beta \in \Re\right], \left[\cdot : (\alpha, \beta) \in \Re \times \Re \to \cdot(\alpha, \beta) \overset{\text{ορ.}}{=} \alpha \cdot \beta \in \Re\right],$$

   έτσι ώστε :

   α) Το $\Re$ ως προς την πράξη (νόμο) πρόσθεση (+), ν' αποτελεί αβελιανή ομάδα.

   β) Ως προς τον πολλαπλασιασμό $(\cdot)$, να ισχύει :

   β_1) $\alpha \cdot (\beta \cdot \gamma) = (\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma$, (προσεταιριστικότης),

   β_2) $\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma$, (πολλαπλασιασμός επιμεριστικός ως προς την πρόσθεση).

   Μάλιστα ο δακτύλιος λέγεται αντιμεταθετικός, αν ο νόμος του πολλαπλασιασμού επί του δακτυλίου είναι αντιμεταθετικός.

π.χ. Το σύνολο των ακεραίων Z, επί του οποίου ορίζουμε 2 νόμους εσωτερικής σύνθεσης, όπως οι συνήθεις πράξεις, πρόσθεση και πολλαπλασιασμός, καθίσταται δακτύλιος (αντιμεταθετικός).

4) **Σώμα :** Έστω ο αντιμεταθετικός δακτύλιος A και έστω 0 το ουδέτερο στοιχείο του A ως προς το νόμο εσωτερικής σύνθεσης της πρόσθεσης.

Αν το $\{A-0\}$ αποτελεί ομάδα ως προς τον πολλαπλασιασμό, τότε το A λέγεται σώμα.

π.χ. Το σύνολο των πραγματικών αριθμών με νόμους εσωτερικής σύνθεσης, τις συνήθεις πράξεις, πρόσθεση και πολλαπλασιασμό, αποτελεί σώμα, συμβολιζόμενο με $\Re$. Επίσης, το σύνολο των μιγαδικών αριθμών, εφοδιασμένο με τους νόμους πρόσθεση και πολλαπλασιασμό, καθίσταται σώμα (C).

II) **Βάση, Διάσταση διανυσματικού χώρου.**

Έστω A ένας διανυσματικός χώρος επί του σώματος K, $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n$, η διανύσματα του A και $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in K$. Αν η σχέση $\lambda_1 \cdot \vec{v}_1 + \lambda_2 \cdot \vec{v}_2 + \ldots + \lambda_n \cdot \vec{v}_n = \vec{0}$, (1), συνεπάγεται $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0$, τότε τα διανύσματα $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n$, λέγονται **γραμμικώς ανεξάρτητα.** Αν η σχέση (1) ισχύει, χωρίς όλα τα $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, να είναι μηδέν (δηλαδή κάποιο δεν είναι μηδέν), τότε τα διανύσματα $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n$, λέγονται **γραμμικώς εξαρτώμενα.** Ο μέγιστος αριθμός των γραμμικώς ανεξάρτητων διανυσμάτων $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n$, του διανυσματικού χώρου A επί του σώματος K, λέγεται **διάσταση** του διανυσματικού χώρου A και συμβολίζεται $\dim A = n$, ενώ τα διανύσματα $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n$, λέμε ότι αποτελούν μια **βάση** του A. Έτσι κάθε διάνυσμα $\vec{w} \in A$ μπορεί να γραφεί : $\vec{w} = (w_1, w_2, \ldots, w_n) = w_1 \cdot \vec{v}_1 + w_2 \cdot \vec{v}_2 + \ldots + w_n \cdot \vec{v}_n$.

π.χ. Οι πραγματικοί αριθμοί $\Re$ μπορούν να θεωρηθούν ως διανυσματικός χώρος επί του σώματος πάλι $\Re$ (δηλαδή επί του εαυτού τους), η δε διάστασή τους είναι τότε 1. Επίσης το σύνολο C των μιγαδικών αριθμών μπορεί να θεωρηθεί ως διανυσματικός χώρος επί του C, με διάσταση 1. Αν όμως το C θεωρηθεί ως διανυσματικός χώρος επί του σώματος $\Re$, τότε ο διανυσματικός χώρος C, έχει διάσταση 2. Άρα η διάσταση ενός διανυσματικού χώρου, εξαρτάται προφανώς από το σώμα, επί του οποίου αναφέρεται ο διανυσματικός χώρος. Έτσι ο $\Re^3 = \Re \times \Re \times \Re$, είναι διανυσματικός χώρος επί του σώματος $\Re$, και λέγεται ευκλείδειος (πραγματικός - επί του $K = \Re$) διανυσματικός χώρος, με διάσταση $(\dim \Re^3 = 3)$, μια δε βάση του (ορθοκανονική) είναι τα τρία διανύσματα : $\vec{i} = (1, 0, 0)$, $\vec{j} = (0, 1, 0)$, $\vec{\kappa} = (0, 0, 1)$.

Δηλαδή, $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3) = x_1 \cdot \vec{i} + x_2 \cdot \vec{j} + x_3 \cdot \vec{\kappa}$, $\forall \vec{x} \in \Re^3$, όπου x_1, x_2, x_3 είναι οι συντεταγμένες του διανύσματος $\vec{x}$.

III) Άλλα χαρακτηριστικά των διανυσμάτων.

1) Ονομάζουμε **μέτρο** (ή απόλυτη τιμή) ενός διανύσματος $\vec{x}$ - έστω $\vec{x} \in \Re$ - και το συμβολίζουμε $|\vec{x}|$, τον πραγματικό μη αρνητικό αριθμό $\left(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2\right)^{1/2}$, όπου $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$, δηλαδή : $|\vec{x}| \overset{\text{ορ.}}{=} \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$.

2) Λέμε ότι δύο διανύσματα $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$, $\vec{y} = (y_1, y_2, y_3)$ είναι **ίσα,** αν και μόνον αν, $x_1 = y_1$, $x_2 = y_2$, $x_3 = y_3$ και γράφουμε $\vec{x} = \vec{y}$.

3) Ορίζουμε ως **άθροισμα** δύο διανυσμάτων $\vec{x}$, $\vec{y}$, το διάνυσμα :

$\vec{x} + \vec{y} \overset{\text{ορ.}}{=} (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3)$, ενώ το **γινόμενο** πραγματικού αριθμού **λ** $\in \Re$ επί διάνυσμα $\vec{\mathbf{x}}$ ορίζεται : $\lambda \cdot \vec{x} \overset{\text{ορ.}}{=} (\lambda \cdot x_1, \lambda \cdot x_2, \lambda \cdot x_3)$ (Ισχύει προφανώς $\lambda \cdot \vec{x} = \vec{x} \cdot \lambda$).
Απ' την άλγεβρα των πραγματικών αριθμών και των προηγηθέντων ορισμών της πρόσθεσης διανυσμάτων και του πολλαπλασιασμού διανύσματος επί -1, παίρνουμε τη **διαφορά** διανυσμάτων :

$\vec{x} - \vec{y} = \vec{x} + (-1) \cdot \vec{y} = (x_1 - y_1, x_2 - y_2, x_3 - y_3)$.

4) Ορίζουμε ως **απόσταση** δύο διανυσμάτων $\vec{x}$ και $\vec{y}$ και τη συμβολίζουμε $d\left(\vec{x}, \vec{y}\right)$, το μέτρο της διαφοράς τους, δηλαδή :

$d\left(\vec{x}, \vec{y}\right) \overset{\text{ορ.}}{=} |\vec{x} - \vec{y}| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2}$, (≥ 0).

Εξάλλου, θεωρώντας τα σημεία Α, Β του $\Re^3$, που εκπροσωπούνται απ' τα διανύσματα (διανύσματα θέσης ή διανυσματικές ακτίνες των Α, Β) $\vec{x}$ και $\vec{y}$, τότε έχουμε ότι η απόσταση $d\left(\vec{x}, \vec{y}\right)$ ισούται με το μήκος (ΑΒ) του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ, δηλαδή : $(AB) = d\left(\vec{x}, \vec{y}\right) = |\vec{x} - \vec{y}|$, ενώ

$\vec{AB} = (x_1 - y_1,\ x_2 - y_2,\ x_3 - y_3)$ (δηλαδή $|\vec{AB}| = (AB) = d\left(\vec{x}, \vec{y}\right)$).

5) Ονομάζουμε **μοναδιαίο διάνυσμα** $\vec{\mu}$ (ή διανυσματική μονάδα), κάθε διάνυσμα που το μέτρο του ισούται με τη μονάδα μέτρησης, δηλαδή $|\vec{\mu}| = 1$. Έτσι για κάθε διάνυσμα $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$ (ή αλλιώς για κάθε διεύθυνση στο χώρο) αντιστοιχεί ένα μόνο μοναδιαίο διάνυσμα $\mu_{\vec{x}}$, δηλαδή :

$$\boxed{\vec{\mu}_{\vec{x}} = \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|} = \left(\frac{x_1}{|\vec{x}|}, \frac{x_2}{|\vec{x}|}, \frac{x_3}{|\vec{x}|} \right)}, \quad \text{(αφού :}$$

$$\left|\vec{\mu}_{\vec{x}}\right| = \left|\frac{\vec{x}}{|\vec{x}|}\right| = \sqrt{\left(\frac{x_1}{\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}}\right)^2 + \left(\frac{x_2}{\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}}\right)^2 + \left(\frac{x_3}{\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}}\right)^2} = \sqrt{\frac{x_1^2+x_2^2+x_3^2}{x_1^2+x_2^2+x_3^2}} = 1).$$

Έτσι τα διανύσματα $\vec{i}, \vec{j}, \vec{\kappa}$, της συνήθους ορθοκανονικής βάσης του $\Re^3$, είναι προφανώς τα μοναδιαία διανύσματα των αξόνων - διευθύνσεων x'x, y'y, z'z, αντίστοιχα.

6) Ορίζουμε ως **εσωτερικό γινόμενο** (ή αριθμητικό ή βαθμωτό) δύο διανυσμάτων $\vec{x}$ και $\vec{y}$ (έστω του $\Re^3$) και το συμβολίζουμε $\vec{x} \cdot \vec{y}$, τον πραγματικό αριθμό $x_1 \cdot y_1 + x_2 \cdot y_2 + x_3 \cdot y_3$, δηλαδή :

$$\boxed{\vec{x} \cdot \vec{y} \overset{\text{ορ.}}{=} x_1 \cdot y_1 + x_2 \cdot y_2 + x_3 \cdot y_3}.$$

Απ' τον ορισμό (4), εύκολα προκύπτουν οι ιδιότητες :

α) $\vec{i} \cdot \vec{i} = \vec{i}^2 = \vec{j} \cdot \vec{j} = \vec{j}^2 = \vec{\kappa} \cdot \vec{\kappa} = \vec{\kappa}^2 = 1$, ενώ $\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{j} \cdot \vec{\kappa} = \vec{i} \cdot \vec{\kappa} = 0$.

β) $\vec{x} \cdot \vec{y} = \vec{y} \cdot \vec{x}$.

γ) $\vec{x} \cdot \left(\vec{y} + \vec{z}\right) = \vec{x} \cdot \vec{y} + \vec{x} \cdot \vec{z}$.

δ) $\lambda \cdot \left(\vec{x} \cdot \vec{y}\right) = \left(\lambda \cdot \vec{x}\right) \cdot \vec{y} = \vec{x} \cdot \left(\lambda \cdot \vec{y}\right)$.

ε) $\vec{x}^2 = \vec{x} \cdot \vec{x} = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = |\vec{x}|^2$.

ζ) $\vec{x}\cdot\vec{y}=|\vec{x}|\cdot|\vec{y}|\cdot\cos\theta$, (όπου $\theta\in[0,\pi]$ είναι η γωνία μεταξύ των διανυσμάτων $\vec{x}$ και $\vec{y}$, που υπολογίζεται θεωρώντας τα $\vec{x}$ και $\vec{y}$ με κοινή αρχή και μετρώντας απ' το $\vec{x}$ δεξιόστροφα. Άρα : $\left[\vec{x}\perp\vec{y}\right]\Leftrightarrow\left[\vec{x}\cdot\vec{y}=0\right]$, ενώ $\cos\theta=\dfrac{\vec{x}\cdot\vec{y}}{|\vec{x}|\cdot|\vec{y}|}$.

[Εξάλλου αποδεικνύεται ότι ισχύουν και οι ιδιότητες :

α) $|\vec{x}|=|-\vec{x}|$,

β) $|\vec{x}\cdot\vec{y}|\le|\vec{x}|\cdot|\vec{y}|$, (ανισότητα Cauchy - Schwarz, που ισχύει ως ισότητα μόνο όταν $\vec{y}=\rho\cdot\vec{x}$, για $\rho\in\Re$),

γ) $|\vec{x}+\vec{y}|\le|\vec{x}|+|\vec{y}|$, (που ισχύει ως ισότητα μόνο όταν $\vec{y}=\mu\cdot\vec{x}$, $\mu\ge 0$),

δ) $\left||\vec{x}|-|\vec{y}|\right|\le|\vec{x}-\vec{y}|$,

οι γνωστές δηλαδή ιδιότητες των απόλυτων τιμών].

7) Ορίζουμε ως **εξωτερικό γινόμενο** (ή διανυσματικό) δύο διανυσμάτων $\vec{x}=(x_1,x_2,x_3)$ και $\vec{y}=(y_1,y_2,y_3)$ και το συμβολίζουμε $\vec{x}\times\vec{y}$, το διάνυσμα του $\Re^3$:

$$\boxed{\vec{x}\times\vec{y}\overset{\text{ορ.}}{=}\begin{vmatrix} i & j & \kappa \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3\end{vmatrix}}\,.$$

(Ας σημειωθεί ότι η έννοια του εξωτερικού γινομένου δεν ορίζεται στο χώρο $\Re^{\nu}$, με $\nu>3$).

