

Άσκηση Η17

Νόμος της επαγωγής

Νόμος της επαγωγής ή Δεύτερη εξίσωση MAXWELL

Ο νόμος της επαγωγής, είναι ο σημαντικότερος νόμος του ηλεκτρομαγνητισμού. Γι' αυτόν ισχύουν οι εξής ισοδύναμες διατυπώσεις:

$$U_{\varepsilon\pi} = -\frac{d\Phi}{dt}$$

$$U_{\varepsilon\pi} = -\frac{d}{dt} \int \vec{B} d\vec{s}$$

$$\int_{t_0}^t U_{\varepsilon\pi} dt = -(\Phi - \Phi_0)$$

$$\oint \vec{E} d\vec{s} = -\frac{d}{dt} \int \vec{B} d\vec{s}$$

Το μέγεθος Φ καλείται Μαγνητική Ροή. Γι' αυτήν, από τις σχέσεις

$$U_{\varepsilon\pi} = -\frac{d\Phi}{dt} \text{ και } U_{\varepsilon\pi} = -\frac{d}{dt} \int \vec{B} d\vec{s}, \text{ προκύπτει:}$$

$$\Phi = \int \vec{B} d\vec{s}$$

Και σε περίπτωση που η μαγνητική ροή είναι σταθερή ως προς το εξεταζόμενο εμβαδόν $\vec{s}$, έχουμε:

$$\varphi = \vec{B} \vec{s}$$

Εξετάζοντας την μαγνητική ροή, συναρτήσει του χρόνου, προκύπτει:

$$\frac{d\Phi}{dt} = \vec{s} \frac{d\vec{B}}{dt} + \vec{B} \frac{d\vec{s}}{dt}$$

Γνωρίζοντας, ότι η ένταση του μαγνητικού πεδίου ενός μακρόστενου πηνίου, είναι:

$$H = \frac{N}{l} I, \text{ για την μαγνητική επαγωγή, προκύπτει:}$$

$$B = \mu_0 \frac{N}{l} I$$

Η μαγνητική ροή στο εμβαδόν s , είναι χρονικά μεταβαλλόμενη:

$$|U_{\varepsilon\pi}| = \frac{d\Phi}{dt} = s\mu_0 \frac{N}{l} \frac{dI}{dt}$$

Μαγνητική ροή

Για την μαγνητική ροή, ισχύει εξ ορισμού:

$$\Phi = \vec{B} \cdot \vec{s}$$

Η αντίστοιχη εξίσωση μονάδων, είναι:

$$[\Phi] = [\vec{B}][\vec{s}] \Rightarrow V_s = \frac{V_s}{m^2} m^2$$

Για την μαγνητική ροή, έχουμε την σαφή αντίληψη, ότι το μέγεθος αυτό βρίσκεται σε κίνηση, ότι ρέει, ότι μετατοπίζεται στον χώρο με την φορά των δυναμικών γραμμών της επαγωγής B.

Εξετάζοντας το μέγεθος $\frac{d\Phi}{dt}$ και την αντίστοιχη μονάδα μέτρησής του, διαπιστώνουμε ότι πρόκειται για $\left[\frac{d\Phi}{dt}\right] = V$. Άρα, το μέγεθος, το οποίο ρέει ανά μονάδα χρόνου στο εμβαδόν σ, έχει την μονάδα VOLT (V). Το μέγεθος αυτό, δεν είναι κανένα άλλο παρά το μαγνητικό ρεύμα I_m . Άρα μπορεί να σημειωθεί:

