

Άσκηση Μ3

Μαθηματικό εκκρεμές

Ορισμός

Μαθηματικό εκκρεμές ονομάζεται μια σημειακή μάζα, η οποία είναι αναρτημένη σε νήμα. Το ίδιο το νήμα δεν έχει δική του μάζα και το οποίο εξάλλου δεν μπορεί να επιμηκυνθεί. Κανονικά το μαθηματικό εκκρεμές δεν είναι κατασκευάσιμο, εφόσον 'σημειακή μάζα' σημαίνει 'μάζα χωρίς όγκο', πράγμα το οποίο είναι αδύνατο. Η κατασκευή του γίνεται προσεγγιστικά: το ένα άκρο ενός νήματος στερεώνεται σε ένα σταθερό σημείο και στο άλλο άκρο του νήματος στερεώνεται ένα σφαιρίδιο. Το σφαιρίδιο αυτό, εφόσον εκτραπεί με κάποιον τρόπο από την θέση ισορροπίας του, εκτελεί μια κίνηση πάνω στην επιφάνεια μιας σφαίρας. Για την προσεγγιστική υλοποίηση του μαθηματικού εκκρεμές, θα πρέπει να πληρούνται οπωσδήποτε οι εξής δύο συνθήκες: α) Οι διαστάσεις του αναρτημένου σφαιριδίου θα πρέπει να είναι μικρές σε σχέση με το μήκος του νήματος και β) Η εκτροπή από την θέση ισορροπίας την στιγμή της εκκίνησης θα πρέπει να είναι μικρή έστω μερικές μοίρες.

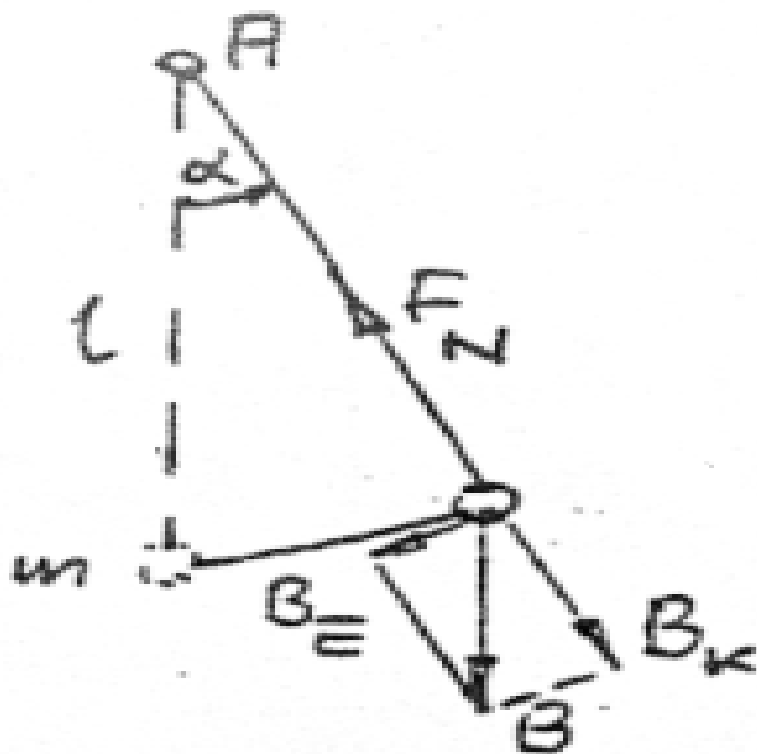
Εξίσωση δυνάμεων

Σύμφωνα με το σχήμα 1, θεωρούμε και εξετάζουμε μια επίπεδη κίνηση, όπου μια μάζα m , κάτω από την επίδραση της βαρύτητας, εκτελεί ένα μέρος του κύκλου. Το βάρος δρα κατακόρυφα προς τα κάτω και έχει σημείο εφαρμογής το γεωμετρικό κέντρο του σφαιριδίου, δηλαδή της σημειακής μάζας. Αυτό το βάρος αναλύεται σε δύο συνιστώσες, εκ των οποίων η μια συνιστώσα είναι παράλληλη προς την διεύθυνση της τροχιάς και η άλλη συνιστώσα είναι κάθετη προς την διεύθυνση της τροχιάς. Η τάση του νήματος είναι αντίθετη προς την συνιστώσα η οποία είναι κάθετη προς την διεύθυνση της τροχιάς. Άρα

προς το κέντρο του κύκλου υπάρχει μια κεντρομόλος δύναμη $\frac{mu^2}{l} = F_n - B_k$.