Απ' τον ορισμό (5), προκύπτουν οι ιδιότητες :

α) $\vec{x}\times\vec{x}=\vec{0}$,

β) $\left(\vec{x}\times\vec{y}\right)=-\left(\vec{y}\times\vec{x}\right)$,

γ) $|\vec{x}\times\vec{y}|=|\vec{x}|\cdot|\vec{y}|\cdot\sin\theta$, (όπου θ η γωνία μεταξύ των διανυσμάτων $\vec{x}$, $\vec{y}$) όπως και $\vec{x}\times\vec{y}=|\vec{x}|\cdot|\vec{y}|\cdot\sin\theta\cdot\vec{\mu}$, όπου $\vec{\mu}$ είναι ένα (ελεύθερο) μοναδιαίο διάνυσμα του $\Re^3$, που είναι κάθετο στο επίπεδο των διανυσμάτων $\vec{x}$ και $\vec{y}$ και το σύστημα $\left(\vec{x},\vec{y},\vec{\mu}\right)$ είναι δεξιόστροφο. (Δηλαδή, το εξωτερικό γινόμενο $\vec{x}\times\vec{y}$ είναι ένα (ελεύθερο) διάνυσμα του $\Re^3$, που έχει μέτρο $|\vec{x}|\cdot|\vec{y}|\cdot\sin\theta$, είναι κάθετο στο επίπεδο των $\vec{x}$ και $\vec{y}$, και έχει φορά τέτοια, ώστε το σύστημα $\left(\vec{x}, \vec{y}, \vec{x}\times\vec{y}\right)$ να είναι δεξιόστροφο). Επίσης, προφανώς : $\vec{y}\cdot\vec{\mu} = 0 = \vec{y}\cdot\vec{\mu}$, με $|\vec{\mu}| = 1$,

δ) $\lambda\cdot\left(\vec{x}\times\vec{y}\right) = \left(\lambda\cdot\vec{y}\right)\times\vec{y} = \vec{x}\times\left(\lambda\cdot\vec{y}\right)$,

ε) Αν $\vec{x}\times\vec{y} = \vec{0}$, με $\vec{x}\neq 0$, $\vec{y}\neq 0$, τότε $\theta = 0$ και τα διανύσματα $\vec{x}$, $\vec{y}$ είναι παράλληλα (συγγραμμικά),

ζ) $|\vec{x}\times\vec{y}| = \left[|\vec{x}|^2\cdot|\vec{y}|^2 - \left(\vec{x}\cdot\vec{y}\right)^2\right]^{1/2}$,

η) $\vec{x}\times\left(\vec{y}+\vec{z}\right) = \left(\vec{x}\times\vec{y}\right)+\left(\vec{x}\times\vec{z}\right)$ και $\left(\vec{x}+\vec{y}\right)\times\vec{z} = \left(\vec{x}\times\vec{z}\right)+\left(\vec{y}\times\vec{z}\right)$,

θ) $\vec{i}\times\vec{i} = \vec{j}\times\vec{j} = \vec{\kappa}\times\vec{\kappa} = 0$,

ι) $\vec{i}\times\vec{j} = \vec{\kappa}$, $\vec{j}\times\vec{\kappa} = \vec{i}$, $\vec{\kappa}\times\vec{i} = \vec{j}$.

κ) Το $|\vec{x}\times\vec{y}|$ ισούται με το εμβαδόν παραλληλογράμμου που έχει διαδοχικές πλευρές τα $\vec{x}$, $\vec{y}$.

8) Ορίζουμε ως **μικτό γινόμενο** (ή τριπλό βαθμωτό γινόμενο) τριών διανυσμάτων $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$, $\vec{y} = (y_1, y_2, y_3)$, $\vec{z} = (z_1, z_2, z_3)$, με τη σειρά που δίνονται, το εσωτερικό γινόμενο του $\vec{x}$ επί το εξωτερικό γινόμενο $\vec{y}\times\vec{z}$, δηλαδή τον αριθμό :

$$\boxed{\left[\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}\right] \overset{\text{ορ.}}{=} \vec{x}\cdot\left(\vec{y}\times\vec{z}\right) = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}}\;.$$

Απ' τον ορισμό (6) του μικτού γινομένου, προκύπτουν οι ιδιότητες :

α) $\left(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, \text{συνεπίπεδα}\right) \Leftrightarrow \left[\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}\right] = 0$,

β) $\left[\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}\right] = \left[\vec{y}, \vec{z}, \vec{x}\right] = \left[\vec{z}, \vec{x}, \vec{y}\right] = -\left[\vec{y}, \vec{x}, \vec{z}\right] = -\left[\vec{x}, \vec{z}, \vec{y}\right] = -\left[\vec{z}, \vec{y}, \vec{x}\right]$, γ) Το μικτό γινόμενο είναι προφανώς πραγματικός αριθμός και μάλιστα η απόλυτη τιμή του ισούται με τον όγκο παραλληλογράμμου που έχει ακμές τα $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$.

9) Ορίζουμε ως **δισεξωτερικό γινόμενο** (ή τριπλό διανυσματικό γινόμενο) την ποσότητα : $\vec{x} \times \left(\vec{y} \times \vec{z}\right)$.

Βρίσκουμε, ότι το παραπάνω δισεξωτερικό γινόμενο, είναι ένα διάνυσμα που βρίσκεται πάνω στο επίπεδο των $\vec{y}$ και $\vec{z}$. Επίσης ότι, $\vec{x} \times \left(\vec{y} \times \vec{z}\right) \neq \left(\vec{x} \times \vec{y}\right) \times \vec{z}$,

ενώ ισχύει : $\vec{x} \times \left(\vec{y} \times \vec{z}\right) = \left(\vec{x} \cdot \vec{z}\right) \cdot \vec{y} - \left(\vec{x} \cdot \vec{y}\right) \cdot \vec{z}$.

10) Η διανυσματική εξίσωση ευθείας (ε) του χώρου $\mathfrak{R}^3$, που διέρχεται από ένα σημείο $M_o = \vec{r_o}$ και είναι παράλληλη προς ένα διάνυσμα $\vec{a}$ του $\mathfrak{R}^3$, είναι : $\vec{\varepsilon} \cdot (\lambda) = \vec{r_o} + \lambda \cdot \vec{a}$, $\lambda \in \mathfrak{R}$, ενώ η διανυσματική εξίσωση ενός επιπέδου (P), που διέρχεται από ένα σημείο $M_o = \vec{r_o} = (x_o, y_o, z_o)$ και είναι κάθετο προς ένα διάνυσμα $\vec{v} = (A, B, \Gamma)$, είναι :

$\left(\vec{r} - \vec{r_o}\right) \cdot \vec{V} = 0$, [ή αλλιώς : $Ax + By + \Gamma z + \Delta = 0$,

όπου $\Delta = -\vec{V} \cdot \vec{r_o} = -(Ax_o + By_o + \Gamma z_o)$, που είναι και η λεγόμενη αναλυτική εξίσωση του επιπέδου (P)].

2. ΒΑΣΙΚΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ.

2.1. ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ - ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ κ.λ.π. ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ ΜΙΑΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ,

Οι γνωστές βασικές έννοιες των πραγματικών συναρτήσεων - παράγωγος, ολοκλήρωμα, . όριο, συνέχεια - μεταφέρονται ανάλογα και στις διανυσματικές συναρτήσεις. Συγκεκριμένα, έχουμε :

Έστω η διανυσματική συνάρτηση $\vec{f}$ μιας (ανεξάρτητης) μεταβλητής t, $\vec{f} : A \subseteq \Re \to \Re^3$, (γενικά $\vec{f} : A \subseteq \Re \to \Re^\mu$, δηλαδή :

$$\vec{f} : t \in A \subseteq \Re \to \vec{f}(t) = [f_1(t),\ f_2(t),\ f_3(t)] = \left[f_1(t)\cdot \vec{i} + f_2(t)\cdot \vec{j} + f_3(t)\cdot \vec{\kappa}\right] \in \Re^3,$$

όπου $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{\kappa}$, είναι μοναδιαία διανύσματα του ευκλείδειου διανυσματικού χώρου $\Re^3$ - δηλαδή $\left(\vec{i}, \vec{j}, \vec{\kappa}\right)$ είναι μια διανυσματική βάση του $\Re^3$ σε καρτεσιανές συντεταγμένες και $f_1(t)$, $f_2(t)$, $f_2(t)$, είναι οι συντεταγμένες του διανύσματος $\vec{f}(t)$ ως προς την προαναφερθείσα διανυσματική βάση του $\Re^3$.

Ονομάζουμε παράγωγο της $\vec{f}$ ως προς t, τη σχέση :

$$\vec{f}'(t) = \frac{d\vec{f}(t)}{dt} \overset{\text{ορ.}}{=} \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{f}(t+\Delta t) - \vec{f}(t)}{\Delta t} = f_1'(t)\cdot \vec{i} + f_2'(t)\cdot \vec{j} + f_3'(t)\cdot \vec{\kappa} = (f_1',\ f_2',\ f_3'),\ (1).$$

Όμοια ορίζουμε και τις **παραγώγους ανώτερης τάξης** της διανυσματικής συνάρτησης $\vec{f}$, δηλαδή :

$\vec{f}''(t) = \dfrac{d^2\vec{f}(t)}{dt^2} = (f_1'',\ f_2'',\ f_3'')$, $\vec{f}'''(t) = \dfrac{d^3\vec{f}(t)}{dt^3} = (f_1''',\ f_2''',\ f_3''')$, κ.λ.π., όπως ανάλογα ορίζονται επίσης και τα **διαφορικά** της $\vec{f}$, δηλαδή :

$$d\vec{f} = \vec{f}'\cdot dt = (df_1,\ df_2,\ df_3),\quad d^2\vec{f} = \vec{f}''\cdot dt = \left(d^2f_1,\ d^2f_2,\ d^2f_3\right),\ \text{κ.λ.π.}$$

Επίσης, οι γνωστοί **κανόνες παραγώγισης** των πραγματικών συναρτήσεων μεταφέρονται ανάλογα και στις διανυσματικές συναρτήσεις. Έτσι, αν $\vec{f}$, $\vec{g}$, δύο διανυσματικές συναρτήσεις (έστω απ' τον $\Re$ στον $\Re^3$), ισχύει :

$$\left(\vec{f} + \vec{g}\right)' = \vec{f}' + \vec{g}',\quad \left(\vec{f}\cdot\vec{g}\right)' = \vec{f}'\cdot\vec{g} + \vec{f}\cdot\vec{g}',\quad \left(\vec{f}\times\vec{g}\right)' = \vec{f}'\times\vec{g} + \vec{f}\times\vec{g}'.$$

Εξάλλου, σχετικά με το **αόριστο ολοκλήρωμα** της διανυσματικής συνάρτησης $\vec{f}$ έχουμε :

$$\int \vec{f}(t)\cdot dt \overset{\text{ορ.}}{=} \vec{i}\cdot\int f_1(t)\cdot dt + \vec{j}\cdot\int f_2(t)\cdot dt + \vec{\kappa}\cdot\int f_3(t)\cdot dt + \vec{c}$$

(όπου $\vec{c} = (c_1, c_2, c_3)$= αυθαίρετο σταθερό διάνυσμα), και όμοια για το **ορισμένο :**

$$\int_\alpha^\beta \vec{f}\cdot dt = \vec{i}\cdot\int_\alpha^\beta f_1\cdot dt + \vec{j}\cdot\int_\alpha^\beta f_2\cdot dt + \vec{\kappa}\cdot\int_\alpha^\beta f_3\cdot dt = \vec{F}(\beta) - \vec{F}(\alpha)$$

(όπου $\vec{F} = \int \vec{f}\cdot dt$ ή $\vec{F}' = \vec{f}$, δηλαδή $\vec{F}$ παράγουσα της $\vec{f}$.

Τέλος, όπως στις πραγματικές συναρτήσεις, ανάλογα μεταφέρονται και στις διανυσματικές συναρτήσεις, οι έννοιες του **ορίου** και της **συνέχειας.**

Έτσι γενικά, η $\vec{f} : \vec{t} \in A \subseteq \Re^\nu \to \vec{f}(\vec{t}) \in \Re^\mu$, δηλαδή μια διανυσματική συνάρτηση ορισμένη στον $\Re^\nu$ και με τιμές στον $\Re^\mu$, λέμε όμοια ότι συγκλίνει στο $\vec{b} \in \Re^\mu$, του $\vec{t}$ τείνοντος στο $\vec{\alpha} \in \Re^\nu$ και γράφουμε : $\lim\limits_{\vec{t}\to\vec{\alpha}} \vec{f}(\vec{t}) = \vec{b}$.

Όμοια λέμε, για την $\vec{f} : \vec{t} \in A \subseteq \Re \to \vec{f}(t) = \left[f_1(t)\cdot\vec{i} + f_2(t)\cdot\vec{j} + f_3(t)\cdot\vec{\kappa}\right] \in \Re^3$ ότι είναι συνεχής στο σημείο $t_o \in A$, αν οι πραγματικές συναρτήσεις $f_1(t)$, $f_2(t)$, $f_3(t)$, είναι συνεχείς στο t_o, δηλαδή $\lim\limits_{t\to t_o} \vec{f}(t) = \vec{f}(t_o)$.

2.1.1. ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ.

A) Έστω υλικό σημείο M, κινούμενο κατά μήκος μιας καμπύλης γ (τροχιά του M) στο χώρο $\Re^3$, κατά το χρονικό διάστημα $T \subseteq \Re$, μια κίνηση που εκφράζεται απ' τη διανυσματική συνάρτηση :

$$\vec{r}(t) = x(t)\cdot\vec{i} + y(t)\cdot\vec{j} + z(t)\cdot\vec{\kappa} = [x(t),\ y(t),\ z(t)].$$

Η διανυσματική εξίσωση $\vec{r}(t)$, λέγεται **εξίσωση κινήσεως** του κινητού σημείου M, ενώ οι πραγματικές εξισώσεις $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, ονομάζονται **παραμετρικές εξισώσεις κινήσεως** του σημείου M.

Το διάνυσμα $\vec{r}'(t) = \vec{v}(t)$ ορίζεται ως η **ταχύτητα** - speed (~~velocity~~) του κινητού M κατά τη χρονική στιγμή t, ενώ το $\left|\vec{r}'(t)\right| = \left|\vec{v}(t)\right| = v(t)$ λέγεται το μέτρο της ταχύτητας του Μ κατά τη χρονική στιγμή t (Προφανώς η ταχύτητα εφάπτεται πάντα στην τροχιά, του κινητού Μ).

Επίσης, η 2η παράγωγος της $\vec{r}(t)$ ως προς t, ή αλλιώς η 1η παράγωγος της $\vec{v}(t)$ ως προς t, δηλαδή το διάνυσμα $\vec{r}''(t)=\vec{v}'(t)=\vec{\alpha}(t)$ ορίζεται ως η **επιτάχυνση - (acceleration)** του κινητού σημείου Μ κατά τη χρονική στιγμή t, ενώ το $\left|\vec{r}''(t)\right|=\left|\vec{v}'(t)\right|=\left|\vec{\alpha}(t)\right|=\alpha(t)$ λέγεται το μέτρο της επιτάχυνσης του Μ κατά τη χρονική στιγμή t.

Β) Έστω μια καμπύλη γ του τρισδιάστατου χώρου $\Re^3$ εκφραζόμενη απ' τη διανυσματική συνάρτηση :

$$\vec{r}: t\in T\subseteq\Re\to\vec{r}(t)=\left[x(t)\cdot\vec{i}+y(t)\cdot\vec{j}+z(t)\cdot\vec{\kappa}\right]\in\Re^3,\ \text{με } t_o\in T.$$

Ονομάζουμε **εφαπτόμενο διάνυσμα** της καμπύλης γ στο σημείο $M(x_o,\ y_o,\ z_o)=\vec{r}(t_o)$, το μοναδιαίο διάνυσμα $\vec{\varepsilon}_M=\dfrac{\vec{r}'(t_o)}{\left|\vec{r}'(t_o)\right|}=(\varepsilon_1,\ \varepsilon_2,\ \varepsilon_3)$ (που το θεωρούμε εφαρμοστό στο Μ).