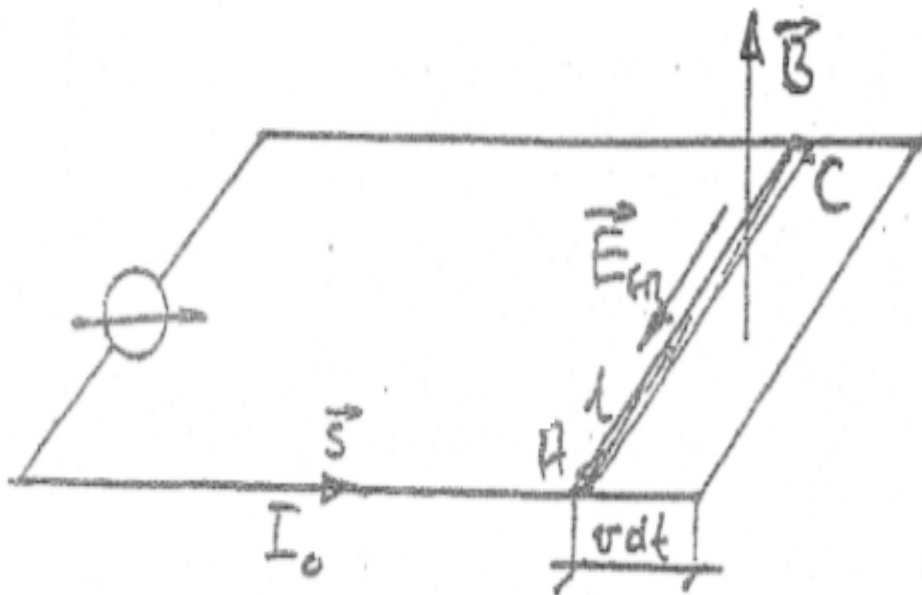
$$I_m = \frac{d\Phi}{dt}$$

Ζήτημα προσήμου στον νόμο της επαγωγής

Σίγουρα παρατηρήθηκε, ότι στο παραπάνω κείμενο, εσκεμένα χρησιμοποιήθηκε η έκφραση $|U_{\varepsilon\pi}|$ που σημαίνει την απόλυτη τιμή της τάσης εξ επαγωγής. Άρα τίθεται το ερώτημα του προσήμου της τάσης αυτής. Φυσικά ισχύει η σχέση:

$$U_{\varepsilon\pi} = -\frac{d\Phi}{dt}$$

Αλλά η ορθότητα του προσήμου αυτού, θα πρέπει να αποδειχτεί. Για τον σκοπό αυτόν, κατασκευάζεται ένα κύκλωμα. Το ρεύμα I_0 ρέει δια του αγωγού l και παράγει ένα μαγνητικό πεδίο $\vec{B}$. Το πρόσημο του I_0 , καθορίζεται σύμφωνα με το $\vec{s}$.



Σχήμα 3

Όταν ένα σημείο προχωράει εντός του κυκλώματος με θετική φορά $\vec{s}$, τότε η κάθετη του εσωκλειόμενου εμβαδού, δείχνει προς τα πάνω. Η παραγώμενη μαγνητική επαγωγή B , έχει εξ ορισμού την ίδια φορά με το εμβαδόν. Δι' αυτού, έχουν ήδη προσδιοριστεί τα πρόσημα της B και της Φ . Αφήνοντας τώρα τον αγωγό I να κινείται προς τα δεξιά με ταχύτητα u , τότε – σύμφωνα με LORENTZ – παράγεται μια δύναμη:

$$\vec{F} = q\vec{u}\vec{B}$$

Η δύναμη αυτή, μετακινεί τα θετικά φορτία του αγωγού I , έτσι ώστε αυτά να συγκεντρώνονται στο σημείο A . Αυτό σημαίνει ότι το ηλεκτρικό πεδίο εξ επαγωγής έχει την φορά που σημειώνεται στο σχήμα 3. Την ίδια φορά όμως έχει και η ένταση του ρεύματος εξ επαγωγής $I_{επ}$. Αυτή όμως είναι αντίθετη από την φορά του ρεύματος I_0 , το οποίο είναι η αιτία της υπάρχουσας επαγωγής B .

Τεχνικές γνώσεις

Αυτεπαγωγή

Ο νόμος της επαγωγής συνδέει την τάση εξ επαγωγής με την μεταβολή της μαγνητικής ροής. Εφόσον, δι' ενός οποιουδήποτε πηνίου ρέει ένα χρονικά μεταβαλλόμενο ρεύμα, τότε κάθε σπείρα του πηνίου, παράγει ένα μαγνητικό πεδίο, το οποίο διαπερνά όλες τις σπείρες και παράγει σε καθεμία από αυτές μια τάση. Το φαινόμενο αυτό, ονομάζεται ΑΥΤΕΠΑΓΩΓΗ, εφόσον εμφανίζεται στο ίδιο το πηνίο. Για ένα σωληνοειδές πηνίο, η τάση υπολογίζεται εύκολα. Για την ένταση του πεδίου, προκύπτει:

$$H = \frac{N}{l} I$$

Για την μαγνητική επαγωγή προκύπτει:

$$B = \mu_0 \frac{N}{l} I$$

Για την μαγνητική ροή, που διαπερνά μια σπείρα, προκύπτει:

$$\Phi = Bs = \mu_0 \frac{N}{l} s I$$

Για την τάση, που παράγεται σε μια σπείρα, προκύπτει:

$$U'_{\varepsilon\pi} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\mu_0 \frac{N}{l} s \frac{dI}{dt}$$