Συνεπώς για την τάση του νήματος λαμβάνεται: $F_n = \frac{mu^2}{l} + B_k$

Η τάση του νήματος είναι μια δύναμη εξαναγκασμού, η οποία αναγκάζει το σώμα να διαγράψει την κυκλική τροχιά. Όπως όλες οι δυνάμεις εξαναγκασμού, έτσι και η τάση του νήματος, είναι κάθετη προς την τροχιά της κίνησης. Οι τιμές των δυνάμεων συνιστωσών του βάρους, υπολογίζονται γεωμετρικά.

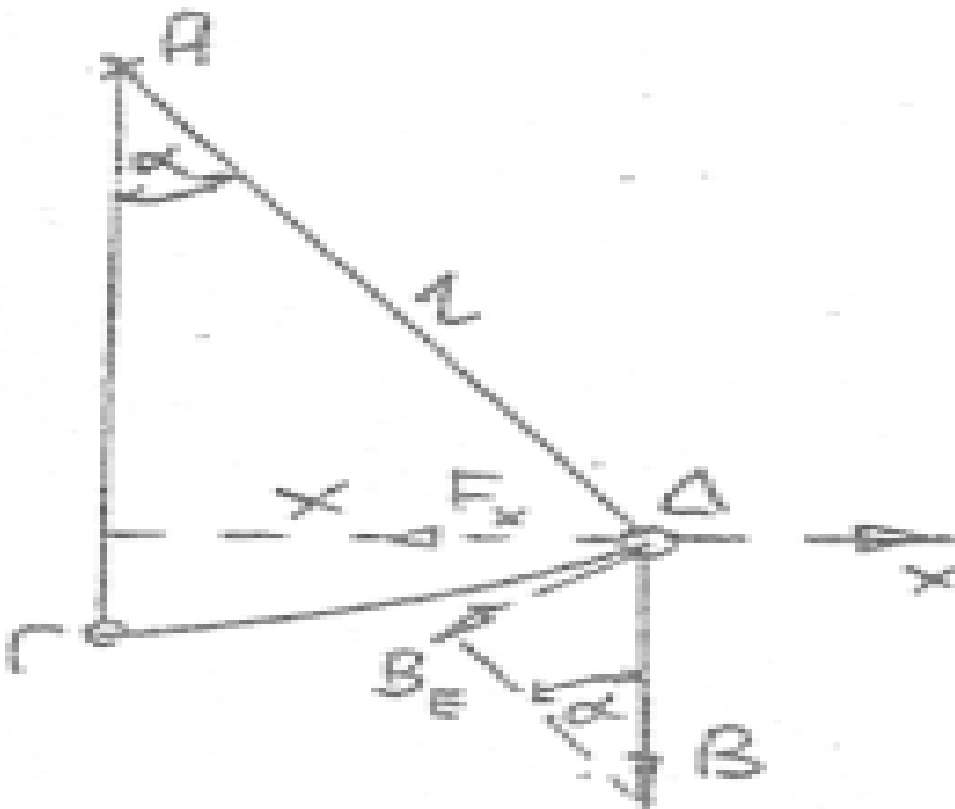


Σχήμα 1 – Μαθηματικό εκκρεμές

Από το παραπάνω σχήμα προκύπτει: $|B_E| = mg|\eta\mu\alpha|$

Η γωνία εκτροπής α θεωρείται θετική, εφόσον έχει αντίθετη φορά από την κίνηση του δείκτη του ρολογιού. Όλες οι δυνάμεις που έχουν αυτήν την φορά θεωρούνται θετικές. Με τις συνθήκες αυτές, από την παραπάνω σχέση προκύπτει: $B_E = -mg\eta\mu\alpha$

Η συνιστώσα η οποία είναι παράλληλη προς την διεύθυνση της τροχιάς, ισούται με το αρνητικό γινόμενο της μάζας επί την επιτάχυνση της βαρύτητας επί το ημίτονο της γωνίας α . Από την παραπάνω σχέση, φαίνεται καθαρά ότι το ημίτονο της γωνίας α καθορίζει επ'ακριβώς την δύναμη B_E .