Μάλιστα, η ευθεία (ε) που διέρχεται από το σημείο $M(x_o,\ y_o,\ z_o)$ και είναι παράλληλη προς το εφαπτόμενο διάνυσμα $\vec{\varepsilon}_M$ της γ στο Μ, λέγεται η **εφαπτόμενη ευθεία** της καμπύλης γ του χώρου $\Re^3$ στο Μ, με διανυσματική εξίσωση, που ως γνωστό απ' την αναλυτική γεωμετρία, θα είναι :

$\boxed{\vec{\varepsilon}=\vec{r}(t_o)+\lambda\cdot\vec{\varepsilon}_M}$,(2), δηλαδή $\vec{\varepsilon}(x,\ y,\ z)=(x_o,\ y_o,\ z_o)+\lambda\cdot(\varepsilon_1,\ \varepsilon_2,\ \varepsilon_3)$, $\lambda\in\Re$, ή αλλιώς, στη λεγόμενη αναλυτική μορφή (δηλαδή σε μη διανυσματική μορφή - σε εξισώσεις χωρίς την παράμετρο λ) : $\dfrac{x-x_o}{\varepsilon_1}=\dfrac{y-y_o}{\varepsilon_2}=\dfrac{z-z_o}{\varepsilon_3}$.

Γ) Επίσης, η διανυσματική εξίσωση του **κάθετου επιπέδου** της καμπύλης γ στο σημείο Μ, δηλαδή του επιπέδου που διέρχεται απ' το $M=\vec{r}(t_o)$ και είναι κάθετο στο εφαπτόμενο διάνυσμα $\vec{\varepsilon}_M$, κατά τα γνωστά απ' την αναλυτική γεωμετρία, θα είναι : $\left[\vec{r}(t)-\vec{r}(t_o)\right]\cdot\vec{\varepsilon}_M=0$, (3), δηλαδή $\left[(x,\ y,\ z)-(x_o,\ y_o,\ z_o)\right]\cdot(\varepsilon_1,\ \varepsilon_2,\ \varepsilon_3)=0$, ή αλλιώς (στην αναλυτική μορφή) : $(x-x_o)\cdot\varepsilon_1+(y-y_o)\cdot\varepsilon_2+(z-z_o)\cdot\varepsilon_3=0$, ή ακόμη (μετά από πράξεις) και : $Ax+By+\Gamma z+\Delta=0$.

Δ) Εξάλλου, ορίζοντας τη συνάρτηση $s = s(t)$, έτσι ώστε :

$s'(t) = \left|\vec{r}\,'(t)\right| = \sqrt{(x')^2 + (y')^2 + (z')^2} > 0$, τότε **το μήκος τόξου της καμπύλης** της $\vec{r}(t)$ για $t = t_2 - t_1$, είναι :

$$\boxed{s(t) = \int_{t_1}^{t_2} \left|\vec{r}\,'(t)\right| \cdot dt = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(x')^2 + (y')^2 + (z')^2}} \quad (4).$$

2.1.2. ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ.

1) Έστω η διανυσματική συνάρτηση $\vec{r}(t) = e^{-t} \cdot \vec{i} + ln(t^2 + 1) \cdot \vec{j} - εφt \cdot \vec{κ}$. Να υπολογιστούν : $\vec{r}\,'$, $\vec{r}\,'(0)$, $\vec{r}\,''$, $\left|\vec{r}\,''(0)\right|$.

Λύση

Κατά τον ορισμό (1) έχουμε :

$$\vec{r}\,' = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \left(e^{-t}\right)' \cdot \vec{i} + \left(\ln(t^2+1)\right)' \cdot \vec{j} - (εφt)' \cdot \vec{κ} =$$

$$= -e^{-t} \cdot \vec{i} + \frac{2t}{t^2+1} \cdot \vec{j} - \frac{1}{συν^2 t} \cdot \vec{κ}, \text{ οπότε } \vec{r}\,'(0) = -i - κ,$$

$$\text{ενώ } \vec{r}\,'' = \frac{d^2\vec{r}(t)}{dt} = e^{-t} \cdot \vec{i} + \frac{2-2t^2}{\left(t^2+1\right)^2} \cdot \vec{j} - \frac{2ημt}{συν^3 t} \cdot \vec{κ}, \text{ οπότε :}$$

$$\vec{r}\,''(0) = \vec{i} + 2\vec{j} \text{ και } \left|\vec{r}\,''(0)\right| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 0^2} = \sqrt{5}.$$

2) Έστω υλικό σημείο Μ, κινούμενο κατά μήκος μιας καμπύλης του χώρου $\Re^3$, με εξίσωση κινήσεως $\vec{r}(t) = \left(ημt, t \cdot συνt, e^{t^2}\right)$. Να υπολογιστεί η ταχύτητα $\vec{v}$ και η επιτάχυνση $\vec{a}$, του κινητού σημείου Μ, κατά χρονική στιγμή $t_o = 0$.

Λύση

$$\text{Ως γνωστό, } \vec{v} = \vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \vec{r}\,'(t) = \left[(ημt)',\ (t \cdot συνt)',\ \left(e^{t^2}\right)'\right] =$$

$$= συνt \cdot \vec{i} + (συνt - t \cdot ημt) \cdot \vec{j} + 2t \cdot e^{t^2} \cdot \vec{κ} \Rightarrow \vec{v}(0) = \vec{i} + \vec{j}, \text{ με } \left|\vec{v}(0)\right| = \sqrt{2},$$

160

και $\vec{a} = \vec{a}(t) = \dfrac{d\vec{v}(t)}{dt} = \dfrac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2} = \left[(\sigma\upsilon\nu t)', \ (\sigma\upsilon\nu t - t\cdot\eta\mu t)', \ \left(2t\cdot e^{t^2}\right)'\right] =$

$= -\eta\mu t\cdot\vec{i} + (-2\eta\mu t - t\cdot\sigma\upsilon\nu t)\cdot\vec{j} + \left(2e^{t^2} + 4t^2\cdot e^{t^2}\right)\cdot\vec{\kappa} \Rightarrow$

$\Rightarrow \vec{a}(0) = 2\vec{\kappa}$, με $\left|\vec{a}(0)\right| = \sqrt{0^2+0^2+2^2} = 2.$

3) Δίνονται οι διανυσματικές συναρτήσεις :

$\vec{f}(t) = 5t^2\cdot\vec{i} + t\,\vec{j} - t^3\cdot\vec{\kappa}, \quad \vec{g}(t) = \eta\mu t\cdot\vec{i} - \sigma\upsilon\nu t\cdot\vec{j}.$

Να υπολογιστούν : $\dfrac{d\left(\vec{f}\cdot\vec{g}\right)}{dt}, \quad \dfrac{d\left(\vec{f}\times\vec{g}\right)}{dt}, \quad \dfrac{d\left(\vec{f}\cdot\vec{f}\right)}{dt}.$

Λύση

Έχουμε : $\vec{f}\cdot\vec{g} = \left(5t^2\cdot\eta\mu t\right) + \left(t\cdot(-\sigma\upsilon\nu t)\right) + \left(-t^3\cdot 0\right) = 5t^2\cdot\eta\mu t - t\cdot\sigma\upsilon\nu t \Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{d\left(\vec{f}\cdot\vec{g}\right)}{dt} = \left(5t^2\cdot\eta\mu t - t\cdot\sigma\upsilon\nu t\right)' = 5t^2\cdot\sigma\upsilon\nu t + 10t\cdot\eta\mu t + t\eta\mu t - \sigma\upsilon\nu t.$

Εξάλλου :

$$\vec{f}\times\vec{g} = \begin{vmatrix} i & j & \kappa \\ 5t & t^2 & -t^3 \\ \eta\mu t & -\sigma\upsilon\nu t & 0 \end{vmatrix} = -t^3\cdot\sigma\upsilon\nu t\cdot\vec{i} - t^3\cdot\eta\mu t\cdot\vec{j} + \left(-5t^2\cdot\sigma\upsilon\nu t - t\cdot\eta\mu t\right)\cdot\vec{\kappa}$$

$\Rightarrow \dfrac{d\left(\vec{f}\times\vec{g}\right)}{dt} = \left(-t^3\cdot\sigma\upsilon\nu t\right)'\cdot\vec{i} + \left(-t^3\cdot\eta\mu t\right)'\cdot\vec{j} + \left(-5t^2\cdot\sigma\upsilon\nu t - t\cdot\eta\mu t\right)'\cdot\vec{\kappa} =$

$= \left(t^3\cdot\eta\mu t - 3t^2\cdot\sigma\upsilon\nu t\right)\cdot\vec{i} - \left(t^3\cdot\sigma\upsilon\nu t + 3t^2\cdot\eta\mu t\right)\cdot\vec{j} + \left(5t^2\cdot\eta\mu t - 11t - \eta\mu t\right)\cdot\vec{\kappa}.$

Τέλος, επειδή $\vec{f}\cdot\vec{f} = \left(5t^2\cdot 5t^2\right) + (t\cdot t) + \left(-t^3\right)\cdot\left(-t^3\right) = 25t^4 + t^2 + t^6 \Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{d\left(\vec{f}\cdot\vec{f}\right)}{dt} = 100t^3 + 2t + 6t^5.$

4) Να υπολογιστεί η εξίσωση της εφαπτόμενης ευθείας και του κάθετου επιπέδου, στο σημείο $M = \vec{r}(1)$ της καμπύλης της $\vec{r}$ που έχει παραμετρικές εξισώσεις : $\left(x = t,\ y = t^2,\ z = \frac{2}{3}\cdot t^3\right)$.

Λύση

Κατά την παρατήρηση (B) της 2.1.1., η εξίσωση της εφαπτομένης θα είναι :

$$\vec{\varepsilon} = \vec{r}(1) + \lambda \cdot \vec{\varepsilon}_M, \text{ όπου } \vec{\varepsilon}_M = \frac{\vec{r}\,'(1)}{\left|\vec{r}\,'(1)\right|}.$$

Έχουμε όμως : $\vec{r}(t) = x\cdot\vec{i} + y\cdot\vec{j} + z\cdot\vec{\kappa} = t\cdot\vec{i} + t^2\cdot\vec{j} + \frac{2}{3}\cdot t^3\cdot\vec{\kappa} \Rightarrow \vec{r}(1) = \vec{i} + \vec{j} + \frac{2}{3}\cdot\vec{\kappa}$

και $\vec{r}\,'(t) = \vec{i} + 2t\cdot\vec{j} + 2t^2\cdot\vec{\kappa} \Rightarrow \vec{r}\,'(1) = \vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{\kappa}$ και $\left|\vec{r}\,'(1)\right| = \sqrt{1+4+4} = 3$.

Άρα : $\vec{\varepsilon} = \left(1,\ 1,\ \frac{2}{3}\right) + \lambda\cdot\frac{(1,\ 2,\ 2)}{3} = \left(1,\ 1,\ \frac{2}{3}\right) + \lambda\cdot\left(\frac{1}{3},\ \frac{2}{3},\ \frac{2}{3}\right)$, δηλαδή είναι η ευθεία που διέρχεται από το σημείο $M\left(1,\ 1,\ \frac{2}{3}\right)$ και είναι παράλληλη στο διάνυσμα $\vec{\varepsilon}_M = \left(\frac{1}{3},\ \frac{2}{3},\ \frac{2}{3}\right)$, ή αλλιώς σε μη διανυσματική μορφή, η ευθεία που ικανοποιεί τις σχέσεις : $\frac{x-1}{1/3} = \frac{y-1}{2/3} = \frac{z-2/3}{2/3}$. Τέλος, το κάθετο επίπεδο θα έχει διανυσματική εξίσωση :

$$\left[(x,\ y,\ z) - \left(1,\ 1,\ \frac{2}{3}\right)\right]\cdot\left(\frac{1}{3},\ \frac{2}{3},\ \frac{2}{3}\right) = 0, \text{ ή } (x-1)\cdot\frac{1}{3} + (y-1)\cdot\frac{2}{3} + \left(z - \frac{2}{3}\right)\cdot\frac{2}{3} = 0.$$

2.2. ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ κ.λ.π., ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΠΟΛΛΩΝ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ.

Οι έννοιες της μερικής παραγώγου κ.λ.π., στις πολυμεταβλητές πραγματικές συναρτήσεις, μεταφέρονται ανάλογα και στις πολυμεταβλητές διανυσματικές συναρτήσεις. Έτσι, έχουμε :

Έστω η διανυσματική συνάρτηση δύο ή περισσότερων (ανεξάρτητων πραγματικών) μεταβλητών, όπως :

$\vec{f} : A \subseteq \Re^3 \to \Re^3$, $\left[\text{γενικά, } \vec{f} : \Re^{\nu} \to \Re^{\nu}, (\nu, \mu \in N, \nu > 1, \mu > 1)\right]$,

δηλαδή, $\vec{f} : (x,\ y,\ z) \in A \subseteq \Re^3 \to \vec{f}(x,\ y,\ z) = (f_1,\ f_2,\ f_3) =$

$$= \left[f_1 \cdot (x,\ y,\ z) \cdot \vec{i} + f_2 \cdot (x,\ y,\ z) \cdot \vec{j} + f_3 \cdot (x,\ y,\ z) \cdot \vec{\kappa} \right] \in \Re^3.$$

Ονομάζουμε μερικές παραγώγους της $\vec{f}$, ως προς x, y, z, αντίστοιχα :

$$\frac{\partial \vec{f}}{\partial x} = \vec{f}_x{}'(x,\ y,\ z) \overset{\text{ορ.}}{=} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\vec{f}(x+\Delta x,\ y,\ z) - \vec{f}(x,\ y,\ z)}{\Delta x} = \frac{\partial f_1}{\partial x} \cdot \vec{i} + \frac{\partial f_2}{\partial x} \cdot \vec{j} + \frac{\partial f_3}{\partial x} \cdot \vec{\kappa},$$

$$\frac{\partial \vec{f}}{\partial y} = \vec{f}_y{}'(x,\ y,\ z) \overset{\text{ορ.}}{=} \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\vec{f}(x,\ y+\Delta y,\ z) - \vec{f}(x,\ y,\ z)}{\Delta y} = \frac{\partial f_1}{\partial y} \cdot \vec{i} + \frac{\partial f_2}{\partial y} \cdot \vec{j} + \frac{\partial f_3}{\partial y} \cdot \vec{\kappa},$$

$$\frac{\partial \vec{f}}{\partial z} = \vec{f}_z{}'(x,\ y,\ z) \overset{\text{ορ.}}{=} \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\vec{f}(x,\ y,\ z+\Delta z) - \vec{f}(x,\ y,\ z)}{\Delta z} = \frac{\partial f_1}{\partial z} \cdot \vec{i} + \frac{\partial f_2}{\partial z} \cdot \vec{j} + \frac{\partial f_3}{\partial z} \cdot \vec{\kappa}.$$

Όμοια ορίζουμε και εννοούμε τις παραγώγους ανώτερης τάξης μιας διανυσματικής συνάρτησης πολλών μεταβλητών, όπως :

$$\frac{\partial^2 \vec{f}(x,\ y,\ z)}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \cdot \left(\frac{\partial \vec{f}}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 f_1(x,\ y,\ z)}{\partial x^2} \cdot \vec{i} + \frac{\partial^2 f_2(x,\ y,\ z)}{\partial x^2} \cdot \vec{j} + \frac{\partial^2 f_3(x,\ y,\ z)}{\partial x^2} \cdot \vec{\kappa},$$

ή $\dfrac{\partial^2 \vec{f}(x,\ y)}{\partial x \cdot \partial y} = \dfrac{\partial^2 f_1(x,\ y)}{\partial x \cdot \partial y} \cdot \vec{i} + \dfrac{\partial^2 f_2(x,\ y)}{\partial x \cdot \partial y} \cdot \vec{j} + \dfrac{\partial^2 f_3(x,\ y)}{\partial x \cdot \partial y} \cdot \vec{\kappa}$, κ.λ.π.,

καθώς, ανάλογα μεταφέρονται και ορίζονται τα διαφορικά (1ης, ή ανώτερης τάξης) μιας διανυσματικής πολυμεταβλητής συνάρτησης, όπως :

$$d\vec{f}(x,\ y) = \frac{\partial \vec{f}}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial \vec{f}}{\partial y} \cdot dy,\quad d^2 \vec{f}(x,\ y) = \frac{\partial^2 \vec{f}}{\partial x^2} \cdot dx^2 + 2\frac{\partial^2 \vec{f}}{\partial x \cdot \partial y} \cdot dx \cdot dy + \frac{\partial^2 \vec{f}}{\partial y^2} \cdot dy^2, \text{ κ.λ.π.}$$

π.χ.