Για την τάση, που παράγεται σε όλες τις σπείρες μαζί, προκύπτει:

$$U_{\varepsilon\pi} = -\mu_0 \frac{N^2}{l} s \frac{dI}{dt}$$

Με τον συντελεστή αυτεπαγωγής

$$L = \mu_0 \frac{N^2}{l} s, \text{ η τάση εξ επαγωγής μπορεί να διατυπωθεί και στην μορφή:}$$

$$U_{\varepsilon\pi} = -L \frac{dI}{dt}$$

Η μονάδα μέτρησης του συντελεστή αυτεπαγωγής, έχει την ονομασία HENRY (H). Ένα πηνίο έχει συντελεστή αυτεπαγωγής 1H, εφόσον ο παλμός τάσης στην μεταβολή του ρεύματος κατά 1A, είναι:

$$[L] = 1H = 1 \frac{V_s}{A}$$

Αμοιβαία επαγωγή

Ένα σωληνοειδές πηνίο με N_a σπείρες, οι οποίες είναι ομοιόμορφα κατανεμημένες στο μήκος l_a , διαρρέεται από ρεύμα I_a . Στο ομογενές πεδίο του πηνίου, τοποθετείται ένα δεύτερο πηνίο με N_b σπείρες, εμβαδού s_b .

Στο δεύτερο πηνίο επάγεται η τάση:

$$U^{(b)}_{\varepsilon\pi} = -N_b \frac{d\Phi_b}{dt}, \text{ όπου } \Phi_b = B_a s_b = \mu_0 \frac{N_a}{l_a} I_a s_b$$

Άρα για την ολική τάση εξ επαγωγής, προκύπτει:

$$U_{\varepsilon\pi}^{(b)} = -\mu_0 \frac{N_a}{l_a} N_b S_b \frac{dI_a}{dt}$$

Με τον συντελεστή αμοιβαίας επαγωγής

$$M = \mu_0 \frac{N_a}{l_a} N_b S_b, \text{ προκύπτει τελικά:}$$

$$U_{\varepsilon\pi}^{(b)} = -M \frac{dI_a}{dt}$$

Εφαρμογές

Στην προκειμένη άσκηση γίνεται η χρήση της σχέσης $U_{\varepsilon\pi}^{(b)} = -M \frac{dI_a}{dt}$, δηλαδή

$U_{\varepsilon\pi} = -M \frac{dI}{dt}$. Ο συντελεστής αμοιβαίας επαγωγής είναι δεδομένος και δεν μπορεί να μεταβληθεί, εφόσον εξαρτάται μόνο από σταθερά μεγέθη

$$M = \mu_0 \frac{N_a}{l_a} N_b S_b$$

Συνεπώς, η τάση εξ επαγωγής εξαρτάται πάντα από τις ιδιότητες της έντασης του ρεύματος. Εξετάζονται μερικές ειδικές περιπτώσεις:

3. $I = I_0 \eta \mu \omega t$

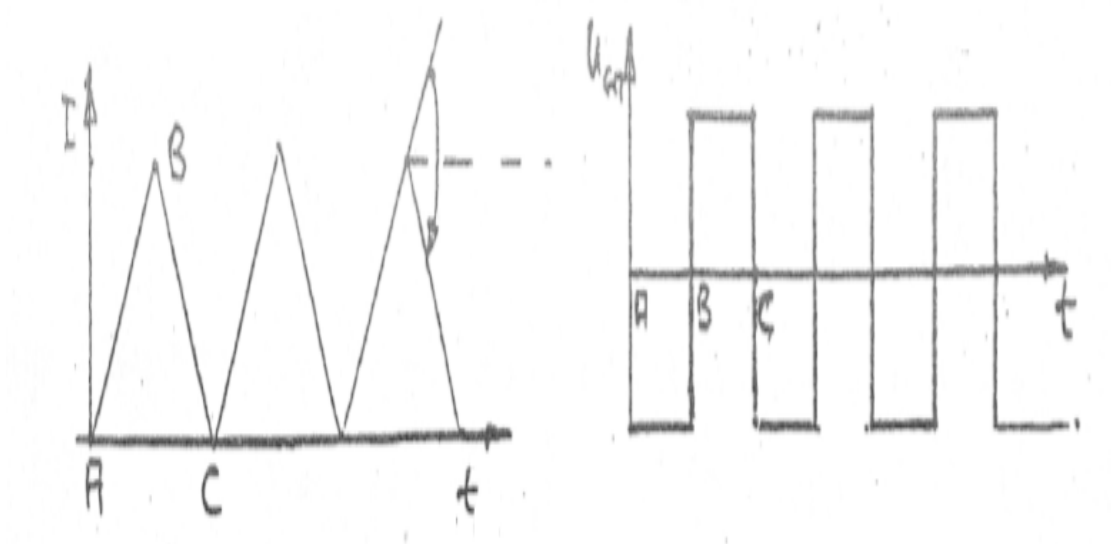
$$U_{\varepsilon\pi} = -M \frac{dI}{dt} = -MI_0 \omega \sin \omega t = MI_0 \omega \eta \mu \left(\omega t - \frac{\pi}{2} \right)$$