Σχήμα 2 - Συνθήκη

Για το ημίτονο α προκύπτει όμως – σύμφωνα με το παραπάνω σχήμα – και μια άλλη σημασία, η οποία δεν σχετίζεται με τις δυνάμεις, αλλά με τις γεωμετρικές διαστάσεις, εφόσον ισχύει: $\eta\mu\alpha = \frac{x}{l}$ Άρα προκύπτει η σχέση: $B_E = -mg \frac{x}{l}$

Για πολύ μικρές γωνίες εξάλλου, η καμπυλόγραμμη τροχιά, δηλαδή το τόξο ΓΔ, μπορεί να θεωρηθεί και ως ευθεία. Στην περίπτωση αυτή, ισχύει: $F_x = B_E = -mg \frac{x}{l}$

Αυτό σημαίνει ότι η δύναμη B_E έχει την διεύθυνση του άξονα x . Στο παραπάνω σχήμα, η γωνία εκτροπής, είναι $\alpha \approx (F_{x1}, B_E)$. Η δύναμη F_x αποτελεί το ένα σκέλος της εξίσωσης των δυνάμεων. Το δεύτερο σκέλος είναι σύμφωνα με τον Δεύτερο νόμο του NEWTON - $F_x = m\ddot{x}$

$$m\ddot{x} = -\frac{mg}{l}x$$

Συνεπώς για την εξίσωση δυνάμεων λαμβάνεται: ή

$$\ddot{x} = -\frac{g}{l}x$$

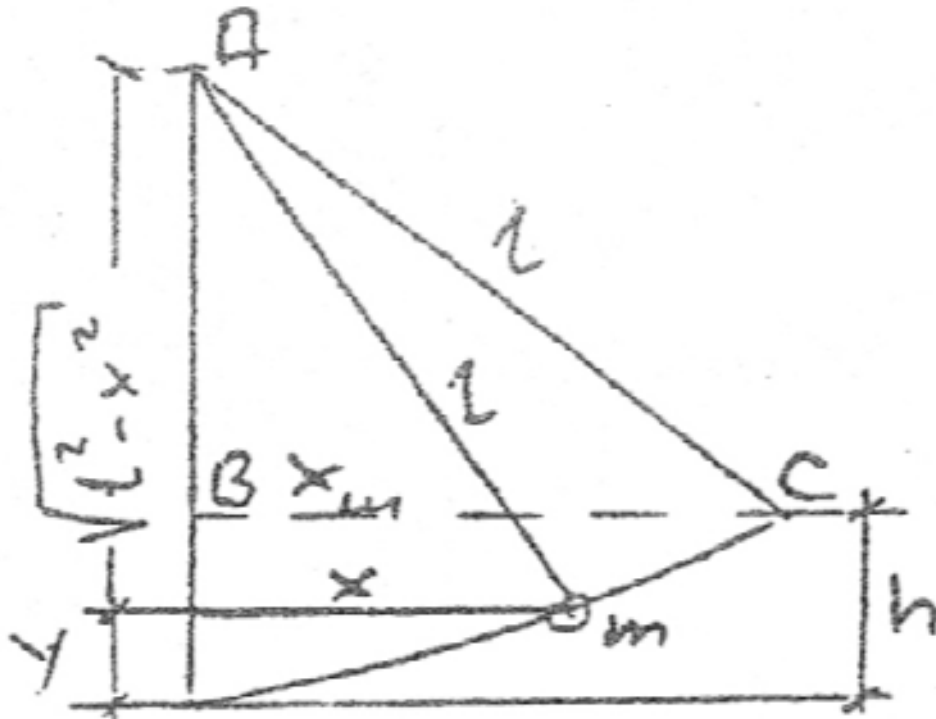
Εξίσωση κίνησης

Η εξίσωση κίνησης προκύπτει από την λύση της εξίσωσης δυνάμεων και είναι της μορφής $x=f(t)$. Η εξίσωση αυτή, είναι μια διαφορική εξίσωση, η οποία δεν μπορεί να λυθεί στο Α εξάμηνο, επειδή μας λείπει το μαθηματικό υπόβαθρο. Η λύση αυτή όμως είναι ήδη γνωστή

$$x = x_m \sigma \nu \nu(\omega t + \varphi_0)$$

από την μέση εκπαίδευση: ή

$$x = x_m \eta \mu(\omega t + \varphi_0)$$



Σχήμα 3 – Αρχή Διατήρησης της Ενέργειας

Η ολική ενέργεια της μάζας ισούται με το γινόμενο της μάζας επί την επιτάχυνση της βαρύτητας επί το μέγιστο ύψος, το οποίο μπορεί να καταλάβει η μάζα. Στο σημείο αυτό η κινητική ενέργεια είναι μηδέν. Αν όμως μηδενιστεί το ύψος ($h=0$), τότε μηδενίζεται και η δυναμική ενέργεια ενώ η κινητική ενέργεια είναι μέγιστη.