Να υπολογιστούν οι μερικές παράγωγοι $\dfrac{\partial \vec{f}}{\partial x}$, $\dfrac{\partial \vec{f}}{\partial y}$, όταν :

$$\boldsymbol{f(x,\ y) = \sigma\upsilon\nu(xy) \cdot \vec{i} + (3xy - 2x^2) \cdot \vec{j} - (3x + 2y) \cdot \vec{\kappa}.}$$

Λύση

Πρόκειται για διανυσματική συνάρτηση απ' τον $\Re^2$ στον $\Re^3$ (δηλαδή με πεδίο ορισμού το $\Re^2$ και τιμές στον $\Re^3$), οπότε κατά τα προαναφερθέντα :

$$\frac{\partial \vec{f}}{\partial x} = \frac{\partial(\sigma\upsilon\nu\, xy)}{\partial x} \cdot \vec{i} + \frac{\partial(3xy - 2x^2)}{\partial x} \cdot \vec{j} + \frac{\partial(-3x - 2y)}{\partial x} \cdot \vec{\kappa} =$$

$$= -y \cdot \eta\mu(xy) \cdot \vec{i} + (3y - 4x) \cdot \vec{j} - 3\vec{\kappa},$$

$$\frac{\partial \vec{f}}{\partial y}=\frac{\partial(\sigma\upsilon\nu xy)}{\partial y}\cdot\vec{i}+\frac{\partial(3xy-2x^2)}{\partial y}\cdot\vec{j}+\frac{\partial(-3x-2y)}{\partial y}\cdot\vec{\kappa}=$$

$$=-x\cdot\eta\mu(xy)\cdot\vec{i}+3x\cdot\vec{j}-2\vec{\kappa}.$$

2.2.1. ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ - ΣΥΜΠΛΗΡΩΜΑΤΑ.

α) Στα προβλήματα των πρακτικών εφαρμογών και κύρια της φυσικής, που αναφέρονται σε αριθμητικά ή διανυσματικά πεδία, είναι σημαντικό να γνωρίζουμε τον τρόπο που μεταβαίνουμε από ένα σημείο σ' ένα άλλο.

Στην περίπτωση της μιας διάστασης, αυτό γίνεται γνωστό απ' τις μεταβολές της παραγώγου, ενώ για πεδία περισσότερων της μίας διαστάσεων χρησιμοποιούμε, ως γνωστό, τις μερικές παραγώγους.

Γνωρίζουμε ότι, όταν σχηματίζουμε μια μερική παράγωγο, θεωρούμε το πεδίο σαν συνάρτηση μιας μεταβλητής, αφού τις άλλες μεταβλητές τις θεωρούμε σταθερές κατά τη μερική παραγώγιση. Δηλαδή, κάθε μερική παράγωγος παριστάνει το συντελεστή μεταβολής του πεδίου κατά τη διεύθυνση του αντίστοιχου - προς τη μεταβλητή που παραγωγίζουμε - άξονα συντεταγμένων. Μ' άλλα λόγια, η γνωστή μερική παραγώγιση, μας περιορίζει στη μελέτη της μεταβολής της συνάρτησης, μόνο κατά τη διεύθυνση των αξόνων x'x, y'y, z'z, κ.λ.π., του συστήματος συντεταγμένων. Είναι όμως εύλογο αλλά και πρακτικά αναγκαίο ν' αναζητήσουμε την εύρεση μιας ευρύτερης έννοιας της παραγώγου, που δε θα μας περιορίζει στις ειδικές μόνο διευθύνσεις των αξόνων, αλλά να μας παρέχει τη δυνατότητα της μελέτης της συμπεριφοράς του πεδίου, προς οποιαδήποτε διεύθυνση, ο σκοπός αυτός θα μας οδηγήσει στα αμέσως επόμενα μαθήματα στην εξέταση της έννοιας "της κατευθυνόμενης κατά διάνυσμα παραγώγου", κ.λ.π.

β) **<u>Επικαμπύλια Ολοκληρώματα.</u>**

Έστω μια καμπύλη $\Gamma=\overset{\frown}{AB}$ του $\Re^3$, με διανυσματική εξίσωση :

$\vec{r}(t)=(x(t),\ y(t),\ z(t))$ με $t\in[\alpha,\ \beta]$, που βρίσκεται στο διανυσματικό πεδίο :

$$\vec{F}(\vec{r})=\left(\vec{F_1}(\vec{r}),\ \vec{F_2}(\vec{r}),\ \vec{F_3}(\vec{r})\right),\text{ ή}$$

$$\vec{F}(x,\ y,\ z)=F_1(x,\ y,\ z)\cdot\vec{i}+F_2(x,\ y,\ z)\cdot\vec{j}+F_3(x,\ y,\ z)\cdot\vec{\kappa},$$

(ή αλλιώς : $\vec{F}:\Gamma\subseteq\Re^3\to\Re^3$, μια συνεχής διανυσματική συνάρτηση με πεδίο ορισμού το Γ).

Ονομάζουμε **επικαμπύλιο ολοκλήρωμα** $\int_\Gamma \vec{F}\cdot d\vec{r}$ της διανυσματικής συνάρτησης $\vec{F}$ κατά μήκος της καμπύλης $\Gamma=\overset{\frown}{AB}$, το ορισμένο ολοκλήρωμα :

$$\boxed{\int_\Gamma \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_\alpha^\beta \vec{F}\left(\vec{r}(t)\right)\cdot \vec{r}\,'(t)\cdot dt = \int_\alpha^\beta \vec{F}(x(t),\ y(t),\ z(t))\cdot \vec{r}\,'(t)\cdot dt}, \ (1),$$

$$\boxed{\text{ή και αλλιώς : } \int_{\vec{r}} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_{\Gamma=\overset{\frown}{AB}} F_1\cdot dx + F_2\cdot dy + F_3\cdot dz}.$$

Αν η καμπύλη $\Gamma \equiv \overset{\frown}{AB}$ είναι κλειστή, (δηλαδή $A \equiv B$), τότε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα συμβολίζεται : $\oint_\Gamma \vec{F}\cdot d\vec{r}$, όπου η ολοκλήρωση εννοείται ότι εκτελείται για μία και μόνο πλήρη περιστροφή. Η αλλαγή της φοράς που γίνεται η ολοκλήρωση, αλλάζει μόνο το πρόσημο του αποτελέσματος, δηλαδή $\int_{(-\Gamma)} = -\int_\Gamma$.
Επίσης, κατά μήκος μιας κλειστής καμπύλης Γ, το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα είναι ανεξάρτητο της αρχής.

Εξάλλου, είναι γνωστό ότι το $\vec{F}\cdot d\vec{r}$, παριστάνει το έργο του διανύσματος $\vec{F}$ όταν αυτό μετακινηθεί κατά διάνυσμα $d\vec{r}$ στην καμπύλη Γ. Άρα το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα $\int_\Gamma \vec{F}\cdot d\vec{r}$ παριστάνει το παραγόμενο έργο του $\vec{F}$ κατά τη μετακίνησή του πάνω στην καμπύλη Γ.

Τέλος, το προαναφερόμενο επικαμπύλιο ολοκλήρωμα $\int_\Gamma \vec{F}\left(\vec{r}\right)\cdot d\vec{r}$, όπου δηλαδή $\vec{F}$ είναι διανυσματική συνάρτηση, λέγεται και επικαμπύλιο ολοκλήρωμα **β' είδους,** σε αντίθεση με το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα $\int_\Gamma f\left(\vec{r}\right)\cdot ds$, όπου f είναι πραγματική συνάρτηση που λέγεται **α' είδους,** οπότε :

$$\boxed{\int_\Gamma f\cdot ds = \int_\alpha^\beta f\left(\vec{r}(t)\right)\cdot\left|\vec{r}\,'(t)\right|\cdot dt = \int_\alpha^\beta f(x(t),\ y(t),\ z(t))\cdot\left|\vec{r}\,'(t)\right|\cdot dt} \ (2).$$

π.χ.

1) Να υπολογιστεί το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα $\int_\Gamma \frac{-y}{x^2+y^2}\cdot dx + \frac{x}{x^2+y^2}\cdot dy$, ***κατά μήκος της καμπύλης Γ :*** $\vec{r}(t) = (\sigma\upsilon\nu t,\ \eta\mu t),\ t \in [0,\ 2\pi]$.

Λύση

Επειδή $\vec{F}(x,\ y) = \left(\frac{-y}{x^2+y^2},\ \frac{x}{x^2+y^2}\right)$, ή αλλιώς

$$\vec{F}\left(\vec{r}(t)\right) = \left[F_1(x(t),\ y(t)),\ F_2(x(t),\ y(t))\right] =$$

$$=\left[\frac{-\eta\mu t}{\sigma\upsilon\nu^2 t+\eta\mu^2 t},\ \frac{\sigma\upsilon\nu t}{\sigma\upsilon\nu^2 t+\eta\mu^2 t}\right]=[-\eta\mu t,\ \sigma\upsilon\nu t],$$

άρα κατά τον (1) : $\int_\Gamma \vec{F}\left(\vec{r}(t)\right)\cdot d\vec{r}=\int_0^{2\pi}\vec{F}\left(\vec{r}(t)\right)\cdot\vec{r}\,'(t)\cdot dt=$

$$=\int_0^{2\pi}\left(-\eta\mu t\cdot\vec{i}+\sigma\upsilon\nu t\cdot\vec{j}\right)\cdot\left(-\eta\mu t\cdot\vec{i}+\sigma\upsilon\nu t\cdot\vec{j}\right)\cdot dt=$$

$$=\int_0^{2\pi}\left(\eta\mu^2 t+\sigma\upsilon\nu^2 t\right)\cdot dt=\int_0^{2\pi}dt=2\pi.$$

2) Να υπολογιστεί το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα :

$$\int_\Gamma xy\cdot dx+(x+y)\cdot dy+\sigma\upsilon\nu z\cdot dz,$$ ***κατά μήκος της καμπύλης***

$$\Gamma:\ \vec{r}(t)=\left(e^t,\ \eta\mu t,\ t^3\right)\ \mu\varepsilon\ t\in[0,\ \pi].$$

Λύση

Είναι $\vec{F}(x,\ y,\ z)=(xy,\ x+y,\ \sigma\upsilon\nu z)$ και

$\vec{F}\left(\vec{r}(t)\right)=\left(e^t\cdot\eta\mu t,\ e^t+\eta\mu t,\ \sigma\upsilon\nu t^3\right)$, ενώ $\vec{r}\,'(t)=\left(e^t,\ \sigma\upsilon\nu t,\ 3t^2\right)$, άρα κατά τον (1) :

$$\int_\Gamma \vec{F}\left(\vec{r}(t)\right)\cdot d\vec{r}=\int_0^{\pi}\underbrace{\left(e^t\cdot\eta\mu t,\ e^t+\eta\mu t,\ \sigma\upsilon\nu t^3\right)}_{\vec{F}\left(\vec{r}(t)\right)}\cdot\underbrace{e^t,\ \sigma\upsilon\nu t,\ 3t^2}_{\vec{r}\,'(t)}\cdot dt=$$

$$=\int_0^{\pi}\left(e^{2t}\cdot\eta\mu t+e^t\cdot\sigma\upsilon\nu t+\eta\mu t\cdot\sigma\upsilon\nu t+3t^2\cdot\sigma\upsilon\nu t^3\right)\cdot dt=$$

$$=\left(e^{2t}\cdot\frac{2\eta\mu t-\sigma\upsilon\nu t}{5}+e^t\cdot\frac{\sigma\upsilon\nu t+\eta\mu t}{2}+\frac{\eta\mu^2 t}{2}+\eta\mu t^3\right)\Bigg|_0^{\pi}=\frac{e^{2\pi}+1}{5}-\frac{e^{\pi}+1}{2}+\eta\mu\pi^3.$$

3) Να υπολογιστεί το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα $\int_\Gamma\left(xy+z^2\right)\cdot dz$, ***όπου :***

$$\Gamma:\ \vec{r}(t)=(\eta\mu t,\ \sigma\upsilon\nu t,\ t),\ t\in[0,\ 2\pi].$$

Λύση

Εδώ πρόκειται για επικαμπύλιο ολοκλήρωμα α΄ είδους, αφού $f(x,\ y,\ z)=xy+z^2$,

ενώ, $\left|\vec{r}\,'(t)\right|=\sqrt{\sigma\upsilon\nu^2 t+(-\eta\mu t)^2+1^2}=\sqrt{2}$. Άρα, κατά τον (2) :

166

$$\int_{\Gamma} f \cdot ds = \int_{\alpha}^{\beta} f\left(\vec{r}(t)\right) \cdot \left|\vec{r}\,'(t)\right| \cdot dt = \int_{0}^{2\pi} \underbrace{\left(\eta\mu t \cdot \sigma\upsilon\nu t + t^2\right)}_{f\left(\vec{r}(t)\right)} \cdot \sqrt{2} \cdot dt =$$

$$= \sqrt{2} \cdot \left(\frac{\eta\mu^2 t}{2} + \frac{t^3}{3}\right)\Bigg|_{0}^{2\pi} = \frac{8 \cdot \sqrt{2} \cdot \pi^3}{3}.$$

Καθηγητής Γιάννης Θεοδώρου
Δρ. Μαθηματικός-Στατιστικός

3. ΚΛΙΣΗ ΒΑΘΜΩΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ (gradf ή ∇f) - ΑΝΑΔΕΛΤΑ (grad ή ∇)

Έστω μια βαθμωτή (αριθμητική) συνάρτηση $f(x, y, z)$, δηλαδή, $f:(x, y, z)\in A\subseteq\Re^3\to f(x, y, z)\in\Re$, με μερικές παραγώγους 1ης τάξης, συνεχείς.