Από το αποτέλεσμα αυτό, προκύπτουν μερικά συμπεράσματα. Το πλάτος της τάσης εξ επαγωγής, είναι:

$$U_{\varepsilon\pi, \max} = MI_0 \omega$$

Η τάση εξ επαγωγής έχει – σε σύγκριση με την ένταση του ρεύματος, από το οποίο παράγεται – μια διαφορά φάσης $\varphi = -\frac{\pi}{2}$, διατηρεί όμως την ημιτονοειδή μορφή.

4. Η ένταση του ρεύματος είναι συναρτήσει του χρόνου μια συνάρτηση Δ, δηλαδή



Σχήμα 4

Εξετάζουμε την τάση εξ επαγωγής – σύμφωνα με την σχέση $U_{\varepsilon\pi}^{(b)} = -M \frac{dI_a}{dt}$

1. Μεταξύ των σημείων A και B ισχύει:

$U_{\varepsilon\pi}^{(AB)} = -M \frac{dI}{dt}$, όπου $\frac{dI}{dt} = a$ είναι η σταθερή κλίση της ευθείας. Άρα:

$$U_{\varepsilon\pi}^{(AB)} = -Ma, \text{ άρα έχει αρνητική τιμή}$$

2. Στο σημείο B, η κλίση της ευθείας μετακινείται από +a σε -a. Άρα:

$$\frac{dI}{dt} = -2a. \text{ Άρα, για την τάση, προκύπτει:}$$

$$U_{\varepsilon\pi}^{(B)} = -M(-2a) = 2Ma$$

3. Μεταξύ των σημείων B και C ισχύει:

$$U_{\varepsilon\pi}^{(BC)} = -M \frac{dI}{dt} = -M(-a) = Ma, \text{ άρα έχει θετική τιμή}$$

4. Στο σημείο C, η κλίση της ευθείας μεταβάλλεται από -a σε +a, άρα:

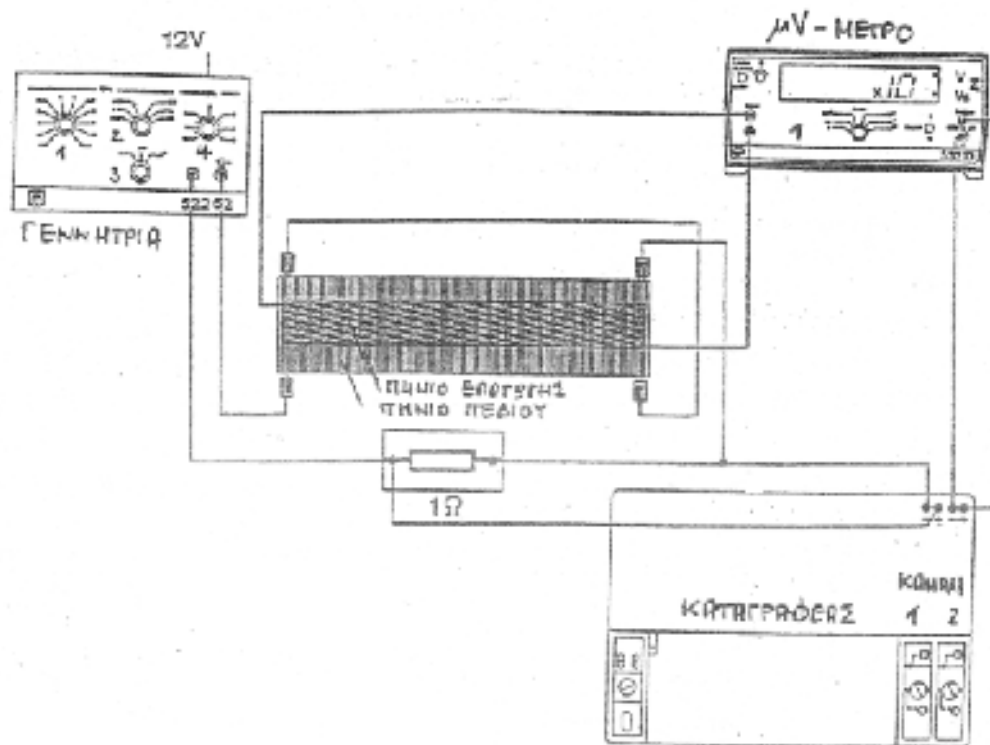
$$\frac{dI}{dt} = +2a$$

Συνεπώς, η τάση εξ επαγωγής, είναι:

$$U_{\varepsilon\pi}^{(C)} = -M(+2a) = -2Ma \text{ και το παιχνίδι αρχίζει και πάλι από την αρχή.}$$