Συζήτηση της εξίσωσης κίνησης

Η σχέση $x = \sqrt{2lh}\mu(\sqrt{\frac{g}{l}}t + \sigma\varphi_0)$ περιγράφει την ταλάντωση. Αυτό φαίνεται από το ημίτονο της γωνίας $\varphi = \sqrt{\frac{g}{l}}t + \varphi_0$. Συνεπώς, η κυκλική συχνότητα είναι: $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$ και επομένως: $\nu = \frac{1}{2\pi} \sqrt{2\frac{g}{l}}$, $T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$

Αρμονική ονομάζεται η ταλάντωση η οποία περιγράφεται επ'ακριβώς από το ημίτονο ή το συνημίτονο. Άρα το μαθηματικό εκκρεμές εκτελεί αρμονικές ταλαντώσεις. Αυτό ισχύει μόνο, εφόσον το εκκρεμές της πειραματικής διάταξης πληρεί πράγματι τις αρχικά αναφερόμενες συνθήκες, δηλαδή την συνθήκη $X < L$ και μικρή εκτροπή από την θέση ισορροπίας.

Αν η γωνία εκτροπής δεν είναι μικρή, τότε το πλάτος x_m θα είναι μεγάλο. Αυτό σημαίνει ότι η δύναμη επαναφοράς δεν ορίζεται από την σχέση της δύναμης F_x με την απόσταση x , η οποία σχέση αποτελεί το δεύτερο σκέλος της εξίσωσης των δυνάμεων, αλλά είναι μικρότερη. Επομένως η περίοδος T θα είναι μεγαλύτερη από αυτήν στην εξίσωση κίνησης. Εξάλλου η απομάκρυνση x δεν θα έχει ημιτονοειδή χαρακτήρα.

Από την σχέση της ταχύτητας με την απομάκρυνση και την επιτάχυνση, προκύπτουν δύο πορίσματα: Η ταχύτητα προπορεύεται της επιτάχυνσης κατά $\frac{\pi}{2}$. Η επιτάχυνση προπορεύεται της απομάκρυνσης κατά π . Από τα δύο παραπάνω πορίσματα έχουμε και δύο συμπεράσματα: Η ταχύτητα προπορεύεται της απομάκρυνσης κατά $\frac{T}{4}$. Η επιτάχυνση προπορεύεται της απομάκρυνσης κατά $\frac{T}{2}$. Συνεπώς η επιτάχυνση είναι πάντα αντίθετη της απομάκρυνσης.

