

Άσκηση M13

Στάσιμα διαμήκη κύματα στο σπειροειδές ελατήριο

Θεωρία του στάσιμου κύματος

Ας υποθέσουμε ότι μέσα σε κάποιο μέσο οδεύουν δύο επίπεδα κύματα ίδιου πλάτους και μήκους κύματος στην ίδια διεύθυνση αλλά με αντιθετη φορά. Δι'επαλληλίας σχηματίζεται μια χαρακτηριστική εικόνα συμβολής, η οποία ονομάζεται στάσιμο κύμα. Αυτό μπορεί, για παράδειγμα, να παραχθεί καθώς ένα κύμα αφήνεται να ανακλαστεί σε μια οριακή διαχωριστική επιφάνεια. Έστω ότι το κύμα οδεύει προς θετικές τιμές του x , ανακλάται στο σημείο $x=0$ (όπου βρίσκεται η διαχωριστική επιφάνεια) και κινείται μετά προς αρνητικές τιμές του x . Στο σημείο ανάκλασης οι φάσεις ταλάντωσης των δύο κυμάτων μπορούν να διαφέρουν μεταξύ τους. Αυτό οφείλεται στο ότι η φάση μπορεί κατά την ανάκλαση να μεταβεί αλτικά σε άλλη τιμή. Το φαινόμενο αυτό ονομάζεται άλμα φάσης.

Διακρίνονται δύο ειδικές περιπτώσεις:

A) χωρίς άλμα φάσης ($\phi=0$)

$$E_{\pi} = E_m \sin(kx - \omega t)$$

$$E_A = E_m \sin(kx + \omega t)$$

Η πρώτη σχέση αναφέρεται στο προσπίπτον κύμα και η δεύτερη αναφέρεται στο ανακλώμενο κύμα.

$$E' = 2E_m \sin \omega t \quad k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

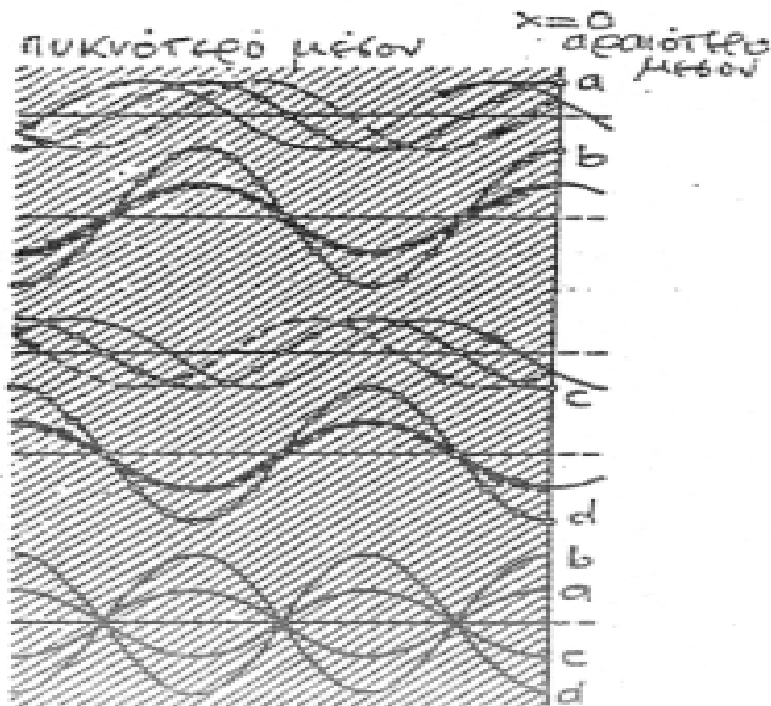
Είναι ολοφάνερο, ότι τα ακρότατα (μέγιστα και ελάχιστα) σχηματίζονται στα σημεία όπου $\sin kx = \pm 1$, δηλαδή όπου $kx = \frac{2\pi}{\lambda} x = 0\pi, 1\pi, 2\pi, \dots, n\pi \pm m\pi$ με $m=0,1,2,3,\dots,n$