Πρακτικό μέρος

1. Διάταξη



Σχήμα 6 – Διάταξη του πειράματος

- 1.1. Αναγνώριση της διάταξης και της λειτουργικότητάς της
- 1.2. Σχεδιασμός της διάταξης σε μορφή απλών ηλεκτρικών κυκλωμάτων
- 1.3. Συνδεσμολόγηση

Προσοχή: το πηνίο του πεδίου, έχει δύο τυλίγματα που καταλαμβάνουν το ένα όπως και το άλλο όλο το μήκος της μπομπίνας. Τα τυλίγματα αυτά συνδέονται ή θα πρέπει να συνδεθούν σε σειρά. Δι'αυτού επιτυγχάνεται μια γραμμική πυκνότητα σπειρών

$$\frac{N}{l} = 400m^{-1}$$

- 1.4. Ρύθμιση των οργάνων

Γεννήτρια: Διακόπτης 1 στην θέση 1, διακόπτης 2 στην θέση 0,1

Δι'αυτού η γεννήτρια λειτουργεί σε συχνότητα $f = 0.1Hz$

Διακόπτης 3 στην θέση $\wedge$ (Δέλτα)

Μικροβολτόμετρο: Διακόπτης 1 (GAIN) στην θέση 10^4

Διακόπτης 2 στην θέση V

Καταγραφέας: Κανάλι 1 στην θέση 10V

(καταγράφει μέσω της αντίστασης 1Ω την ένταση του ρεύματος που διαρρέει το πηνίο πεδίου)

Κανάλι 2 στην θέση 10V (τάση επαγωγής)

$$\text{Ταχύτητα χαρτιού: } 5 \frac{\text{mm}}{\text{s}}$$

1.5. Ισοστάθμιση της τάσης του μV -μετρου με την βοήθεια του αντίστοιχου διακόπτη (button)

Έλεγχος από τους υπεύθυνους του εργαστηρίου πριν από την έναρξη λειτουργίας και καταγραφής

1.6. Θέση σε λειτουργία της γεννήτριας

Αύξηση με αργό ρυθμό του ρεύματος δια του πηνίου πεδίου μέχρι που οι πέννες καταγραφής των δύο καναλιών να εκτρέπονται έτσι που τα αποτελέσματα να είναι αξιοποιήσιμα. Το ρεύμα του πηνίου πεδίου, δεν θα πρέπει να είναι παραμορφωμένο.

1.7. Κατέβασμα των πεννών και καταγραφή καταναλώνοντας όχι περισσότερο από 10 cm χαρτιού. STOP ανεβάζοντας τις πέννες και αποσυνδέοντας το καλώδιο που συνδέει την γεννήτρια με το πηνίο πεδίου.

2. Μετρήσεις

2.1. Μέτρηση της επαγωγικής τάσης συναρτήσει της συχνότητας ($I \square \Delta$)

2.1.1. Επανασύνδεση της γεννήτριας και κατέβασμα των πεννών

2.1.2. Αύξηση βήμα προς βήμα της συχνότητας από $0.1H_z$ μέχρι $0.6H_z$ ($0.1 - 0.2 - 0.3 - 0.4 - 0.5 - 0.6$) χειρίζοντας τον διακόπτη 1 της γεννήτριας.

2.1.3. STOP ανεβάζοντας τις πέννες και αποσυνδέοντας την γεννήτρια

2.2. Μέτρηση της επαγωγικής τάσης συναρτήσει του πλάτους της έντασης του ρεύματος του πηνίου πεδίου.

2.2.1. Ρύθμιση της γεννήτριας σε συχνότητα $f = 0.3H_z$

2.2.2. Ο διακόπτης 3 της γεννήτριας διατηρείται στην θέση Δ

2.2.3. Σύνδεση της γεννήτριας και κατέβασμα των πεννών

2.2.4. Αύξηση του ρεύματος του πηνίου πεδίου βήμα προς βήμα θέτοντας τον μεταγωγέα 4 της γεννήτριας στις θέσεις 1,2,3,4,5,6.