Πρακτικό μέρος

- 1) Κατασκευή του καλύτερου δυνατού μαθηματικού εκκρεμούς (νήμα, σφαιρίδιο, πλαίσιο ανάρτησης)
- 2) Μετρήσεις σε γωνία εκτροπής $\alpha \leq 5^\circ$ και αξιολόγηση
- 2.1) Μετρήσεις

Οι μετρήσεις για τα διάφορα μήκη νήματος γίνονται σύμφωνα με τον παρακάτω πίνακα I

Γωνία εκτροπής α	Μήκος νήματος l (m)	Ποσότητα ταλαντώσεων n	t/s για n ταλαντ.	$T = t/n$ [s]
$\leq 5^\circ$	0.10^2	20		x
	10			
	20			
	30			
	40			
	50			
	60			
	70			

Πίνακας 1 – Η περίοδος T για $l=0$ προκύπτει μέσα από λογική σκέψη

2.2) μεθοδολογία αξιολόγησης των μετρήσεων

2.2.1) συνάρτηση $T=f(l)$

Από τις παραπάνω μετρήσεις, φαίνεται καθαρά, ότι η περίοδος T , είναι μια συνάρτηση του μήκους νήματος. Από την θεωρία γνωρίζουμε, ότι η σχέση που συνδέει αυτά τα δύο μεγέθη, είναι η σχέση $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$. Αλλά εδώ κάνουμε σαν να μην την γνωρίζουμε.

Επομένως, με σκοπό να βρούμε την τάχα άγνωστη συνάρτηση, υποθέτουμε εντελώς αυθαίρετα ότι ισχύει π.χ. $T = c_1\sqrt[4]{l}$ ή $T = c_2\sqrt{l}$ ή $T = c_3l$ ή $T = c_4l^2$. Αν μια από τις σχέσεις αυτές ανταποκρίνεται στην πραγματικότητα, π.χ. η σχέση $T = c_2\sqrt{l}$, τότε με $\sqrt{l} = x$ ως τετμημένη, προκύπτει μια ευθεία. Έστω, ότι αυτή η σχέση, είναι και η σωστή. Υπό την συνθήκη αυτή, ως τετμημένες χρησιμοποιούνται $\sqrt[4]{l}$ ή l ή l^2 .

$T = c_2\sqrt{l} = c_2\sqrt[4]{l}\sqrt[4]{l} = c_1\sqrt[4]{l}$ και άρα $c_2\sqrt[4]{l} = c_1$. Επομένως η καμπύλη $T = c_1\sqrt[4]{l}$ είναι κυρτή (καμπυλώνεται προς τα πάνω)

$T = c_2\sqrt{l} = c_2\sqrt{l}\frac{\sqrt{l}}{\sqrt{l}} = \frac{c_2}{\sqrt{l}}l = c_3l$ και άρα $\frac{c_2}{\sqrt{l}} = c_3$. Επομένως η καμπύλη είναι κοίλη (καμπυλώνεται προς τα κάτω). Στην τελευταία περίπτωση προκύπτει

$T = c_2\sqrt{l} = c_2\sqrt{l}\frac{\sqrt{l^3}}{\sqrt{l^3}} = \frac{c_2}{\sqrt{l^3}}l^2$ και άρα $\frac{c_2}{\sqrt{l^3}} = c_4$. Άρα και εδώ η προκύπτουσα καμπύλη είναι κοίλη