Ιδιαίτερο ενδιαφέρον έχει το σημείο $x = 0$, όπου υλοποιείται η ανάκλαση. Φαίνεται ότι εκεί σχηματίζεται κοιλία. Δεν υπάρχει καμία αμφιβολία ότι σ'αυτά και μόνο σ'αυτά τα σημεία σχηματίζονται κοιλίες. Ένα άλλο ζήτημα είναι αν αυτές οι κοιλίες έχουν μέγιστο δυνατό πλάτος είτε όχι. Κατά την σχέση $k = \frac{2\pi}{\lambda}$, το πλάτος είναι: $E' = 2E_m \sin \omega t$

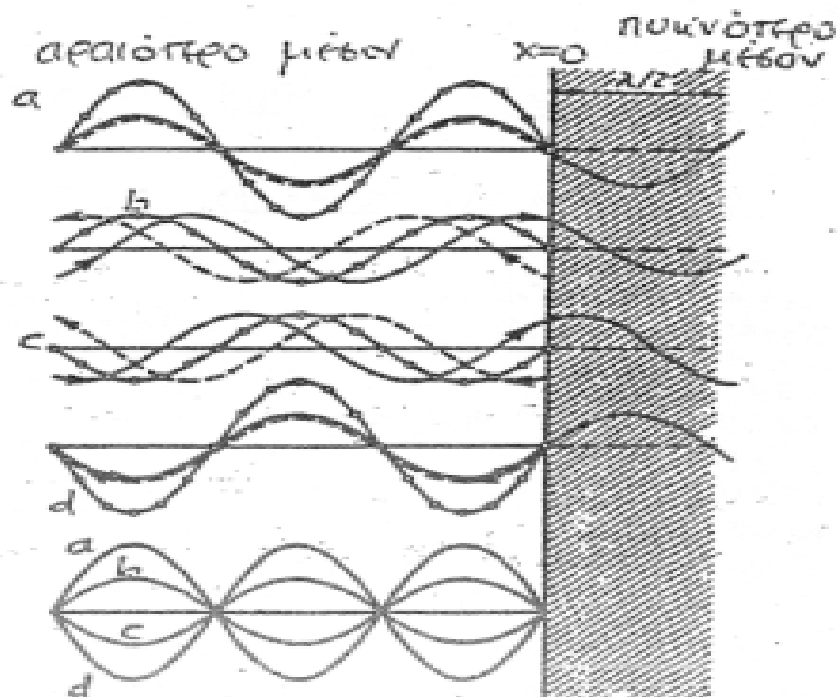
Επομένως, το μέγιστο δυνατό πλάτος είναι $2E_m$. Αυτό σημαίνει ότι το εκάστοτε δυνατό πλάτος εξαρτάται από τον συντελεστή $\sin \omega t$, δηλαδή από την κατάσταση φάσης. Το ζήτημα απεικονίζεται αρκετά καλά στο σχήμα 1. Στο σχήμα 1, η κατάσταση φάσης στο σημείο $x = 0$, προκύπτει από $\sin \omega t = \frac{1}{2} \Rightarrow \omega t = \frac{\pi}{3}$. Επομένως, για το πλάτος προκύπτει:

$E' = 2E_m$. Στο σχήμα 2, ισχύει αντίστοιχα: $\sin \omega t = 1 \Rightarrow \omega t = 0$. Για το πλάτος λαμβάνεται δι'αυτού: $E' = 2E_m$ κλπ.

Στο σημείο της ανάκλασης παρατηρείται κοιλία της κίνησης, όταν το άλμα φάσης είναι $\phi=0$. Για να σχηματιστεί κοιλία, τα σωματίδια ταλάντωσης θα πρέπει να μπορούν να ταλαντώνονται ελεύθερα. Άρα πρόκειται για ανάκλαση στο ελεύθερο άκρον είτε στο αραιότερο άκρον. Το ανακλώμενο κύμα κινείται έτσι όπως ανενόχλητα στο συνορεύον μέσον (κατοπτρισμός στο σημείο ανάκλασης).