2.2.5. STOP

Προσοχή: η ένταση του ρεύματος του πηνίου πεδίου να μην είναι παραμορφωμένη

2.3. Μέτρηση της διαφοράς φάσης μεταξύ I και $U_{\varepsilon\pi}$

2.3.1. Ρύθμιση της γεννήτριας σε *ημίτονο* και $f = 0.2H_z$

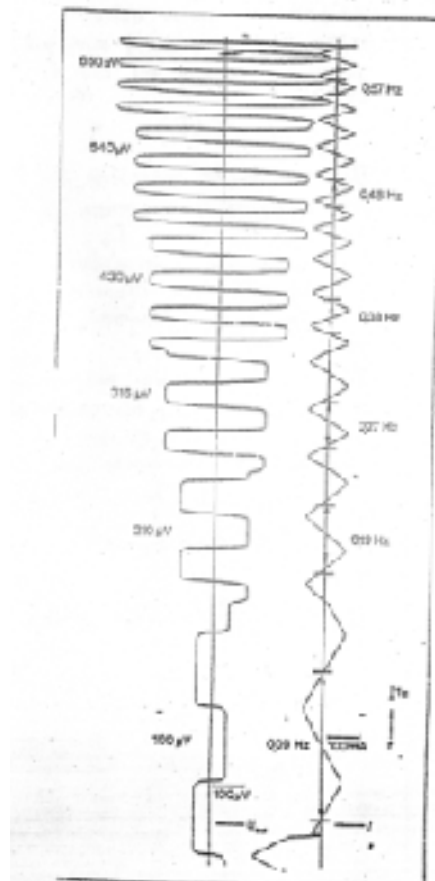
2.3.2. Βλ. Γνωστή πλέον διαδικασία

3. Αποτελέσματα των μετρήσεων και αξιολόγηση

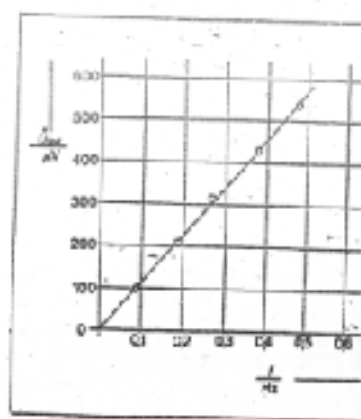
3.1. Μέτρηση της επαγωγικής τάσης συναρτήσει της συχνότητας

Η καταγραφή της μέτρησης υπό 2.1, μας δίνει την εικόνα 7. Κατασκευάζουμε ένα γράφημα, όπου η τεταγμένη είναι το πλάτος της επαγωγικής τάσης και η τετμημένη είναι η συχνότητα. Το πλάτος και η συχνότητα υπολογίζονται μέσα από τις πληροφορίες που περιέχει το σχήμα 7. Δι'αυτού λαμβάνεται το σχήμα 8. Απ'αυτό, προκύπτει ότι η επαγωγική τάση εξαρτάται γραμμικά από την συχνότητα της έντασης του ρεύματος του πηνίου πεδίου.

Το αποτέλεσμα αυτό, ήταν αναμενόμενο (βλέπε π.χ. τις εφαρμογές στο θεωρητικό μέρος)



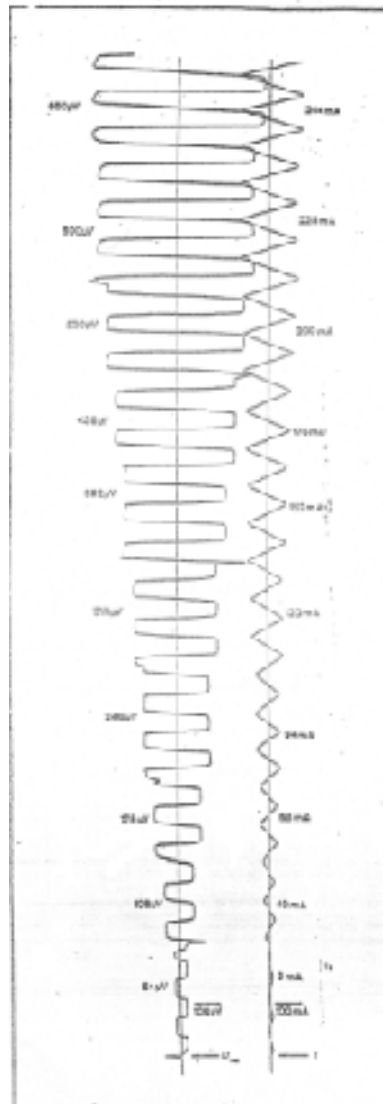
Σχήμα 7 – Επαγωγική τάση και συχνότητα (καταγραφή)



