

Άσκηση M2

Σπειροειδές ελατήριο

Νόμος του Hooke και εξίσωση δυνάμεων

Μεταξύ της τάσης και της ελαστικής παραμόρφωσης ενός σώματος υπάρχει μια απλή σχέση, ο νόμος του Hooke:

Οι ελαστικές τάσεις και οι παραμορφώσεις είναι ανάλογες. Ειδικά, αν η εφαρμοζόμενη τάση (δύναμη ανα εμβαδόν) μηδενιστεί, τότε η παραμόρφωση εξαφανίζεται, δηλαδή το σώμα επιστρέφει στην αρχική του μορφή. Ο νόμος του Hooke είναι ένας εμπειρικός νόμος με περιορισμένη περιοχή ισχύος, και αυτό γιατί είναι σωστός μόνο σε μικρές παραμορφώσεις.

Για ένα σύρμα π.χ., με μήκος l , η διατομή S , στο οποίο εφαρμόζεται η δύναμη F , συνεπώς

$$\text{η τάση } \sigma = \frac{F}{S}, \text{ πειραματικά διαπιστώνεται ότι η επιμήκυνση είναι}$$
$$\Delta L = \frac{1}{E} * \sigma * L \Rightarrow$$
$$F = E * \frac{S}{L} * \Delta L$$

Όπου E είναι μια υλική σταθερά που καλείται μέτρο ελαστικότητας.

Κατά την επιμήκυνση ενός σπειροειδούς ελατηρίου, το υλικό καταπονείται προπαντός 'στρεπτικά'. Οι ελαστικές ιδιότητες του ελατηρίου αυτού καθορίζονται, εκτός από τις γεωμετρικές διαστάσεις του, από το μέτρο της στρέψης του υλικού. Επ'αυτού, μεταξύ της σταθεράς K του ελατηρίου, της διαμέτρου του σύρματος d , της μέσης διαμέτρου των σπειρών D , του αριθμού των σπειρών N και του μέτρου στρέψης G ισχύει η σχέση:

$$K = G * \frac{d^4}{8ND^3}$$

Η εφαρμοζόμενη στο ελατήριο εξωτερική δύναμη F προκαλεί την επιμήκυνση του ελατηρίου και ξεκινάει την δύναμη επαναφοράς, η οποία σχετίζεται άμεσα με την ίδια την επιμήκυνση και με την σταθερά του ελατηρίου K . Δι'αυτού προκύπτει η σχέση:

$$F = -K * x$$

Η δύναμη αυτή αποτελεί το ένα σκέλος της εξίσωσης δυνάμεων. Το δεύτερο σκέλος είναι – σύμφωνα με τον δεύτερο νόμο του NEWTON - $F = m * \ddot{x}$

Σύμφωνα με τις σχέσεις $F = -K * x$ και $F = m * \ddot{x}$, για την εξίσωση δυνάμεων $m * \ddot{x} = -K * x \Rightarrow$

λαμβάνεται:

$$\ddot{x} + \frac{K}{m} * x = 0$$

Από τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι η δύναμη επαναφοράς ισούται με το αρνητικό γινόμενο της σταθεράς του ελατηρίου επί την απόσταση της επιμήκυνσης. Η δύναμη αυτή

αποτελεί το ένα σκέλος της εξίσωσης των δυνάμεων. Το δεύτερο σκέλος είναι σύμφωνα με τον δεύτερο νόμο του Newton:

$$F = m\ddot{x}$$

Συνεπώς, από τις σχέσεις $F = -kx$, για την εξίσωση δυνάμεων λαμβάνεται:

$$m\ddot{x} = -kx \Rightarrow \ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$

Εξίσωση κίνησης

Η εξίσωση κίνησης, $x = f(t)$ προκύπτει από την λύση της εξίσωσης δυνάμεων $m \cdot \ddot{x} = -K \cdot x \Rightarrow$

$$\ddot{x} + \frac{K}{m}x = 0$$

και είναι μια διαφορική εξίσωση, η οποία στο Α εξάμηνο δεν μπορεί να λυθεί, επειδή δεν έχουμε τις σχετικές μαθηματικές γνώσεις. Μπορεί να λυθεί με έναν πλάγιο τρόπο, ο οποίος συνίσταται στην λύση της Αρχής Διατήρησης της Ενέργειας. Γι'αυτήν ισχύει:

$$\frac{m}{2} \cdot u^2 + \frac{K}{2} \cdot x^2 = E \text{ όπου } E \text{ είναι η ολική ενέργεια, η οποία προκύπτει όταν } u = 0 \text{ και } x =$$

$$x_m. \text{ Επομένως ισχύει: } E = \frac{K}{2} \cdot x_m^2$$

$$\text{από την σχέση } x = \sqrt{\frac{2 \cdot E}{k}} \cdot \eta\mu\left(\sqrt{\frac{K}{m}} \cdot t + \varphi_0\right) \text{ η κυκλική συχνότητα είναι: } \omega = \sqrt{\frac{K}{m}}$$