Σχήμα 1 – Σχηματισμός στάσιμου κύματος δι'ανάκλασης στο αραιότερο μέσον. (Το ανακλώμενο κύμα επιστρέφει έτσι όπως το προσπίπτον κύμα θα προχωρούσε στο όμορο μέσον)



Σχήμα 2 – Σχηματισμός στάσιμου κύματος δι'ανάκλασης στο πυκνότερο μέσον. (Το ανακλώμενο κύμα επιστρέφει έτσι όπως το προσπίπτον κύμα θα προχωρούσε στο όμορο μέσον μετά από άλμα

$$\frac{\lambda}{2}$$

Β) άλμα φάσης από $\phi = \pi$

Στην περίπτωση αυτή ισχύουν:

$$E_{\pi} = E_m \sin(kx - \omega t)$$

$$E_A = E_m \sin(kx + \omega t + \pi) \Rightarrow$$

$$E_A = E_m [\sin(kx + \omega t) \sin \pi - \eta \mu(kx + \omega t) \eta \mu \pi] \Rightarrow$$

$$E_A = -E_m \sin(kx + \omega t)$$

Από την επαλληλία των δύο κυμάτων και δια τριγωνομετρικών μετατροπών, προκύπτει:

$$E = E_{\pi} + E_A = E_m \sin(kx - \omega t) - E_m \sin(kx + \omega t) \Rightarrow$$

$$E = E_m [\sin kx \cos \omega t + \eta \mu kx \eta \mu \omega t] - E_m [\sin kx \cos \omega t - \eta \mu kx \eta \mu \omega t] \Rightarrow$$

$$E = 2E_m \eta \mu \omega t \eta \mu kx$$

$$\text{και με } E' = 2E_m \eta \mu \omega t$$

$$E = E' \eta \mu k x$$

Τα ακρότατα (μέγιστα και ελάχιστα) σχηματίζονται στα σημεία όπου $\eta \mu k x = \pm 1$, δηλαδή

$$\begin{aligned} kx = \frac{2\pi}{\lambda} x &= 1\frac{\pi}{2}, 3\frac{\pi}{2}, 5\frac{\pi}{2}, \dots, (m + \frac{1}{2})\pi \\ \text{όπου} \quad kx &= \frac{\lambda}{2\pi} (m + \frac{1}{2})\pi = (m + \frac{1}{2}) \frac{\lambda}{2} \end{aligned} \quad \text{με } m = 0, 1, 2, 3, \dots, n$$

Το αν στα σημεία αυτά, τα ακρότατα έχουν μέγιστη δυνατή τιμή $2E_m$, αυτό εξαρτάται από την κατάσταση φάσης, εφόσον $E' = 2E_m \eta \mu \omega t$

Απεναντίας, οι κόμβοι, σχηματίζονται στα σημεία, όπου

$$E = 2E_m \eta \mu \omega t \eta \mu k x = E' \eta \mu k x = 0 \quad \text{δηλαδή όπου}$$

$$kx = \frac{2\pi}{\lambda} x = 0\pi, 1\pi, 2\pi, 3\pi, \dots, n\pi = m\pi \quad \text{με } m = 0, 1, 2, 3, \dots, n$$

$$x = \frac{\lambda}{2\pi} m\pi = m \frac{\lambda}{2}$$

Στο σημείο ανάκλασης σχηματίζεται κόμβος της κίνησης, όταν το άλμα φάσης είναι $\phi = \pi$. Ο κόμβος κίνησης παρατηρείται δηλαδή όταν στο σημείο ανάκλασης τα σωματίδια ταλάντωσης δεν έχουν ελευθερία κίνησης. Άρα πρόκειται για ανάκλαση στο δεύτερο άκρον είτε στο πυκνότερο μέσον. Στο σημείο ανάκλασης τα σωματίδια ταλάντωσης υφίστανται μια ορμή με αντίθετη φορά. Αυτό μεταφράζεται σε άλμα φάσης στο μισό μήκος κύματος. Το φαινόμενο αυτό σημαίνει, ότι τα κύματα ανακλώνται έτσι, όπως θα προχωρούσαν ανενόχλητα μετά από μισό μήκος κύματος.