Ονομάζουμε **κλίση** της βαθμωτής συνάρτησης $f(x, y, z)$ και τη συμβολίζουμε με gradf ή ∇f, το διάνυσμα :

$$\boxed{\text{gradf} = \nabla f = \left(\frac{\partial}{\partial x}\cdot\vec{i}+\frac{\partial}{\partial y}\cdot\vec{j}+\frac{\partial}{\partial z}\cdot\vec{\kappa}\right)\cdot f}, \quad (1).$$

[ή ισοδύναμα, $\text{gradf}=\nabla f=\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\vec{i}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\vec{j}+\frac{\partial f}{\partial z}\cdot\vec{\kappa}=\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right)$, όπου $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{\kappa}$, μοναδιαία διανύσματα (βάση) του ευκλείδειου διανυσματικού χώρου $\Re^3$, σε καρτεσιανές συντεταγμένες].

Το σύμβολο ∇ (ή grad), δηλαδή $\boxed{\nabla \overset{\text{ορ.}}{=} \frac{\partial}{\partial x}\cdot\vec{i}+\frac{\partial}{\partial y}\cdot\vec{j}+\frac{\partial}{\partial z}\cdot\vec{\kappa}}$, (2), συχνά χρησιμοποιούμενο στη διανυσματική ανάλυση, λέγεται **ανάδελτα** (ή τελεστής του Hamilton ή Nabla).

Το ανάδελτα μπορεί να θεωρηθεί (τυπικά) σα διάνυσμα, γι αυτό αρκετές φορές συμβολίζεται και $\vec{\nabla}$.

Στην ουσία όμως πρόκειται για ένα τελεστή, που όταν εφαρμόζεται επί μιας κατάλληλης συνάρτησης τελεί πάνω της την πράξη της διανυσματικής παραγώγισης, γι αυτό λέγεται και **διανυσματικός - διαφορικός τελεστής,** (όπως ανάλογα, ο γνωστός διαφορικός τελεστής $D=\frac{d}{dx}$, προ μιας παραγωγίσιμης συνάρτησης $f(x)$, τελεί πάνω της την πράξη της παραγώγισης : $Df(x)=\frac{df(x)}{dx}=f'(x)$.

Το ανάδελτα του τύπου (2) αναφέρεται στο χώρο $\Re^3$, δηλαδή, $f:A\subseteq\Re^3\to\Re$. Ανάλογα επεκτείνεται και για το χώρο $\Re^\nu$, ενώ όταν το πεδίο είναι "επίπεδο" $(\Re^2)$, έχουμε :

$$\text{grad } f(x, y)=\nabla f(x, y)=\left(\frac{\partial}{\partial x}\cdot\vec{i}+\frac{\partial}{\partial y}\cdot\vec{j}\right)\cdot f=\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\vec{i}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\vec{j}.$$

Παρατηρήσεις :

1) Είναι φανερό, ότι το ανάδελτα (∇ ή grad) που έχει χαρακτήρα διανύσματος (τυπικά), όταν εφαρμόζεται προ μιας βαθμωτής (αριθμητικής) συνάρτησης τη μετατρέπει σε διανυσματική συνάρτηση.

   Εξάλλου, το ίδιο το ∇ μόνο του δεν έχει αριθμητική σημασία, την αποκτά όμως όταν εφαρμόζεται σε μια συνάρτηση. Πρόκειται δηλαδή, για έναν τελεστή και μάλιστα "διπλής φύσης", διανυσματικής και διαφορικής ταυτόχρονα.

Σχετικά με το ∇, ισχύουν οι ιδιότητες :

α) $\nabla(\lambda \cdot f) = \lambda \cdot (\nabla f)$, όπου $f : \Re^3 \to \Re$ και λ = σταθ,,

β) $\nabla f = 0$, όταν $f(x,\ y,\ z) = C =$ σταθ.,

γ) $\nabla(f + g) = \nabla f + \nabla g,\ \ g : \Re^3 \to \Re$,

δ) $\nabla(f \cdot g) = f \cdot (\nabla g) + g \cdot (\nabla f)$,

ε) $\nabla\left(\dfrac{f}{g}\right) = \dfrac{g(\nabla f) - f(g\nabla)}{g^2}$, όπου $g(x,\ y,\ z) \neq 0$.

2) Έστω μια βαθμωτή συνάρτηση, $f : (x,\ y,\ z) \in \Re^3 \to f(x,\ y,\ z) \in \Re$. Τα σημεία $(x,\ y,\ z) \in \Re^3$ που αντιστοιχούν στην ίδια τιμή C, δηλαδή έχουν την ίδια εικόνα
ισούψεις-
$f(x,\ y,\ z) = C \in \Re$, σχηματίζουν τις λεγόμενες **ισοσταθμικές ή ισοβαρείς επιφάνειες** $f(x,\ y,\ z) = C$. Όμοια, τα σημεία $(x,\ y) \in \Re^2$ που αντιστοιχούν στην ίδια τιμή $C \in \Re$, που δημιουργούν ανάλογα τις **ισοσταθμικές ή ισοβαρείς γραμμές (καμπύλες)** $f(x,\ y) = C$.

[Μια ισοσταθμική επιφάνεια ή γραμμή, ανάλογα με το φυσικό μέγεθος που περιγράφει παίρνει και τ' όνομά της, π.χ. ισόθερμη επιφάνεια ή ισόθερμη καμπύλη όταν περιγράφεται θερμοκρασία, υψομετρική καμπύλη (σε μεγέθη της Τοπογραφίας, Χαρτογραφίας και Οδοποιίας), ισοδυναμική επιφάνεια, πεζομετρική επιφάνεια, κ.λ.π.].

Αποδεικνύεται σχετικά ότι ισχύει :

Η κλίση της $f(x,\ y,\ z)$ σ' ένα σημείο $M(x_o,\ y_o,\ z_o)$, δηλαδή η $\nabla f(x_o,\ y_o,\ z_o)$, είναι **γεωμετρικά,** ένα διάνυσμα κάθετο επί της ισοσταθμικής επιφάνειας $f(x,\ y,\ z) = f(x_o,\ y_o,\ z_o) = C \in \Re$ στο σημείο της, $M(x_o,\ y_o,\ z_o)$.

Γενικά λοιπόν, η κλίση ∇f, είναι κάθετη στις ισοδυναμικές επιφάνειες (Διάνυσμα κάθετο σε σημείο Μ μιας επιφάνειας, σημαίνει το διάνυσμα που είναι κάθετο στο εφαπτόμενο επίπεδο της επιφάνειας στο σημείο Μ).

Εξάλλου, η ∇f διευθύνεται προς την κατεύθυνση όπου η f αυξάνεται με μεγαλύτερο ρυθμό.

3) **Κατευθυνόμενη Παράγωγος κατά διάνυσμα, βαθμωτής συνάρτησης :**

Ονομάζουμε κατευθυνόμενη παράγωγο κατά διάνυσμα $\vec{\alpha}$ (ή ως προς ορισμένη διεύθυνση) μιας βαθμωτής συνάρτησης f, την παράσταση :

$$\boxed{\frac{df}{d\vec{\alpha}} = \vec{n} \cdot (\nabla f)},\ (3),$$

όπου $\vec{n}$, η διανυσματική μανάδα κατά τη διεύθυνση του διανύσματος $\vec{a}$, δηλαδή ως γνωστό : $\boxed{\vec{n} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}}$, (3α).

Η κατευθυνόμενη παράγωγος κατά διάνυσμα μιας βαθμωτής συνάρτησης, είναι **γενίκευση** της έννοιας της μερικής παραγώγου μιας συνάρτησης πολλών μεταβλητών και μας δίνει τη μεταβολή, τη συμπεριφορά δηλαδή του πεδίου, προς την κατεύθυνση του διανύσματος.

Άρα η κατευθυνόμενη παράγωγος, μας δίνει τη δυνατότητα να μελετάμε τη συμπεριφορά ενός πεδίου προς κάθε κατεύθυνση (σε διάκριση απ' τις μερικές παραγώγους, που μας "πληροφορούν" μόνο ως προς τη διεύθυνση του αντίστοιχου - προς τη μεταβλητή που παραγωγίζουμε - άξονα συντεταγμένων).

Όμοια, μπορούμε να μιλάμε, για την κατευθυνόμενη παράγωγο μιας βαθμωτής συνάρτησης f, κατά διάνυσμα $\vec{a}$, **σ' ένα σημείο M** του πεδίου της f, δηλαδή :

$$\boxed{\frac{df(M)}{d\vec{a}} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} \cdot (\nabla f(M))}, \text{ (3β)}.$$

Τέλος, αποδεικνύεται ότι : Η $\frac{df(M)}{d\vec{a}}$, έχει μέγιστο όταν $\vec{a} = \nabla f$, με μέγιστη τιμή της $\frac{df(M)}{d\vec{a}}$ το $|\nabla f|$, ενώ η κατευθυνόμενη παράγωγος κατά διάνυσμα που εφάπτεται σε ισοσταθμική καμπύλη, είναι μηδέν.

π.χ.

Να δειχτεί ότι η κατευθυνόμενη παράγωγος μιας βαθμωτής συνάρτησης $f(x, y, z)$ κατά τη διεύθυνση ενός άξονα συντεταγμένων, έστω τον Ox, είναι η μερική παράγωγος της f ως προς την αντίστοιχη μεταβλητή x.

Λύση

Πράγματι, κατά τον (3), όπου $\vec{a} = \vec{n} = \vec{i}$, ($\vec{i}$ είναι η διανυσματική μονάδα ως προς τον άξονα Ox), θα πάρουμε :

$$\frac{df(x, y, z)}{d\vec{i}} = \vec{i}(\nabla f) = \vec{i} \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial x} \cdot \vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot \vec{\kappa} \right) = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \vec{i}^2 = \frac{\partial f}{\partial x},$$ (αφού $\vec{i}^2 = 1$, $\vec{i}\,\vec{f} = 0$, $\vec{i} \cdot \vec{\kappa} = ...$).

Άρα πράγματι, η κατευθυνόμενη παράγωγος κατά $\vec{a}$, είναι γενίκευση της μερικής παραγώγου μιας συνάρτησης πολλών μεταβλητών.

Όμοια, βρίσκουμε : $\dfrac{\delta f(x, y, z)}{d\vec{j}} = \dfrac{\partial f}{\partial y}$ και $\dfrac{d f(x, y, z)}{d\vec{\kappa}} = \dfrac{\partial f}{\partial z}$.

Παραδείγματα (στην κλίση) :

1) Να βρεθεί το ∇f, στο σημείο $M(2, -1, 1)$, όταν $f(x, y, z) = x^2yz^3$.

Λύση

$$\nabla f = \operatorname{grad} f \overset{\text{ορ.}}{=} \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\cdot\vec{\kappa} = \frac{\partial(x^2yz^3)}{\partial x}\cdot\vec{i} + \frac{\partial(x^2yz^3)}{\partial y}\cdot\vec{j} +$$

$$+\frac{\partial(x^2yz^3)}{\partial z}\cdot\vec{\kappa} = 2xyz^3\cdot\vec{i} + x^2z^3\cdot\vec{j} + 3x^2yz^2\cdot\vec{\kappa}.$$

Οπότε θέτοντας τις συντεταγμένες του $M(2,-1,1)$, δηλαδή $x=2$, $y=-1$, $z=1$, έχουμε :

$$\operatorname{grad} f(M) = \nabla f(2,-1,1) = 2\cdot 2\cdot(-1)\cdot 1^3\cdot\vec{i} + 2^2\cdot 1^3\cdot\vec{j} + 3\cdot 2^2\cdot(-1)\cdot 1^2\cdot\vec{\kappa} =$$

$$= -4\cdot\vec{i} + 4\cdot\vec{j} - 12\cdot\vec{\kappa}.$$

2) Να βρεθεί η κλίση της $\varphi(x, y) = x^2 - 3xy + y^3$.

Λύση

$$\operatorname{grad}\varphi = \nabla\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\cdot\vec{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\cdot\vec{j} = (2x-3y)\cdot\vec{i} + (-3x+3y^2)\cdot\vec{j}.$$

3) Να βρεθεί η κατευθυνόμενη παράγωγος της συνάρτησης $f(x, y, z) = x^2yz + 4xz^2$, κατά τη διεύθυνση του διανύσματος $\vec{a} = \left(2\cdot\vec{i} - \vec{j} - 2\cdot\vec{\kappa}\right)$, στο σημείο $M(1, -2, -1)$.

Λύση

Η ζητούμενη κατευθυνόμενη παράγωγος, θα είναι : $\dfrac{d f(x, y, z)}{d\vec{a}} = \vec{n}\cdot\operatorname{grad} f$,

όπου $\vec{n} = \dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \dfrac{2\cdot\vec{i} - \vec{j} - 2\cdot\vec{\kappa}}{\sqrt{2^2+(-1)^2+(-2)^2}} = \dfrac{2\cdot\vec{i} - \vec{j} - 2\cdot\vec{\kappa}}{3} = \dfrac{2}{3}\cdot\vec{i} - \dfrac{1}{3}\cdot\vec{j} - \dfrac{2}{3}\cdot\vec{\kappa}$,

και $\operatorname{grad} f = \nabla f = \dfrac{\partial\varphi}{\partial x}\cdot\vec{i} + \dfrac{\partial f}{\partial y}\cdot\vec{j} + \dfrac{\partial f}{\partial z}\cdot\vec{\kappa} =$

$$= (2xyz + 4z^2)\cdot\vec{i} + x^2z\cdot\vec{j} + (x^2y + 8xz)\cdot\vec{\kappa}.$$

Άρα : $\dfrac{df}{d\vec{\alpha}} = \vec{n}\cdot\nabla f = \dfrac{4}{3}\cdot xyz + \dfrac{8}{3}\cdot z^2 - \dfrac{1}{3}\cdot x^2z - \dfrac{2}{3}\cdot x^2y - \dfrac{16}{3}\cdot xz,$

οπότε για το σημείο $M(1,\ -2,\ -1)$, δηλαδή για $x=1,\ y=-2,\ z=-1$, παίρνουμε τελικά : $\dfrac{df(x,\ y,\ z)}{d\vec{\alpha}} = \dfrac{df(1,\ -2,\ -1)}{d\vec{\alpha}} = \ldots = \dfrac{37}{3}.$

$\left(\Phi(x,y,z)=4\right.$

4) Να βρεθεί το μοναδιαίο διάνυσμα που είναι κάθετο στην επιφάνεια, στο σημείο $M(2,\ -2,\ 3)$.