Από την παραπάνω σχέση της κυκλικής συχνότητας, για την περίοδο της ταλάντωσης θα προκύπτει: $T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{m}{K}}$

Συνεπώς μια μάζα, η οποία στερεώνεται στο ελεύθερο άκρον ενός κατακόρυφα αναρτημένου ελατηρίου και στην οποία δίδεται μια ορισμένη ορμή, εκτελεί μια αρμονική ταλάντωση γύρω από την θέση ισορροπίας. Το μέγεθος Φ_0 είναι μια σταθερά ολοκλήρωσης και καθορίζει την απομάκρυνση x της μάζας από την θέση ισορροπίας την στιγμή της έναρξης της κίνησης.

Ενεργός μάζα

Όταν στο ελεύθερο άκρο του ελατηρίου δεν στηρίζεται κανένα σώμα, δηλαδή όταν έχουμε μηδενική μάζα ($m = 0$), τότε και η περίοδος της ταλάντωσης είναι μηδέν ($T = 0$). Το πόρισμα αυτό όμως δεν είναι σωστό, αφού και το ίδιο το ελατήριο έχει μάζα. Άρα η μάζα του ελατηρίου M_e θα πρέπει να ληφθεί υπόψιν. Για την απόδειξη της ενεργούς συμμετοχής της μάζας του ελατηρίου στην ταλάντωση, ισχύει η Αρχή Διατήρησης της

Ενέργειας, σύμφωνα με την οποία το άθροισμα της κινητικής και της δυναμικής ενέργειας θα πρέπει να είναι σταθερό.

$$\text{Η δυναμική ενέργεια του εκκρεμούς στην θέση } x \text{ είναι : } E_{\Delta} = \int_0^x kx dx = \frac{k}{2} * x^2$$

Η κινητική ενέργεια αποτελείται από δύο συνιστώσες, την κινητική ενέργεια του αναρτημένου σώματος και την κινητική ενέργεια του ελατηρίου. Επομένως ισχύει:

$$E_k = \frac{m}{2} * u^2 + E_{k,E} \text{ Για τον υπολογισμό της κινητικής ενέργειας του ίδιου του ελατηρίου,}$$

θεωρούμε το ελατήριο διαιρεμένο σε πολλά μικρά κομμάτια μάζας dMe , στα οποία αντιστοιχεί το μήκος dL . Εφόσον η μάζα του σώματος έχει μετατοπιστεί από την θέση ισορροπίας κατά x και εφόσον η απόσταση του στοιχείου μάζας dMe από το σημείο ανάρτησης είναι L , τότε το σημείο αυτό θα εκτραπεί από την θέση ισορροπίας του κατά μια απόσταση η οποία θα ισούται με το πηλίκο της απόστασης κατά την οποία έχει μετατοπιστεί η μάζα m του σώματος (x) προς την απόσταση του στοιχείου μάζας dMe από το σημείο ανάρτησης (L).

Έτσι, για την ολική ενέργεια του εκκρεμούς, προκύπτει:

$$E_{ολ} = E_{\Delta} + E_k = E_{\Delta} + \frac{m}{2} * u^2 + \frac{1}{3} * \frac{mE}{2} * u^2 \Rightarrow$$

$$E_{ολ} = \frac{k}{2} * x^2 + \frac{1}{2} * \left(m + \frac{mE}{3}\right) * u^2$$

Συνεπώς, στην ταλάντωση το ελατήριο συμμετέχει με το $\frac{1}{3}$ της μάζας του. Η μάζα αυτή

καλείται ενεργός μάζα του ελατηρίου και είναι: $m_{ev} = \frac{m_E}{3}$

Τροποποιημένες σχέσεις

Το γεγονός ότι στην ταλάντωση συμμετέχει και η ενεργός μάζα του ελατηρίου, συνεπάγεται την τροποποίηση της εξίσωσης συνάμεων, της εξίσωσης κίνησης, της κυκλικής συχνότητας και δι' αυτού και της περιόδου ταλάντωσης.