Στάσιμα διαμήκη κύματα στο σπειροειδές ελατήριο

Ένα σπειροειδές ελατήριο μήκους L , στερεωμένο στα δύο άκρα του, επιμηκύνεται και συμπίεζεται από έλασμα, το οποίο τίθεται σε ταλαντωτική κίνηση από έναν ηλεκτρομαγνήτη. Οι διαταραχές αυτές που επαναλαμβάνονται με συχνότητα f , κινούνται σαν διαμήκες κύμα μήκους λ και ταχύτητας u προς το ελατήριο. Τα μεγέθη f, λ και u συνδέονται μεταξύ τους με την εξίσωση: $u = f\lambda$

Τα στάσιμα κύματα σχηματίζονται από την ανάκλασή τους στα ακίνητα άκρα του ελατηρίου. Στα ίδια τα άκρα παρατηρούνται κόμβοι κίνησης. Όταν η διέγερση του ελατηρίου γίνεται με την θεμελιώδη συχνότητα f_1 , τότε μεταξύ των δύο κόμβων στα ακίνητα άκρα, παρατηρείται μια μοναδική κοιλία ($n=1$). Όταν η διέγερση γίνεται με την διπλάσια συχνότητα από αυτήν της θεμελιώδους ($F_2 = 2F_1$), τότε μεταξύ των δύο άκρων παρατηρούνται δύο κοιλίας. Αυτό σημαίνει ότι το μήκος L του ελατηρίου καλύπτεται από ένα μήκος κύματος ($\lambda_2 = \frac{2L}{2}$). Όταν η διέγερση γίνεται με την τριπλάσια συχνότητα από

αυτήν της θεμελιώδους ($F_3 = 3F_1$), τότε μεταξύ των άκρων παρατηρούνται τρεις κοιλίες ($n=3$). Αυτό σημαίνει ότι το μήκος κύματος λ_3 καλύπτει τα $\frac{2}{3}$ του μήκους του ελατηρίου ($\lambda_3 = \frac{2L}{3}$). Γενικότερα, όταν το ελατήριο διεγείρεται με συχνότητα n φορές της θεμελιώδους συχνότητας ($F_n = nF_1$), τότε μεταξύ των άκρων σχηματίζονται n κοιλίες. Άρα το μήκος κύματος λ_n καλύπτει τα $\frac{2L}{n}$ του μήκους του ελατηρίου ($\lambda_n = \frac{2L}{n}$).

Σχηματίζοντας στις άνω περιπτώσεις το γινόμενο από f και λ προκύπτει:

$$\text{Για } n = 1 : F_1 \lambda_1 = F_1 \frac{2l}{1} = 2F_1 l$$

$$\text{Για } n = 2 : F_2 \lambda_2 = (2F_1) \left(\frac{2l}{2} \right) = 2F_1 l$$

$$\text{Για } n = 3 : F_3 \lambda_3 = (3F_1) \left(\frac{2l}{3} \right) = 2F_1 l$$

.

.

.