Λύση

Επειδή η επιφάνεια Φ εκφράζεται από σταθερή συνάρτηση, δηλαδή $\Phi(x,\ y,\ z)=4$, άρα η Φ πρόκειται για ισοσταθμική επιφάνεια.

Είναι γνωστό, ότι γενικά η κλίση (∇f) είναι κάθετη στις ισοσταθμικές επιφάνειες.

Άρα εδώ μας ζητείται το διάνυσμα της κλίσης της Φ στο σημείο $M(2,\ -2,\ 3)$ και κατ' επέκταση το μοναδιαίο διάνυσμα της $\nabla\Phi(M)$, δηλαδή το $\vec{n} = \dfrac{\nabla\Phi(M)}{|\nabla\Phi(M)|}$.

Έτσι διαδοχικά βρίσκουμε :

$$\nabla\Phi(x,\ y,\ z) = \text{grad}\,\Phi(x,\ y,\ z) = \frac{\partial(x^2y+2xz)}{\partial x}\cdot\vec{i} + \frac{\partial(x^2y+2xz)}{\partial y}\cdot\vec{j} + \frac{\partial(x^2y+2xz)}{\partial z}\cdot\vec{\kappa} =$$

$= (2xy+2z)\cdot\vec{i} + x^2\cdot\vec{j} + 2x\cdot\vec{\kappa}$, οπότε

$\nabla\Phi(M) = \nabla\Phi(2,\ -2,\ 3) = -2\cdot\vec{i} + 4\cdot\vec{j} + 4\cdot\vec{\kappa}$ και

$|\nabla\Phi(M)| = \sqrt{(-2)^2+4^2+4^2} = \sqrt{36} = 6.$

Άρα τελικά, το ζητούμενο μοναδιαίο διάνυσμα $\vec{n}$, είναι :

$$\vec{n} = \frac{\nabla\Phi(M)}{|\nabla\Phi(M)|} = \frac{-2\cdot\vec{i}+4\cdot\vec{j}+4\cdot\vec{\kappa}}{6} = -\frac{1}{3}\cdot\vec{i} + \frac{2}{3}\cdot\vec{j} + \frac{2}{3}\cdot\vec{\kappa}.$$

****5) Αν $\Phi(x,\ y,\ z)=\vec{c}\cdot\vec{v}$, όπου $\vec{c}=(c_1,\ c_2,\ c_3)$ σταθερό διάνυσμα και $\vec{v}=(x,\ y,\ z)$ τυχαίο διάνυσμα του πεδίου Φ, να δειχτεί ότι : $\text{grad}\,\Phi=\vec{c}$.***

Λύση

Είναι : $\text{grad}\,\Phi = \nabla\Phi = \dfrac{\partial\Phi}{\partial x}\cdot\vec{i} + \dfrac{\partial\Phi}{\partial y}\cdot\vec{j} + \dfrac{\partial\Phi}{\partial z}\cdot\vec{\kappa} =$

$$= \frac{\partial\left(\vec{c}\cdot\vec{v}\right)}{\partial x}\cdot\vec{i} + \frac{\partial\left(\vec{c}\cdot\vec{v}\right)}{\partial y}\cdot\vec{j} + \frac{\partial\left(\vec{c}\cdot\vec{v}\right)}{\partial z}\cdot\vec{\kappa} =$$

$$= \frac{\partial(c_1x + c_2y + c_3z)}{\partial x}\cdot\vec{i} + \frac{\partial(c_1x + c_2y + c_3z)}{\partial y}\cdot\vec{j} + \frac{\partial(c_1x + c_2y + c_3z)}{\partial z}\cdot\vec{\kappa} =$$

$$= c_1\cdot\vec{i} + c_2\cdot\vec{j} + c_3\cdot\vec{\kappa} = \vec{c}.$$

6) Να δειχτεί ότι :

α) $\boldsymbol{grad(f+g) = grad(f) + grad(g)}$ ***και***

β) $\boldsymbol{grad(f\cdot g) = f\cdot grad(g) + g\cdot grad(f)}$,

όπου f και g, πραγματικές (βαθμωτές) συναρτήσεις απ' το $\mathfrak{R}^3$ ***στο*** $\mathfrak{R}$.

Λύση

α) $\operatorname{grad}(f+g) = \nabla(f+g) = \left(\frac{\partial}{\partial x}\cdot\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\cdot\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\cdot\vec{\kappa}\right)\cdot(f+g) =$

$$= \frac{\partial(f+g)}{\partial x}\cdot\vec{i} + \frac{\partial(f+g)}{\partial y}\cdot\vec{j} + \frac{\partial(f+g)}{\partial z}\cdot\vec{\kappa} =$$ *(ισχύει η γραμμικότητα στη μερική παραγώγιση)*

$$= \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\vec{i} + \frac{\partial g}{\partial x}\cdot\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\vec{j} + \frac{\partial g}{\partial y}\cdot\vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\cdot\vec{\kappa} + \frac{\partial g}{\partial z}\cdot\vec{\kappa} =$$

$$= \nabla f + \nabla g + \operatorname{grad}(f) + \operatorname{grad}(g).$$

β) Όμοια : $\nabla(f\cdot g) = \left(\frac{\partial}{\partial x}\cdot\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\cdot\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\cdot\vec{\kappa}\right)\cdot(f\cdot g) =$

$$= \frac{\partial(fg)}{\partial x}\cdot\vec{i} + \frac{\partial(fg)}{\partial y}\cdot\vec{j} + \frac{\partial(fg)}{\partial z}\cdot\vec{\kappa} =$$

$$= \left(f\cdot\frac{\partial g}{\partial x} + g\cdot\frac{\partial f}{\partial x}\right)\cdot\vec{i} + \left(f\cdot\frac{\partial g}{\partial y} + g\cdot\frac{\partial f}{\partial y}\right)\cdot\vec{j} + \left(f\cdot\frac{\partial g}{\partial z} + g\cdot\frac{\partial f}{\partial z}\right)\cdot\vec{\kappa} = \ldots = f(\nabla g) + g(\nabla f).$$

7) Να βρεθεί το gradf της $\boldsymbol{f(x,\ y,\ z) = xyz}$, ***στο σημείο*** $\boldsymbol{(5,\ 1,\ 2)}$.

Λύση

$$\operatorname{grad} f = \nabla f = \frac{\partial(xyz)}{\partial x}\cdot\vec{i} + \frac{\partial(xyz)}{\partial y}\cdot\vec{j} + \frac{\partial(xyz)}{\partial z}\cdot\vec{\kappa} =$$

$yz\cdot\vec{i} + xz\cdot\vec{j} + xy\cdot\vec{\kappa}$, οπότε :

$$\operatorname{grad} f(5,\ 1,\ 2) = \nabla f(5,\ 1,\ 2) = 1\cdot 2\cdot\vec{i} + 5\cdot 2\cdot\vec{j} + 5\cdot 1\cdot\vec{\kappa} =$$

$= 2 \cdot \vec{i} + 10 \cdot \vec{j} + 5 \cdot \vec{\kappa}$.

8) ***Να δειχτεί ότι :*** $\nabla\left(ln\left|\vec{V}\right|\right) - \dfrac{\vec{V}}{V^2}$ ***και*** $\nabla\left(\dfrac{1}{\left|\vec{V}\right|}\right) = -\dfrac{\vec{V}}{V^3}$,

όπου $\vec{V} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{\kappa}$.

Λύση

Αντικαθιστώντας $\left|\vec{V}\right| = \left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{1/2}$, κ.λ.π., βρίσκουμε τα ζητούμενα.

9) ***Έστω η ευθεία*** $Ax + By + \Gamma = 0$.

Να βρεθεί το κάθετο μοναδιαίο διάνυσμα στο σημείο $M(0,\ 2)$.

Λύση

Η ευθεία $Ax + By + \Gamma = 0$, μπορεί να θεωρηθεί ως ισοσταθμική γραμμή κάποιου πεδίου $\Phi(x, y)$, ενώ ως γνωστό η κλίση $\nabla\Phi$ είναι διάνυσμα κάθετο σε κάθε σημείο μιας ισοσταθμικής επιφάνειας ή γραμμής. Άρα εδώ ζητείται το μοναδιαίο διάνυσμα κατά τη διεύθυνση του διανύσματος $\nabla\Phi(0, 2)$, δηλαδή το διάνυσμα, $\vec{n} = \dfrac{\nabla\Phi(0, 2)}{\left|\nabla\Phi(0, 2)\right|}$.

Έτσι λοιπόν, διαδοχικά βρίσκουμε :

$$\nabla\Phi(x, y) = \nabla(Ax + By + \Gamma) = \frac{\partial(Ax + By + \Gamma)}{\partial x} \cdot \vec{i} + \frac{\partial(Ax + By + \Gamma)}{\partial y} \cdot \vec{j} = A \cdot \vec{i} + B \cdot \vec{j}, \text{ οπότε}$$

και $\nabla F(0, 2) = A \cdot \vec{i} + B \cdot \vec{j}$,

[*Δηλαδή, οι κάθετες ευθείες σε μια ευθεία στο $\Re^2$, έχουν την ίδια κλίση, δηλαδή είναι παράλληλες μεταξύ τους.*]

$$\text{άρα : } \vec{n} = \frac{\nabla\Phi(0, 2)}{\left|\nabla\Phi(0, 2)\right|} = \frac{\nabla\Phi(x, y)}{\left|\nabla\Phi(x, y)\right|} = \frac{A \cdot \vec{i} + B \cdot \vec{j}}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}} \cdot \vec{i} + \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}} \cdot \vec{j}.$$

10) ***Να βρεθεί το κάθετο μοναδιαίο διάνυσμα στο τυχαίο σημείο του επιπέδου :*** $Ax + By + \Gamma z + \Delta = 0$.

Λύση

Όμοια με την προηγούμενη άσκηση, το δοσμένο επίπεδο είναι μια ισοσταθμική επιφάνεια κάποιου πεδίου $\Phi(x,\ y,\ z)$ και άρα η κλίση $\nabla\Phi$ θα είναι κάθετη στο $\Phi(x,\ y,\ z) = 0$. Οπότε, όπως παραπάνω :

$$\nabla\Phi(x,\ y,\ z) = \nabla(Ax + By + \Gamma z + \Delta) = A\cdot\vec{i} + B\cdot\vec{j} + \Gamma\cdot\vec{\kappa},$$

[*Δηλαδή, οι κάθετες ευθείες σε επίπεδο, έχουν την ίδια κλίση, δηλαδή είναι παράλληλες.*]

και $$\vec{n} = \frac{\nabla\Phi(x,\ y,\ z)}{|\nabla\Phi(x,\ y,\ z)|} = \frac{A\cdot\vec{i} + B\cdot\vec{j} + \Gamma\cdot\vec{\kappa}}{\sqrt{A^2+B^2+\Gamma^2}} =$$

$$= \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+\Gamma^2}}\cdot\vec{i} + \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+\Gamma^2}}\cdot\vec{j} + \frac{\Gamma}{\sqrt{A^2+B^2+\Gamma^2}}\cdot\vec{\kappa}.$$

11) Να βρεθεί το κάθετο διάνυσμα στο τυχαίο σημείο της σφαίρας : $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.

Λύση

Θα έχουμε : $\nabla(x^2+y^2+z^2) = 2x\cdot\vec{i} + 2y\cdot\vec{j} + 2z\cdot\vec{\kappa}$.

Το κάθετο μοναδιαίο διάνυσμα σε τυχαίο σημείο της σφαίρας, θα είναι :

$$\vec{n} = \frac{\nabla(x^2+y^2+z^2)}{|\nabla(x^2+y^2+z^2)|} = \frac{2x\,\vec{i} + 2y\,\vec{j} + 2z\,\vec{\kappa}}{\sqrt{(2x)^2+(2y)^2+(2z)^2}} = \frac{2\left(x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{\kappa}\right)}{\sqrt{4(x^2+y^2+z^2)}} = \frac{2\left(x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{\kappa}\right)}{\sqrt{4R^2}} =$$

$\frac{x}{R}\cdot\vec{i} + \frac{y}{R}\cdot\vec{j} + \frac{z}{R}\cdot\vec{\kappa}$, *οπότε π.χ. για το σημείο $M(1,\ 2,\ 3)$, θα είναι :*

$$\vec{n}_{(1,\,2,\,3)} = \frac{1}{R}\cdot\vec{i} + \frac{2}{R}\cdot\vec{j} + \frac{3}{R}\cdot\vec{\kappa}.$$

12) Να βρεθεί η συνθήκη ώστε οι δύο επιφάνειες $F(x,\ y,\ z) = 0$ και $\Phi(x,\ y,\ z) = 0$ να τέμνονται ορθογώνια (κάθετα), (σ' ένα σημείο τομής τους).

Λύση

Πρέπει ισοδύναμα οι κλίσεις των επιφανειών να είναι κάθετες, δηλαδή:

$(\nabla F)\cdot(\nabla\Phi) = 0$ ή

[*Εσωτερικό γινόμενο διανυσμάτων 0, σημαίνει κάθετα διανύσματα.*]

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\cdot\vec{i} + \frac{\partial F}{\partial y}\cdot\vec{j} + \frac{\partial F}{\partial z}\cdot\vec{\kappa}\right)\cdot\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\cdot\vec{i} + \frac{\partial\Phi}{\partial y}\cdot\vec{j} + \frac{\partial\Phi}{\partial z}\cdot\vec{\kappa}\right) = 0 \text{ ή}$$

$$\frac{\partial F}{\partial x}\cdot\frac{\partial\Phi}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}\cdot\frac{\partial\Phi}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z}\cdot\frac{\partial\Phi}{\partial z} = 0,\ (\alpha).$$

[Η συνθήκη (α) ισχύει γενικά για ένα σημείο τομής των επιφανειών, συνήθως όμως ισχύει για όλα τα σημεία της καμπύλης τομής δύο επιφανειών].

13) Να βρεθεί η συνθήκη ώστε οι επιφάνειες $ax^2 + \beta y^2 + \gamma z^2 = 1$ και $xyz = 1$, να τέμνονται κάθετα.

Λύση

Κατά την (α) του προηγούμενου παραδείγματος, θα πρέπει να ισχύει :

$$\left(\nabla\left(\alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2\right)\right) \cdot \left(\nabla(xyz)\right) = 0 \text{ ή}$$

$$2\alpha x \cdot yz + 2\beta y \cdot xz + 2\gamma z \cdot xy = 0 \text{ ή}$$

$$2xyz \cdot (\alpha + \beta + \gamma) = 0 \text{ ή}$$

$$xyz \cdot (\alpha + \beta + \gamma) = 0 \text{ ή} \qquad \text{(κι επειδή } xyz = 1\text{)}$$

άρα πρέπει : $\alpha + \beta + \gamma = 0$, (για όλα τα σημεία τομής τους).

14) Να υπολογιστεί η γωνία υπό την οποία τέμνονται οι επιφάνειες :

$x^2 + y^2 + z^2 = 9$ και $z = x^2 + y^2 - 3$,

στο σημείο τομής τους $M(2,\ -1,\ 2)$.