2.2.2) Εφαρμογή της μεθοδολογίας

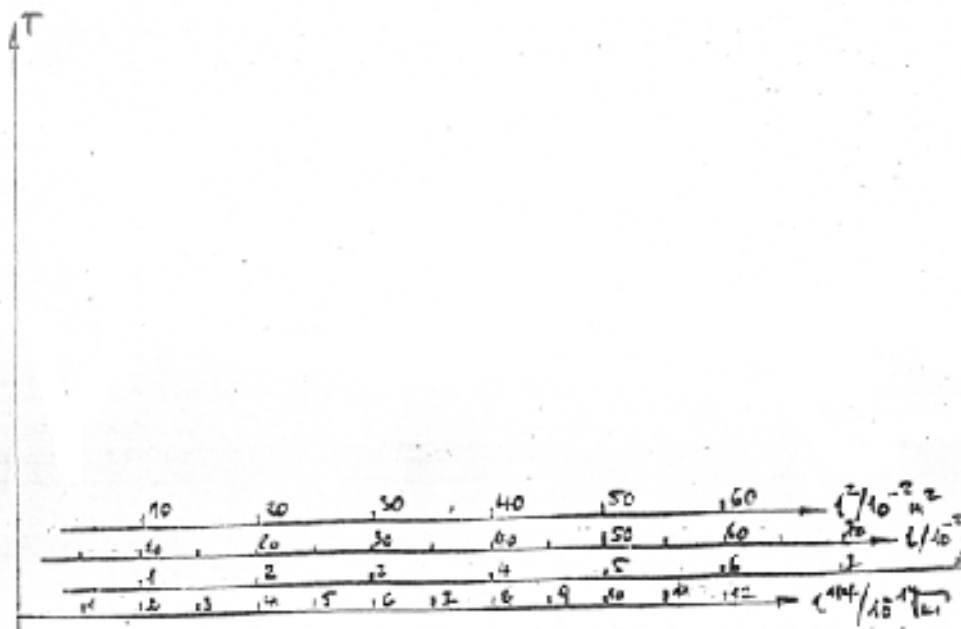
I Όλη η παραπάνω μεθοδολογία για την εξεύρεση της συνάρτησης T , γίνεται σύμφωνα με τον παρακάτω πίνακα II. Στην πρώτη στήλη καταγράφονται οι μετρήσεις της περιόδου T .

Οι άλλες στήλες αναφέρονται στο μήκος νήματος και συγκεκριμένα στο $l^{\frac{1}{4}}, l^{\frac{1}{2}}, l^1, l^2$, δηλαδή σε μεγέθη που είναι υπολογίσιμα, εφόσον το μήκος νήματος είναι γνωστό.

T/s	$l^{\frac{1}{4}}/\sqrt[4]{m}$	$l^{\frac{1}{2}}/\sqrt{m}$	l^1/m	l^2/m^2
			$0 \cdot 10^{-2}$	$0 \cdot 10^{-2}$
			10	1
			20	4
			30	9
			40	16
			50	25
			60	36
			70	49

II Κατασκευή γραφικών παραστάσεων

Τα αποτελέσματα $T = f(l^{\frac{1}{4}}), T = f(l^{\frac{1}{2}}), T = f(l^1), T = f(l^2)$, μεταφράζονται σε γραφικές παραστάσεις. Οι τέσσερις αυτές γραφικές παραστάσεις σχεδιάζονται σε μια εικόνα, η οποία έχει κοινή τεταγμένη, αλλά διαφορετική τετμημένη. Οι υποδιαιρέσεις της τετμημένης επιλέγονται κατά τρόπο ώστε να καλύπτεται όλος ο χώρος. Όλες οι καμπύλες ξεκινούν από 0|0.



2.3) Μαθηματική διαπίστωση της συνάρτησης $T=f(l)$ στην μορφή $T = c_1 l^{\nu} + c_2$

I Προσδιορισμός των σταθερών c_1 και c_2 από το γράφημα το οποίο ισχύει για το μαθηματικό εκκρεμές ως προς την τιμή και μονάδα μέτρησης

II Σύγκριση της πειραματικής σχέσης με την θεωρητική σχέση $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ και υπολογισμός της επιτάχυνσης g

III Υπολογισμός του σφάλματος γ σε σύγκριση με την τιμή της βιβλιογραφίας ($g = 9.81 \frac{m}{s^2}$)

3) Μετρήσεις σε μεγάλο πλάτος (π.χ. $x = 10\text{cm}$)

Οι μετρήσεις σε διαφορετικά μήκη νήματος και η αξιολόγηση των μετρήσεων γίνεται με ευθύνη του πειραματιστή

4) Μετρήσεις σύμφωνα με εδάφιο 2, αλλά με σφαιρίδιο διπλής μάζας

Οι μετρήσεις της περιόδου, η καταχώρηση σε πίνακα και η αξιολόγηση των μετρήσεων γίνεται με ευθύνη του πειραματιστή