.

$$\text{Για } n = m : F_m \lambda_m = (mF_1) \left(\frac{2l}{m} \right) = 2F_1 l = u$$

Σε όλες τις περιπτώσεις προκύπτει το ίδιο αποτέλεσμα. Από την σχέση $u = f\lambda$ είναι ήδη γνωστό ότι αυτό ισούται με την ταχύτητα διάδοσης u της φάσης εντός του δεδομένου κλειστού συστήματος. Επομένως ισχύει γενικευμένα: $F_n \frac{2l}{n} = u \Rightarrow F = n \frac{u}{2l}$

Από τους παραπάνω συλλογισμούς προκύπτει ότι η ταχύτητα διάδοσης είναι σταθερή παρότι τα μεγέθη F και λ είναι μεταβλητά. Αυτό σημαίνει ότι η ταχύτητα διάδοσης καθορίζεται από άλλους παράγοντες. Οι παράγοντες αυτοί είναι αποκλειστικά η διάπλαση του μέσου διάδοσης, ενώ το μέσο διάδοσης είναι το ίδιο το ελατήριο.

Θεωρώντας την ελαστική ράβδο, της οποίας μια ειδική περίπτωση αποτελεί το σπειρωειδές ελατήριο, διαπιστώνεται ότι για την δύναμη F που προκαλεί εφελκυσμό είτε σύνθλιψη κατά Δl , ισχύει:

$F = E \frac{A}{l} \Delta l$ όπου A είναι η διατομή και E ο δείκτης ελαστικότητας. Δια σύγκρισης με το γνωστό ελατήριο έπεται η σταθερά του ελατηρίου

$$D = \frac{F}{\delta l} = E \frac{A}{l}$$

Από την θεωρία της ελαστικής ράβδου προκύπτει επίσης:

$$u = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \Rightarrow u^2 = \frac{E}{\rho} = \frac{1}{\rho} E = \frac{1}{\frac{m}{Al}} \frac{Dl}{A} = l^2 \frac{D}{m} \Rightarrow$$

$$u = l \sqrt{\frac{D}{m}}$$

Άρα η ταχύτητα διάδοσης εξαρτάται πράγματι από τα μεγέθη διάπλωσης του ελατηρίου (l,m,D)

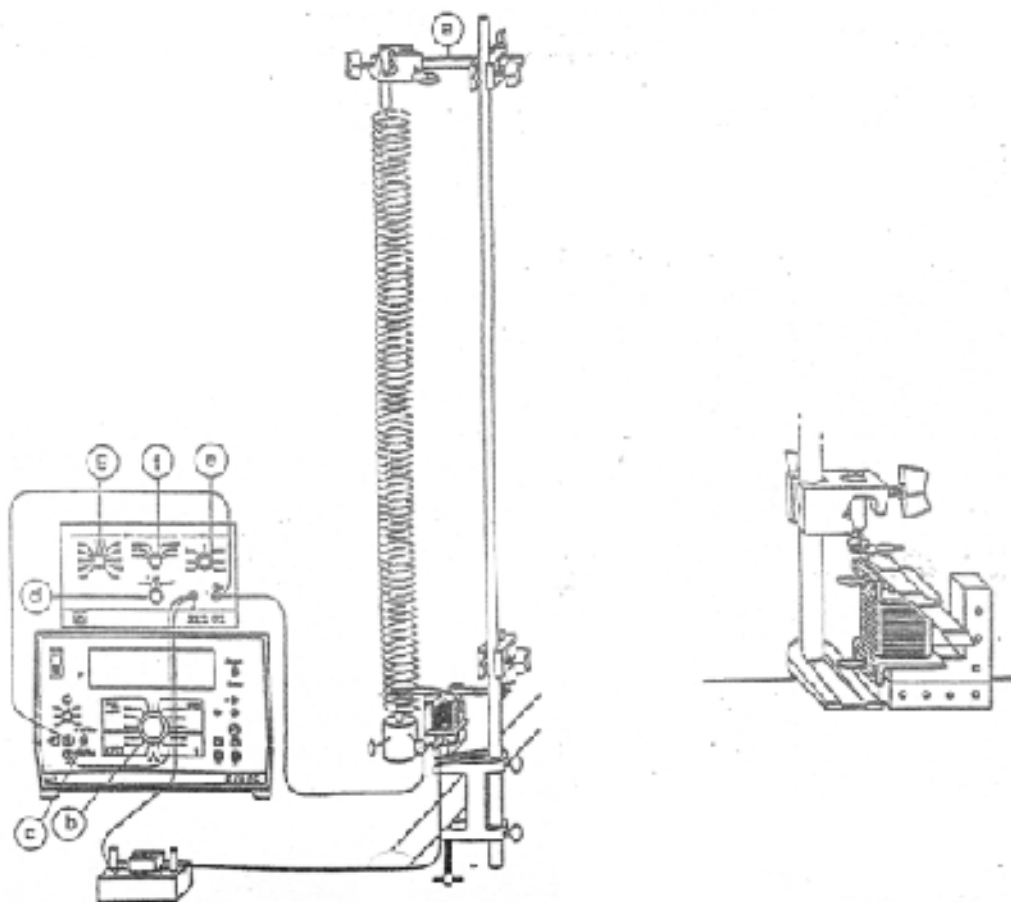
Από την σύγκριση των σχέσεων $F = n \frac{u}{2l}$ και $u = l \sqrt{\frac{D}{m}}$ για $n = 1$ προκύπτει:

$$u = 2lF_1 = l \sqrt{\frac{D}{m}} \Rightarrow F_1 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{D}{m}}$$

Αυτό σημαίνει εν συνέχεια, ότι η διάπλωση του ελατηρίου δεν καθορίζει μονοσήμαντα μόνο την ταχύτητα διάδοσης u, αλλά και την θεμελιώδη συχνότητα F_1 , επομένως και το μήκος κύματος λ_1 του στάσιμου κύματος.

Πειραματική διάταξη

Η πειραματική διάταξη κατασκευάζεται σύμφωνα με το παρακάτω σχήμα. Ο πεταλοειδής πυρήνας με το πηνίο τοποθετείται πάνω στον σιδηροπυρήνα. Ο ρευματολήπτης με τον οπλισμό ταλάντωσης τοποθετείται πάνω στην μούφα (= η απόσταση μεταξύ του πεταλοειδούς πυρήνα και του ιπλισμού ταλάντωσης – περίπου 1mm)



Σχήμα 3 – Πεοραματική διάταξη για την παραγωγή στάσιμων κυμάτων στπ σπειροειδές ελατήριο (a – ράβδος τοποθέτησης, b – διακόπτης, c – διακόπτης ευαισθητότητας, d – διακόπτης γεννήτριας, e – ρυθμιστή ς τάσης εξόδου, f – διακόπτης συντελεστή συχνότητας, g – ρυθμιστής συχνότητας)

Το ελατήριο τοποθετείται κατακόρυφα (όρθιο). Το σημείο στερέωσης της ράβδου (α) επιλέγεται έτσι, ώστε το μήκος του ελατηρίου να είναι $L = 70\text{cm}$. Το ελατήριο σπρώχνεται πάνω από τον οπλισμό ταλάντωσης. Το σημείο στερέωσης του οπλισμού ταλάντωσης πρέπει ενδεχομένως να ρυθμιστεί έτσι, ώστε να καλύπτεται μια σπείρα του ελατηρίου.

Υποδείξεις

A) Η δίοδος στο κύκλωμα του ηλεκτρομαγνήτη αποκόπτει τη μισή φάση της τάσης της γεννήτριας. Ο οπλισμός ταλάντωσης έλκεται δι'αυτού σε κάθε πλήρη περίοδο της τάσης εξόδου μόνο μια φορά. Η συχνότητα διέγερσης μειώνεται έτσι κατά το ήμισυ (κάτι το οποίο αποτελεί ένα πλεονέκτημα για την ρύθμιση της συχνότητας).

Όταν η συχνότητα μετριέται με την συσκευή Π(575 45), τότε η συχνότητα συντονισμού στην περιοχή 'Hz' (χρόνος πύλης 1s) πρέπει να υπολογιστεί η εξεύρεση της μέσης τιμής από 5...10 μετρήσεις.