Λύση

Ισοδύναμα, αρκεί να βρούμε τη γωνία που σχηματίζουν οι κλίσεις των 2 επιφανειών στο $M(2,\ -1,\ 2)$. Οπότε :

$$\nabla F = \nabla\left(x^2 + y^2 + z^2\right) = 2x \cdot \vec{i} + 2y \cdot \vec{j} + 2z \cdot \vec{\kappa} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \nabla F(2,\ -1,\ 2) = 4 \cdot \vec{i} - 2 \cdot \vec{j} + 4 \cdot \vec{\kappa} \quad \text{και}$$

$$\nabla \Phi = \nabla\left(x^2 + y^2 - z\right) = 2x \cdot \vec{i} + 2y \cdot \vec{j} - \vec{\kappa} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \nabla \Phi(2,\ -1,\ 2) = 4 \cdot \vec{i} - 2 \cdot \vec{j} - \vec{\kappa}, \text{ οπότε :}$$

$$\sigma\upsilon\nu\varphi = \frac{\left(\nabla F(2,\ -1,\ 2)\right) \cdot \left(\nabla \Phi(2,\ -1,\ 2)\right)}{\left|\left(\nabla F(2,\ -1,\ 2)\right)\right| \cdot \left|\left(\nabla \Phi(2,\ -1,\ 2)\right)\right|} = \frac{4 \cdot 4 + (-2) + 4 \cdot (-1)}{\sqrt{4^2 + (-2)^2 + 4^2} \cdot \sqrt{4^2 + (-2)^2 + (-1)^2}} =$$

$$= \frac{16 + 4 - 4}{\sqrt{36} \cdot \sqrt{21}} = \frac{16}{6 \cdot \sqrt{21}} = \frac{8}{3 \cdot \sqrt{21}} \cong 0{,}5819 \Rightarrow \varphi = 54{,}415^\circ.$$

15) *(Ένα πεδίο λέγεται **συντηρητικό** (στη Φυσική), όταν το έργο όλων των δυνάμεων κατά μήκος μιας κλειστής διαδρομής είναι μηδέν. Τότε οι δυνάμεις αυτές λέγονται **συντηρητικές.** Τέτοιες είναι, οι δυνάμεις βαρύτητας, οι ηλεκτρικές, οι ελαστικές δυνάμεις των ελατηρίων, κ.λ.π.

Ένα διανυσματικό πεδίο $\vec{F}$ είναι συντηρητικό, όταν υπάρχει βαθμωτό πεδίο f, τέτοιο ώστε : $\nabla \mathbf{f} = \vec{\mathbf{F}}$. Τότε το πεδίο f λέγεται και δυναμικό του $\vec{F}$ ή λέμε ότι η f είναι η δυναμική συνάρτηση της $\vec{F}$ ή και αλλιώς ότι η $\vec{F}$ απορρέει από δυναμικό f).

Ένα ηλεκτρικό πεδίο Ε περιγράφεται απ' την διανυσματική συνάρτηση $\vec{E}(x,\ y,\ z)=\left(z^2-2xy\right)\cdot\vec{i}-x^2\cdot\vec{j}+2xz\cdot\vec{\kappa}$.

Να δειχτεί ότι το Ε είναι συντηρητικό πεδίο και να βρεθεί το ηλεκτρικό δυναμικό V απ' το οποίο απορρέει, δεδομένου ότι $V(1,\ 2,\ 1)=2$.

Λύση

Αν το πεδίο Ε είναι συντηρητικό, θα πρέπει να ισχύει :

$$\nabla V=\vec{E} \text{ ή } \frac{\partial V}{\partial x}\cdot\vec{i}+\frac{\partial V}{\partial y}\cdot\vec{j}+\frac{\partial V}{\partial z}\cdot\vec{\kappa}=\left(z^2-2xy\right)\cdot\vec{i}-x^2\cdot\vec{j}+2xz\cdot\vec{\kappa}, \text{ οπότε :}$$

$$\frac{\partial V}{\partial x}=z^2-2xy\ (1),\quad \frac{\partial V}{\partial y}=-x^2,\ (2),\quad \frac{\partial V}{\partial z}=2xz,\ (3).$$

Ολοκληρώνοντας την (1) ως προς x, παίρνουμε :

$$\int_x\frac{\partial V}{\partial x}\cdot dx+\int_x\left(z^2-2xy\right)\cdot dx \text{ ή } V=z^2x-x^2y+C(y,\ z),\ (1\alpha),$$

όπου C(y, z) αυθαίρετη σταθερά (ανεξάρτητη του x, πιθανόν όμως εξαρτώμενη απ' τα y, z).

Παραγωγίζοντας την (1α) ως προς y, παίρνουμε :

$$\frac{\partial V}{\partial y}=-x^2+\frac{\partial C(y,\ z)}{\partial y}\overset{(2)}{\Rightarrow}\frac{\partial C(y,z)}{\partial y}=0,\qquad \left(\begin{array}{l}\textit{Άρα } C(y,\ z) \textit{ είναι ανεξάρτητη του } y,\\ \textit{πιθανό όμως εξαρτώμενη απ' το } z.\end{array}\right)$$

οπότε $C(y,\ z)=C(z)$, οπότε (1α) : $V=z^2x-x^2y+C(z)$.

Παραγωγίζοντας πάλι την (1α) ως προς z τώρα, παίρνουμε :

$$\frac{\partial V}{\partial z}=2zx+\frac{d\left(C(z)\right)}{dz}\overset{(3)}{\Rightarrow}\frac{d\left(C(z)\right)}{dz}=0,$$

άρα C(z), ανεξάρτητα και του z,

άρα C = αυθαίρετη σταθερά.

Έτσι, η (1α) γίνεται :

$V=z^2x-x^2y+C$.

Δεδομένου όμως ότι $V(1,\ 2,\ 1)=2$, δηλαδή $2=1^2\cdot1-1^2\cdot2+C$ ή C = 3, άρα τελικά το ζητούμενο δυναμικό απ' το οποίο απορρέει το πεδίο Ε, είναι :

$V=z^2x-x^2y+3$, (δηλαδή $\nabla V=\vec{E}$).

16) Να δειχτεί ότι το διανυσματικό πεδίο $\vec{F} = -\dfrac{\vec{V}}{|\vec{V}|^3}$,

όπου $\vec{V} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{k}$, ***είναι συντηρητικό, που απορρέει απ' το δυναμικό*** $U(x,\ y,\ z) = \dfrac{1}{|\vec{V}|}$.

Λύση

Αρκεί να δείξουμε ότι $\nabla U = \vec{F}$, (1).

Είναι όμως : $\vec{F} = -\dfrac{x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{\kappa}}{\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)^3}$, (2) και

$$\nabla U = \nabla\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right) =$$

$$= \frac{\partial\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-1/2}}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-1/2}}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-1/2}}{\partial z}\vec{\kappa} =$$

$$= \frac{-\frac{1}{2} \cdot 2x \cdot \vec{i} - \frac{1}{2} \cdot 2y \cdot \vec{j} - \frac{1}{2} \cdot 2z \cdot \vec{\kappa}}{\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)^3} = \frac{-x \cdot \vec{i} - y \cdot \vec{j} - z \cdot \vec{\kappa}}{\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)^3}, \ (3).$$

Απ' τις $(2) \wedge (3)$, προκύπτει η (1).

17) Αν $\vec{v} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{\kappa}$, ***να δειχτεί ότι :*** $\nabla\left(|\vec{V}|^n\right) = n \cdot |\vec{V}|^{n-2} \cdot \vec{V}$.

Λύση

Είναι : $|\vec{V}| = \left(x^2+y^2+z^2\right)^{1/2}$, οπότε $\nabla\left(|\vec{V}|^n\right) = \nabla\left(\left(x^2+y^2+z^2\right)^{n/2}\right) =$

$$= \frac{n}{2} \cdot \left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{n}{2}-1} \cdot 2x \cdot \vec{i} + \frac{n}{2} \cdot \left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{n}{2}-1} \cdot 2y \cdot \vec{j} + \frac{n}{2} \cdot \left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{n}{2}-1} \cdot 2z \cdot \vec{\kappa} =$$

$$= n \cdot \left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{n}{2}-1} \cdot \left(x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{\kappa}\right) =$$

$$n \cdot \left(|\vec{V}|^2\right)^{\frac{n}{2}-1} \cdot \vec{V} = n \cdot |\vec{V}|^{n-2} \cdot \vec{V}.$$

18) Να βρεθεί η $\nabla\left(z^2\cdot \sigma\upsilon\nu\left(xy-\frac{\pi}{4}\right)\right)$ ***στο σημείο*** $M(1,\ \pi/2,\ 1)$.

Λύση

$$\nabla\left(z^2\cdot \sigma\upsilon\nu\left(xy-\frac{\pi}{4}\right)\right)=-yz^2\cdot \eta\mu\left(xy-\frac{\pi}{4}\right)\cdot\vec{i}-xz^2\cdot\eta\mu\left(xy-\frac{\pi}{4}\right)\cdot\vec{j}+2z\cdot\sigma\upsilon\nu\left(xy-\frac{\pi}{4}\right)\cdot\vec{\kappa}$$

οπότε : $\nabla\left(z^2\cdot \sigma\upsilon\nu\left(xy-\frac{\pi}{4}\right)\right)_{(1,\ \pi/2,\ 1)}=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\left(-\frac{\pi}{2}\cdot\vec{i}-\vec{j}+2\cdot\vec{\kappa}\right).$

19) Να βρεθεί η κατευθυνόμενη παράγωγος της $f(x,\ y,\ z)=2xy^2+xyz^2+x^2$, ***κατά το διάνυσμα*** $\vec{v}=3\cdot\vec{i}-2\cdot\vec{j}+5\cdot\vec{\kappa}$, ***στο σημείο*** $M(1,\ 1,\ 2)$.

Λύση

Είναι : $\frac{df(x,\ y,\ z)}{d\vec{v}}=\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}\cdot(\nabla f)=\frac{3\cdot\vec{i}-2\cdot\vec{j}+5\cdot\vec{\kappa}}{\sqrt{3^2+(-2)^2+5^2}}\cdot\left(\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\vec{i}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\vec{j}+\frac{\partial f}{\partial z}\cdot\vec{\kappa}\right)=$

$=\left(\frac{3}{\sqrt{38}}\cdot\vec{i}-\frac{2}{\sqrt{38}}\cdot\vec{j}+\frac{5}{\sqrt{38}}\cdot\vec{\kappa}\right)\cdot\left((2y^2+z^2y+2x)\cdot\vec{i}+(4xy+xz^2)\cdot\vec{j}+2xyz\cdot\vec{\kappa}\right),$

και άρα : $\frac{df(M)}{d\vec{V}}=\frac{df(1,\ 1,\ 2)}{d\vec{V}}=\ldots=\frac{28}{\sqrt{38}}.$

3.1. ΑΠΟΚΛΙΣΗ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ (Div - divergence).

Έστω μια διανυσματική συνάρτηση $\vec{F} : \Re^3 \to \Re^3$,

[δηλαδή $\vec{F} : (x,\ y,\ z) = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{\kappa} \in \Re^3 \to \vec{F}(x,\ y,\ z) =$

$= F_1 \cdot \vec{i} + F_2 \cdot \vec{j} + F_3 \cdot \vec{\kappa} = (F_1,\ F_2,\ F_3) \in \Re^3$].

Ονομάζουμε **απόκλιση** (divergence) της διανυσματικής συνάρτησης $\vec{F}(x,\ y,\ z) = (F_1,\ F_2,\ F_3)$ συμβολίζοντας $\mathrm{div}\,\vec{F}$ ή $\nabla \vec{F}$, τη βαθμωτή συνάρτηση :

$$\boxed{\mathrm{din}\,\vec{F} = \nabla \vec{F} = \left(\frac{\partial}{\partial x} \cdot \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \cdot \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \cdot \vec{\kappa} \right) \cdot \vec{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}} \qquad (4)$$

Παρατηρήσεις :

1) Η απόκλιση $\left(\nabla \vec{F} \right)$ σημαίνει συμβατικά, το εσωτερικό γινόμενο του ∇ (ανάδελτα) επί την $\vec{F}$.

   Προφανώς η απόκλιση $\left(\nabla \vec{F} \right)$ σε σημείο είναι αριθμός (ενώ η συνάρτηση απόκλιση, είναι αριθμητική (βαθμωτή)).

2) Ο ορισμός (4) της απόκλισης, αναφέρεται βέβαια στον $\Re^3$, δηλαδή για τρισδιάστατες διανυσματικές συναρτήσεις. Όμοια γενικεύεται για διανυσματικές συναρτήσεις στον $\Re^{\nu}$, $\nu \geq 2$, $\nu \in N$.

3.9. ΠΕΡΙΣΤΡΟΦΗ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ (rot - rotation).

Έστω μια διανυσματική συνάρτηση $\vec{F} : (x, y, z) \in \Re^3 \to (F_1, F_2, F_3) \in \Re^3$. Ονομάζουμε **περιστροφή** (rotation) της διανυσματικής συνάρτησης $\vec{F}(x, y, z) = (F_1, F_2, F_3)$ συμβολίζοντας $\operatorname{rot}\vec{F}$ $\left(\text{ή } \operatorname{curl}\vec{F}\right)$ ή $\nabla \times \vec{F}$, τη διανυσματική συνάρτηση :

$$\boxed{\operatorname{rot}\vec{F} = \nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{\kappa} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix},} \qquad (5)$$

Παρατηρήσεις :

Η περιστροφή $\left(\nabla \times \vec{F}\right)$ σημαίνει συμβατικά, το εξωτερικό γινόμενο του ανάδελτα (∇) επί την $\vec{F}$. Άρα θα μπορούσαμε να πούμε ότι : το γινόμενο του ∇ επί βαθμωτή συνάρτηση είναι η κλίση της, ενώ το εσωτερικό και εξωτερικό γινόμενο του ∇ επί διανυσματική συνάρτηση είναι η απόκλιση και η περιστροφή της, αντίστοιχα.

<u>ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ - ΣΧΟΛΙΑ (Απόκλισης - Περιστροφής)</u> :

1) Η φυσική ερμηνεία της απόκλισης (div) ενός διανυσματικού πεδίου $\vec{F}$, είναι ότι : χαρακτηρίζει την πυκνότητα των πηγών του πεδίου. Έτσι, αν $\mathbf{div}\vec{\mathbf{F}} > \mathbf{0}$, τότε έπεται ότι το υγρό (που η κίνησή του εκφράζεται απ' το $\vec{F}$) έχει πηγές, δηλαδή εντός ενός αγωγού όγκου V εξέρχεται περισσότερη ποσότητα υγρού απ' όση εισέρχεται. Αντίθετα, αν $\mathbf{div}\vec{\mathbf{F}} < \mathbf{0}$, αυτό σημαίνει ότι ο όγκος V περιέχει "φρεάτια" (τρύπες) και ότι εισέρχεται περισσότερο υγρό απ' ότι εξέρχεται.