Σχήμα 8 – Επαγωγική τάση και συχνότητα (μέσω της καταγραφής στο σχήμα 7)

- 3.2. Μέτρηση της επαγωγικής τάσης του πλάτους και της έντασης του πηνίου πεδίου.
 Το σχήμα 9 δείχνει την καταγραφή των μετρήσεων του εδαφίου 2.2, όπου η επαγωγική τάση μετριέται συναρτήσει του πλάτους της έντασης του ρεύματος του

πηνίου πεδίου. Με τις μετρήσεις αυτές, κατασκευάζεται το γράφημα του σχήματος 10, όπου $U_{επ} = f(I)$



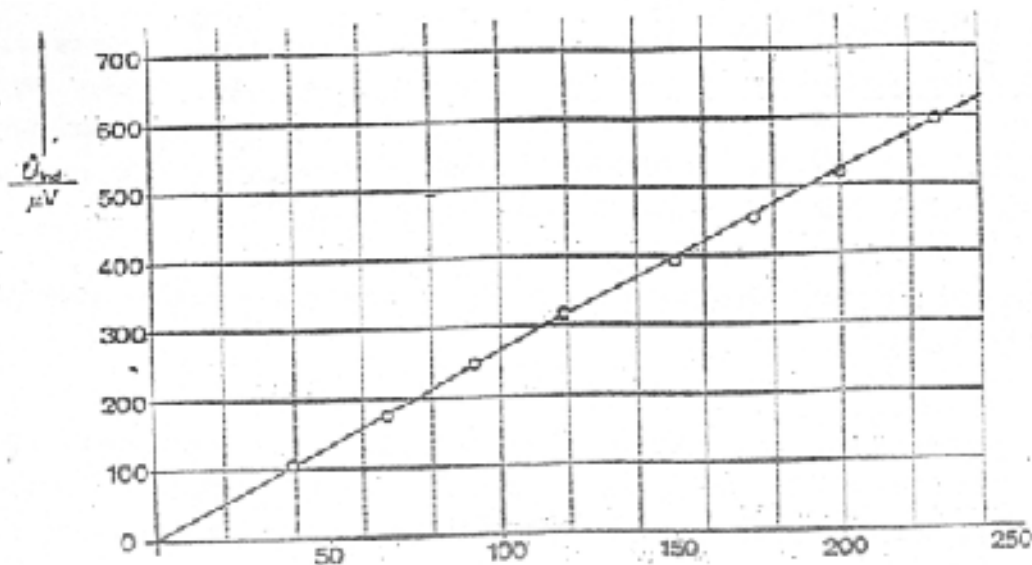
Σχήμα 9 – Επαγωγική τάση συναρτήσει του πλάτους του ρεύματος του πηνίου πεδίου (καταγραφή)

Από το σχήμα 10. Προκύπτει, ότι η επαγωγική τάση εξαρτάται γραμμικά από το πλάτος I_0 . Υπό το εδάφιο 3.1, διαπιστώθηκε ότι η επαγωγική τάση εξαρτάται γραμμικά και από την συχνότητα της έντασης του ρεύματος I .

Άρα η μέγιστη δυνατή επαγωγική τάση προκύπτει από την ταυτόχρονη μεταβολή τόσο του πλάτους, του I , όσο και της συχνότητας, δηλαδή:

$$U_{επ} = -L \frac{dI}{dt}, \text{ όπου } I = I_0(t)\eta\mu\omega t. \text{ Συνεπώς:}$$

$$U_{επ} = -L \left[\frac{dI_0}{dt} \eta\mu\omega t + I_0 \omega \sigma\upsilon\nu\omega t \right]$$