Από την παραγωγή της ολικής ενέργειας ως προς τον χρόνο προκύπτει η τροποποιημένη εξίσωση δυνάμεων: $\left(m + \frac{mE}{3}\right) * \ddot{x} + kx = 0$

Αντί της εξίσωσης $x = \sqrt{\frac{2 * E}{k} * \eta \mu(\sqrt{\frac{K}{m} * t + \varphi_0})}$ για την συγκεκριμένη εξίσωση πλέον

ισχύει: $x = \sqrt{\frac{2E}{k} * \eta \mu(\sqrt{\frac{k}{m + \frac{m_E}{3}} * t + \varphi_0})}$ και επομένως: $\omega^2 = \frac{k}{m + \frac{m_E}{3}}$ και

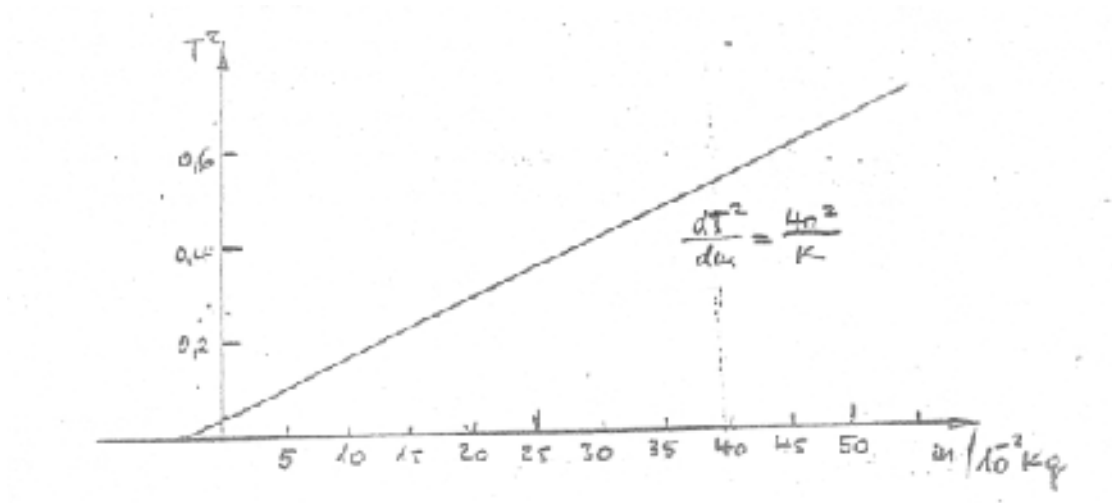
$$T^2 = 4\pi^2 * \frac{m + \frac{m_E}{3}}{k}$$

Από την τελευταία σχέση, φαίνεται ότι η συνάρτηση $T^2 = F(m)$ είναι ευθεία. Επομένως προκύπτει σε $m=0$ $T^2 = \frac{4\pi^2}{k} * \frac{mE}{3}$

Στο σημείο αυτό, η ευθεία τέμνει τον άξονα T^2 . Απεναντίας, όταν $T = 0$ τότε προκύπτει:

$$\frac{dT^2}{dm} = \frac{4e\pi^2}{k} \Rightarrow$$

$$k = \frac{4e\pi^2}{\frac{dT^2}{dm}}$$



Σχήμα 2 – Υπολογισμός της ενεργούς μάζας και της σταθεράς

Από την παραπάνω σχέση, φαίνεται καθαρά, ότι η ενεργός μάζα δεν επηρεάζει την σταθερά του ελατηρίου. Με γνωστή την ενεργό μάζα ο προσδιορισμός της σταθεράς του ελατηρίου είναι μια εύκολη υπόθεση. Το ίδιο ισχύει και αντίστροφα. Στις περιπτώσεις αυτές, το κάθε φορά άγνωστο μέγεθος, υπολογίζεται π.χ. με την βοήθεια της σχέσης

$$(m + \frac{mE}{3}) * \ddot{x} + kx = 0 \quad \text{μετρώντας την επιμήκυνση } x. \text{ Έτσι για } \frac{mE}{3} \text{ προκύπτει:}$$

$$\frac{mE}{3} = \frac{kx}{g} - m \text{ και αντίστοιχα για την σταθερά του ελατηρίου: } k = \frac{(m + \frac{mE}{3}) * g}{x}$$

Διχοτόμηση και σταθερά ελατηρίου

Η σταθερά του ελατηρίου εξαρτάται, εκτός από το υλικό του κατασκευαστή, και από το μήκος του ελατηρίου. Σε ένα ελατήριο με K_1 και L_1 εφαρμόζεται μια δύναμη F_1 , η οποία επιμηκύνει το ελατήριο κατά απόσταση x_1 . Το μισό μέρος του ελατηρίου επιμηκύνεται επομένως κατά $\frac{X_1}{2} = X_2$. Αυτό σημαίνει ότι η δύναμη F εφαρμόζεται πλήρως σε κάθε σημείο του ελατηρίου. Αν τώρα το ελατήριο διχοτομηθεί, εφαρμόζοντας και πάλι την ίδια δύναμη, η δύναμη αυτή θα ισούται με το γινόμενο της σταθεράς του ελατηρίου επί την απόσταση επιμήκυνσης. Και επειδή έχουμε $\frac{X_1}{2} = X_2$, θα έχουμε $K_2 = 2K_1$