   Τέλος, αν $\mathbf{div}\vec{\mathbf{F}} = \mathbf{0}$, τότε το διανυσματικό πεδίο $\vec{F}$ λέγεται **ασυμπίεστο ή σωληνοειδές** (incompressible), πράγμα που σημαίνει πως ο όγκος V δεν περιέχει ούτε πηγές ούτε φρεάτια και ότι εξέρχεται απ' τον V όσο ακριβώς υγρό εισέρχεται. Παράδειγμα ασυμπίεστου πεδίου, είναι το πεδίο ταχυτήτων του νερού μέσα σε μια υδροσωλήνα (εξού και σωληνοειδές).

2) Ένα διανυσματικό πεδίο $\vec{F}$, λέγεται **αστρόβιλο** (irrotational), όταν $\operatorname{rot}\vec{F} = \vec{0}$.

3) Η έννοια της περιστροφής είναι άμεσα συνδεδεμένη με την έννοια του **δυναμικού** πεδίου V. Δηλαδή ισχύει :

   Αν $\vec{F} : (x, y, z) \in \Re^3 \to (P, Q, T) \in \Re^3$, με $\vec{F}$ συντηρητικό πεδίο (δηλαδή ως γνωστό $\vec{F} = \nabla V$), τότε ισχύουν :

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}, \quad \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z}, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial T}{\partial x}.$$

Το αντίστροφο δεν ισχύει.

4) Αν $\vec{F}$ είναι συντηρητικό (δηλαδή $\exists V : \nabla V = \vec{F}$, V = δυναμικό), τότε :

$\text{rot}\,\vec{F} = \vec{0}$ και αντίστροφα, δηλαδή ισχύει :

$$\left[\vec{F} = \nabla V\right] \Leftrightarrow \text{rot}\,\vec{F} = \vec{0}.$$

5) Αν $\vec{F}(x, y, z) = (P, Q, T)$, τότε οι επόμενες προτάσεις είναι ισοδύναμες :

- Το διανυσματικό πεδίο $\vec{F}$ είναι συντηρητικό (δηλαδή έχει δυναμικό V),
- Η διαφορική μορφή $Pdx + Qdy + Tdz$, είναι ολικό διαφορικό.

6) **Φυσική ερμηνεία της rot :** Η $\text{rot}\vec{F}$ εκφράζει το μέτρο της τάσης του διανυσματικού πεδίου για περιστροφή σ' ένα σημείο. Αν $\text{rot}\,\vec{F} \neq 0$, τότε έχουμε στροβιλισμό, δηλαδή μια στοιχειώδης περιοχή ενός ρευστού, εκτός από μεταφορική ταχύτητα, έχει και γωνιακή.

Παραδείγματα (στην απόκλιση (div) και περιστροφή (rot)).

1) Να βρεθεί η απόκλιση της $\vec{F}(x, y, z) = xz \cdot \vec{i} - y^2 \cdot \vec{j} + 2x^2 y \cdot \vec{\kappa}$, στο σημείο $M(1, -1, 1)$.

Λύση

Κατά τον ορισμό (1), είναι :

$$\text{div}\,\vec{F} = \nabla \vec{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} = z - 2y,$$

(όπου $F_1 = xz$, $F_2 = -y^2$, $F_3 = 2x^2 y$),

οπότε : $\text{div}\,\vec{F}(M) = \text{div}\,\vec{F}(1, -1, 1) = 1 - 2 \cdot (1) = 3$.

2) Επίσης το $div\vec{F}$,

όπου $\vec{F}(x,\ y,\ z) = (x^3 + 3x^2y - y^3)\cdot\vec{i} + ln(x^2+y^2)\cdot\vec{j} + z\cdot τοξεφ\frac{y}{x}\cdot\vec{κ}$.

Λύση

$$div\,\vec{F} = \nabla\vec{F} = \frac{\partial(x^3+3x^2y-y^3)}{\partial x} + \frac{\partial(\ln(x^2+y^2))}{\partial y} + \frac{\partial\left(z\cdot τοξεφ\frac{y}{x}\right)}{\partial z} =$$

$$= (3x^2+6xy) + \frac{\frac{\partial(x^2+y^2)}{\partial y}}{x^2+y^2} + τοξεφ\frac{y}{x} = 3x^2+6xy+\frac{2y}{x^2+y^2}+τοξεφ\frac{y}{x}.$$

3) Να βρεθεί η περιστροφή το διανυσματικού πεδίου :

$\vec{F}(x,\ y,\ z) = xz^3\cdot\vec{i} - x^2yz\cdot\vec{j} + yz^4\cdot\vec{κ}$***, στο σημείο*** $M(1,\ 1,\ 1)$.

Λύση

Κατά τον ορισμό (2), είναι :

$$rot\,\vec{F} = \nabla\times\vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{κ} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ xz^3 & -x^2yz & yz^4 \end{vmatrix} =$$

$$= \vec{i}\cdot\left[\frac{\partial}{\partial y}\cdot(yz^4) - \frac{\partial}{\partial z}\cdot(-x^2yz)\right] + \vec{j}\cdot\left[\frac{\partial}{\partial z}\cdot(xz^3) - \frac{\partial}{\partial x}\cdot(yz^4)\right] +$$

$$+\vec{κ}\cdot\left[\frac{\partial}{\partial x}\cdot(-x^2yz) - \frac{\partial}{\partial y}\cdot(xz^3)\right] =$$

$$= \vec{i}\cdot(z^4+x^2y) + \vec{j}\cdot 3xz^2 + \vec{κ}\cdot(-2xyz) = (z^4+x^2y)\cdot\vec{i} + 3xz^2\cdot\vec{j} - 2xyz\cdot\vec{κ},$$

οπότε : $rot\,\vec{F}(M) = rot\,\vec{F}(1,\ 1,\ 1) = 2\cdot\vec{i} + 3\cdot\vec{j} - 2\cdot\vec{κ}$.

4) Να υπολογιστεί το $div(grad\,f(x,\ y,\ z)) = \nabla(\nabla f(x,\ y,\ z)) = \nabla^2 f$.

Λύση

Είναι : $\nabla\cdot(\nabla f(x,\ y,\ z)) = \nabla\cdot\left(\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\cdot\vec{κ}\right) =$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial x}\cdot\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\cdot\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\cdot\vec{κ}\right)\cdot\left(\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\cdot\vec{κ}\right) =$$

$$= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \qquad \left(= \nabla^2 f\right).$$

* Το παραπάνω αποτέλεσμα $\boxed{\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}}$ λέγεται και **τελεστής του Laplace** της συνάρτησης f και συναντάται στη ρευστομηχανική, θεωρία ελαστικότητας, κ.λ.π.

Επίσης η παράσταση :

$$\nabla^4 f = \nabla^2\left(\nabla^2 f\right) = \frac{\partial^4 f}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 f}{\partial y^4} + \frac{\partial^4 f}{\partial z^4} + 2 \cdot \frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \cdot \partial y^2} + 2 \cdot \frac{\partial^4 f}{\partial y^2 \cdot \partial z^2} + 2 \cdot \frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \cdot \partial z^2},$$

λέγεται και **διαρμονικός τελεστής.**

5) Να δειχτεί η σχέση $div\left(\vec{C} \times \vec{V}\right) = 0$, όπου $\vec{C}$ σταθερό διάνυσμα.

Λύση

Αν $\vec{C} = \left(c_1,\ c_2,\ c_2\right)$ και $\vec{V} = (x,\ y,\ z)$, τότε :

$$div\left(\vec{C} \times \vec{V}\right) = \nabla \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{\kappa} \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ x & y & z \end{vmatrix}}_{\substack{\text{εξωτερικό} \\ \text{γινόμενο } \left(\vec{C} \times \vec{V}\right)}} \overset{(1)}{=} \nabla \cdot \left[(zc_2 - yc_3) \cdot \vec{i} - (zc_1 - xc_3) \cdot \vec{j} + (yc_1 - xc_2) \cdot \vec{\kappa}\right] =$$

$$= \frac{\partial\left(c_2 z - c_3 y\right)}{\partial x} + \frac{\partial\left(c_3 x - c_1 z\right)}{\partial y} + \frac{\partial\left(c_1 y - c_2 x\right)}{\partial z} = 0 + 0 + 0 = 0 \text{ (πράγματι).}$$

Σημείωση :

Στη ρευστοδυναμική, η απόκλιση ερμηνεύεται ως ένα μέτρο της ταχύτητας μεταβολής της πυκνότητας του ρευστού σ' ένα σημείο. Η μεταβολή αυτή, που εκφράζεται απ' την απόκλιση, είναι διάφορη του μηδενός είτε επειδή οι ταχύτητες μεταβάλλονται στο χώρο, είτε γιατί η πυκνότητα μεταβάλλεται γιατί δημιουργείται κάποια τοπική πηγή ή καταργείται ένα φρεάτιο.

π.χ. στη μελέτη της ροής του οξυγόνου μέσα στον ανθρώπινο οργανισμό έχουμε μια απώλεια οξυγόνου απ' τη μετατροπή του σε διοξείδιο του άνθρακα λόγω μεταβολισμού. Στην περίπτωση που δεν υπάρχουν, γενικά, πηγές ή φρεάτια και η πυκνότητα του ρευστού είναι αμετάβλητη με το χρόνο, τότε έχουμε απόκλιση ίση με μηδέν, και το ρευστό όπως ξέρουμε, λέγεται ασυμπίεστο.

6) Να βρεθεί η απόκλιση του διανυσματικού πεδίου :

$\vec{F}(x,\ y,\ z) = xz \cdot \vec{i} - y^2 \cdot \vec{j} + 2x^2y \cdot \vec{\kappa}$, στο σημείο $M(1,\ -1,\ 1)$.

Λύση

$$\operatorname{div}\vec{F} \overset{(op.)}{=} \nabla \vec{F} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\cdot\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\cdot\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\cdot\vec{\kappa}\right)\cdot\vec{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} =$$

$$= \frac{\partial(xz)}{\partial x} + \frac{\partial(-y^2)}{\partial y} + \frac{\partial(2x^2y)}{\partial z} = z - 2y, \text{ οπότε :}$$

$$\operatorname{div}\vec{F}(M) = \operatorname{div}\vec{F}(1,\ -1,\ 1) = 1 - 2\cdot(-1) = 3.$$

7) Να βρεθεί το $rot\vec{A}$,

όταν $\vec{A}(x,\ y,\ z) = (2xy + z^3)\cdot\vec{i} + (x^2 + 2y)\cdot\vec{j} + (3xz^2 - 2)\cdot\vec{\kappa}$.

Λύση

$$\operatorname{rot}\vec{A} = \nabla\times\vec{A} \overset{op.}{=} \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{\kappa} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ \underbrace{(2xy + z^3)}_{F_1} & \underbrace{(x^2 + 2y)}_{F_2} & \underbrace{(2xz^2 - 2)}_{F_3} \end{vmatrix} =$$

$$= \vec{i}\cdot\left(\frac{\partial(xz^2 - 2)}{\partial y} - \frac{\partial(x^2 + 2y)}{\partial z}\right) - \vec{j}\cdot\left(\frac{\partial(3xz^2 - 2)}{\partial x} - \frac{\partial(2xy + z^3)}{\partial z}\right) +$$

$$+\vec{\kappa}\cdot\left(\frac{\partial(x^2 + 2y)}{\partial x} - \frac{\partial(2xy + z^3)}{\partial y}\right) =$$

$$= \vec{i}\cdot 0 - \vec{j}\cdot(3z^2 - 3z^2) + \vec{\kappa}\cdot(2x - 2x) = 0.$$

8) Αν $\vec{F}(x,\ y,\ z) = xz\cdot\vec{i} + (2x^2 - y)\cdot\vec{j} - yz^2\cdot\vec{\kappa}$ και

$\Phi(x,\ y,\ z) = 3x^2y + y^2z^3$, να βρεθούν :

α) $grad\Phi$, β) $din\vec{F}$, γ) $rot\vec{F}$, στο $M(1,\ -1,\ 1)$.

(**Αποτέλεσμα :** α) $-6\cdot\vec{i} + \vec{j} + 3\cdot\vec{\kappa}$, β) 2, γ) $-\vec{i} + \vec{j} + 4\cdot\vec{\kappa}$).

9) Αν $\vec{F} = x^2 y \cdot \vec{i} + y^2 z \cdot \vec{j} + z^2 x \cdot \vec{\kappa}$ και $\Phi = xy + yz + zx$, να βρεθούν :

α) $\vec{F} \cdot (\nabla\Phi)$, β) $\Phi\nabla\vec{F}$, γ) $\nabla\Phi \times \vec{F}$, στο $M(3, -1, 2)$.

(**Αποτέλεσμα :**

α) 25, β) 2, γ) $56 \cdot \vec{i} - 30 \cdot \vec{j} + 47 \cdot \vec{\kappa}$).

10) Έστω $\vec{F} = (x + 2y + \lambda z) \cdot \vec{i} + (\mu x - 3y - z) \cdot \vec{j} + (4x + \nu y + 2z) \cdot \vec{\kappa}$,

και $f = 2x^2 y z^3$.

α) Να προσδιοριστούν οι σταθερές λ, μ, ν, ώστε το πεδίο $\vec{F}$ να είναι αστρόβιλο.

β) Να υπολογιστούν : $\vec{F} \cdot \nabla f$, $\left(\nabla\vec{F}\right) f$, $\left(\nabla \times \vec{F}\right)(\nabla f)$, $\left(\nabla \times \vec{F}\right) f$.

γ) Να δειχτεί ότι το $\vec{F}$ είναι συντηρητικό και να βρεθεί το δυναμικό f.

(**Αποτέλεσμα :**

α) $\lambda = 4$, $\mu = 2$, $\nu = -1$, γ) $f(x, y, z) = \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{3y^2}{2} + z^2 + 2xy - yz + 4zx + C$).

11) Να εξεταστούν τα διανυσματικά πεδία :

$\vec{F}(x, y, z) = \left(x^2 + ye^z, \; -y^2 z e^x, \; 2xz + yz^2 e^x\right)$ και

$\vec{\Phi}(x, y, z) = \left(e^y + z^z, \; xe^y + \eta\mu z, \; 2xz + y\sigma\upsilon\nu z\right)$,

αν είναι αστρόβιλα και ασυμπίεστα.

12) Να δειχτεί ότι το $\vec{F}(x, y) = \left(e^y + y \cdot \sigma\upsilon\nu x, \; x \cdot e^y + \eta\mu x\right)$ είναι συντηρητκό και να βρεθεί ένα δυναμικό $V(x, y)$ αυτού.

(**Αποτέλεσμα :**

$V(x, y) = xe^y + y \cdot \eta\mu x$).

13) Να εξεταστεί αν το $\vec{F}\left(xy, \; ze^x, \; -x + y \cdot \eta\mu z\right)$ είναι συντηρητικό.