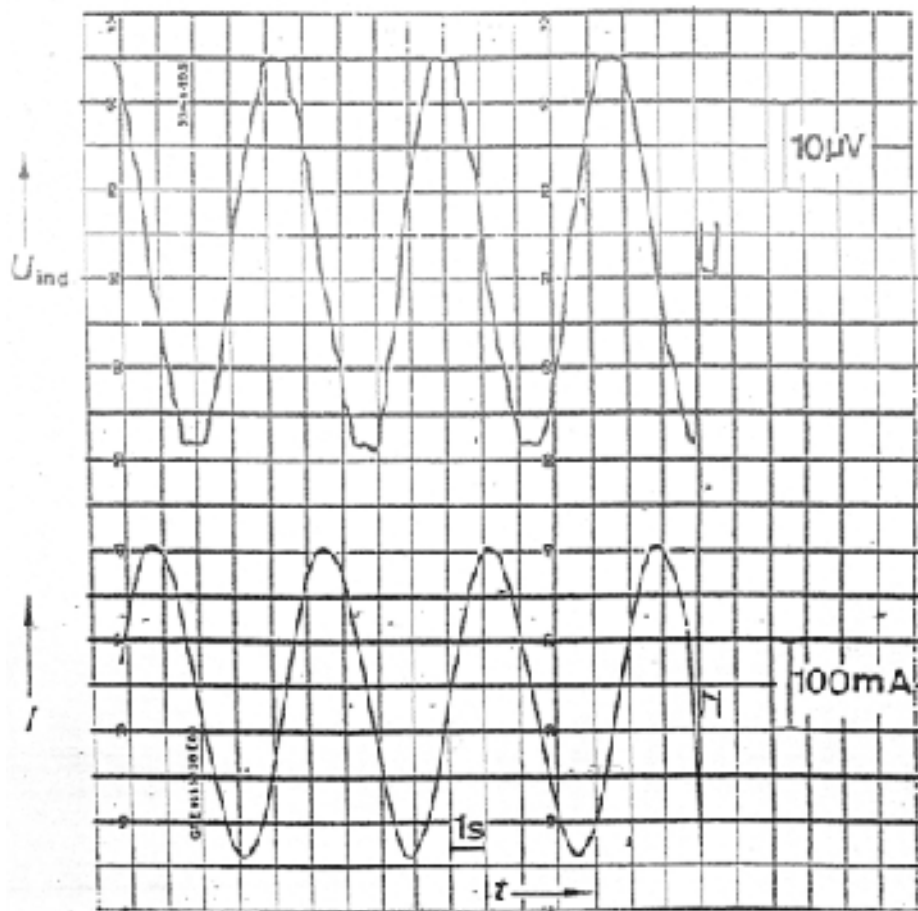


Σχήμα 10 – Επαγωγική τάση συναρτήσει του πλάτους του ρεύματος του πηνίου πεδίου (μέσω της καταγραφής στο σχήμα 9)

3.3. Μέτρηση της διαφοράς φάσης μεταξύ $I = I_0 \eta \mu \omega t$ και $U = L \frac{dI}{dt}$

Ήδη στο θεωρητικό μέρος, Εφαρμογές, αποδείχτηκε, η ύπαρξη μιας διαφοράς φάσης $\varphi = \frac{\pi}{2}$. Στο σχήμα 11 απεικονίζονται οι μετρήσεις του εδαφίου 2.3. η διαφορά φάσης, είναι άμεσα αντιληπτή, όπου η ένταση του ρεύματος ισούται με μηδέν. Εκεί η επαγωγική τάση, διαπερνά το ελάχιστο ακρότατο.

Σημείωση: Οι παραμορφώσεις της επαγωγικής τάσης οφείλονται στην ασυμμετρία του ημιτονοειδούς σήματος που παράγεται στην γεννήτρια συχνοτήτων.



Σχήμα 11 – Διαφορά φάσης (καταγραφή)

4. Ο πειραματιστής που εκτελεί το συγκεκριμένο πείραμα, θα καταγράψει παρόμοια αποτελέσματα με αυτά των σχημάτων 7,9 και 11. Μέσα από τις δικές του μετρήσεις, οφείλει να βγάλει τα αντίστοιχα αποτελέσματα. Μόνο από αυτήν την έννοια προστέθηκε στο ΠΡΑΚΤΙΚΟ ΜΕΡΟΣ το κεφάλαιο *Αποτελέσματα των μετρήσεων και αξιολόγηση*.
5. Υπολογισμός της έντασης του ρεύματος I , της συχνότητας και της επαγωγικής τάσης
Συχνότητα:

Για τον υπολογισμό της συχνότητας μετριέται η απόσταση s , σε cm μιας περιόδου μέσα από το σχήμα 7. Γνωρίζοντας την ταχύτητα u της κίνησης του χαρτιού, η συχνότητα προκύπτει από την σχέση:

$$f = \frac{1}{T} = \frac{u}{s}$$

Επαγωγική τάση:

Για την βαθμολόγηση αυτής ισχύει:

$27mm \square 100\mu V$

Ένταση του ρεύματος:

Για την βαθμολόγηση αυτής ισχύει:

$42mm \square 100mA$