Συνεπώς, με την διχοτόμηση του ελατηρίου, η σταθερά του ελατηρίου διπλασιάζεται. Με τον τεμαχισμό του ελατηρίου σε n μέρη, η σταθερά του ενός μέρους ισούται με $K_n = n * K_1$. Το ίδιο αποτέλεσμα λαμβάνεται και με την βοήθεια της δυναμικής ενέργειας. Το ελατήριο μήκους L_1 και σταθεράς K_1 επιμηκύνεται κατά X_1 . Η αντίστοιχη δυναμική ενέργεια είναι ίση με $E_\delta = \frac{K_1 X_1^2}{2}$. Τώρα το ελατήριο διχοτομείται σε δύο ίσα μέρη. Στο ένα μέρος από αυτά εφαρμόζεται μια τέτοια δύναμη, ώστε η επιμήκυνση να ισούται με $X_2 = \frac{X_1}{2}$. Το ίδιο γίνεται και στο δεύτερο μέρος του ελατηρίου, ώστε η ολική μετατόπιση να ισούται με X_1 . Το καινούριο μισό ελατήριο έχει μια δυναμική ενέργεια, η οποία ισούται με το μισό της δυναμικής ενέργειας του αρχικού ελατηρίου.

Πρακτικό μέρος

1. Ζύγισμα του ελατηρίου και υπολογισμός της ενεργούς μάζας
2. Μέτρηση του μήκους l_0 του ελατηρίου σε οριζόντια θέση
3. Μετρήσεις της επιμήκυνσης και αξιολόγηση
- 3.1. Τοποθέτηση μαζών στο ελεύθερο άκρο του ελατηρίου και μέτρηση της επιμήκυνσης σύμφωνα με τον παρακάτω πίνακα

m / g	F / N	l_0 / m	l / m	$x = l - l_0 / m$
0				
100				
200				
300				
400				
500				

3.2. Κατασκευή γραφήματος σύμφωνα με την σχέση $(m + \frac{mE}{3}) \ddot{x} + kx = 0 \Rightarrow$

$$mg = kx - \frac{mE}{3}g \Rightarrow$$

$$F = kx - m_{ev}g$$

Σαν τεταγμένη επιλέγεται η δύναμη F και σαν τεμνημένη η επιμήκυνση x

Υπολογισμός της ενεργούς μάζας από την τομή της ευθείας με τον άξονα F και σε γνωστή σταθερά του ελατηρίου K από την τομή με τον άξονα x

Υπολογισμός της σταθεράς του ελατηρίου από την κλίση της ευθείας. Ισχύει $\frac{dF}{dX} = k$

4. Μετρήσεις της περιόδου και αξιολόγηση

4.1. Τοποθέτηση μαζών στο ελεύθερο άκρο του ελατηρίου, ταλάντωση του συστήματος και μέτρηση της περιόδου σύμφωνα με τον παρακάτω πίνακα (το πλάτος της ταλάντωσης να μην υπερβαίνει το 20)

m/g	Ταλάντωσης η	Χρόνος t/s για η τελαντ.	$T = t/\eta$	T^2/s^2
100	20			
200	20			
300	20			
400	20			
500	20			

4.2. Κατασκευή γραφήματος σύμφωνα με την σχέση $K_2 = 2K_1$ και το σχήμα 2

Υπολογισμός της σταθεράς του ελατηρίου από την κλίση του γραφήματος

Υπολογισμός της ενεργούς μάζας από τις τομές του γραφήματος με τους άξονες T^2 και m.

5. Σύγκριση αποτελεσμάτων

5.1. Σύγκριση των τιμών για την σταθερά του ελατηρίου των δύο γραφημάτων.

5.2. Σύγκριση των τιμών για την ενεργό μάζα των δύο γραφημάτων (4 τιμές) και της ζύγισης

6. Μέτρο στρέψης

Μέτρηση του αριθμού σπειρών N του ελατηρίου, της διαμέτρου d του σύρματος και της διαμέτρου D των σπειρών

Υπολογισμός του μέτρου στρέψης σε γνωστή σταθερά ελατηρίου K σύμφωνα με την

$$\text{σχέση } k = G \frac{d^4}{8ND^3}$$