Ρυθμίσεις

Ρύθμιση στην ψηφιακό απαριθμητή:

Διακόπτης b: μέτρηση συχνότητας, χρόνος μέτρησης 10s

Διακόπτης ευαισθησίας e: 1.5Vss

Ρύθμιση στην γεννήτρια:

Διακόπτης d: στην θέση μαιανδρικής μορφής

Διακόπτης e (τάση εξόδου): τέρμα δεξιά ($\pm 6V_s$)

Διακόπτης f (συντελεστής συχνότητας): χ_1

Δεδομένες τιμές μεγεθών

Από τα μηχανικά μεγέθη του ελατηρίου θεωρούνται ως δεδομένα:

Η μάζα $m=80g$

Το μήκος του ελατηρίου $L=66cm$

Η σταθερά του ελατηρίου $D=2.7N/m$

Διεξαγωγή του πειράματος και μετρήσεις

Ρυθμίζουμε την συχνότητα στον διακόπτη g με αργό ρυθμό, ξεκινώντας από 1.5Hz και μετράμε την συχνότητα εκείνη στην οποία στο σπειροειδές ελατήριο σχηματίζεται κύμα με μήκος κύματος $\lambda=2L$ (θεμελιώδης ταλάντωση, μεταξύ των δύο κόμβων στα άκρα σχηματίζεται μια κοιλία).

Αυξάνουμε αργά την συχνότητα και μετράμε εκείνες τις συχνότητες στις οποίες σχηματίζεται στάσιμο κύμα με $\lambda_2 = \frac{2L}{2}$ (1^η αρμονική: δύο κοιλίες, 3 κόμβοι), με $\lambda_3 = \frac{2L}{3}$

(2^η αρμονική: 3 κοιλίες, 4 κόμβοι) μέχρι και περίπου $\lambda_{14} = \frac{2L}{14}$ (14^η αρμονική)

Κατασκευάζουμε τον πίνακα των μετρήσεων (n-αριθμός κοιλίων, f-συχνότητα). Σχηματίζουμε και την γραφική παράσταση της συχνότητας f σε συνάρτηση με τον αριθμό n.

Βοήθεια στην ρύθμιση

Κοντά στην συχνότητα συντονισμού σχηματίζονται διακροτήματα πλάτους. Η συχνότητα του διακροτήματος, εξασθενεί προσεγγίζοντας την συχνότητα συντονισμού. Στην περιοχή αυτή η συχνότητα θα πρέπει να ρυθμίζεται με πολύ αργό ρυθμό. Μετά από κάθε ρύθμιση περιμένουμε μερικά δευτερόλεπτα μέχρι να

διεκπεραιωθεί η κατάσταση εκκίνησης της ταλάντωσης.

Μειώνουμε την τάση εξόδου στον διακόπτη ε, όταν οι ταλαντώσεις στην περιοχή συντονισμού είναι πολύ έντονες.

Αξιολόγηση των αποτελεσμάτων μέτρησης

Υπολογίστε την ταχύτητα διάδοσης του στάσιμου κύματος κατά την σχέση $u = l\sqrt{\frac{D}{m}}$

Υπολογίστε την θεμελιώδη συχνότητα F_1 κατά την σχέση $F_1 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{D}{m}}$

Υπολογίστε την ταχύτητα διάδοσης του στάσιμου κύματος από την κλίση του γραφήματος κατά την σχέση $F = n \frac{u}{2l}$. Συγκρίνεται τα αποτελέσματα μ'αυτό κατά την σχέση $u = l\sqrt{\frac{D}{m}}$

Υπολογίστε την συχνότητα διέγερσης F_1 για την θεμελιώδη ταλάντωση από το γράφημα $f=f(n)$. Συγκρίνεται το αποτέλεσμα μ'αυτό κατά την σχέση $F_1 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{D}{m}}$