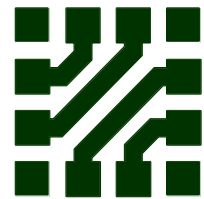




ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟ ΙΔΡΥΜΑ
ΛΑΜΙΑΣ
ΤΜΗΜΑ ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΚΗΣ
ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΦΥΣΙΚΗΣ



ΦΥΣΙΚΗ - ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ

ΣΠΥΡΟΣ ΡΟΥΛΗΣ

ΛΑΜΙΑ ΟΚΤΩΒΡΙΟΣ 2012

ΑΝΤΙ ΠΡΟΛΟΓΟΥ

Οι παρούσες σημειώσεις έχουν γραφτεί αρχικά την δεκαετία του 1990 και το παρόν αντίτυπο αποτελεί ανατύπωση ενός αρχικού αντιτύπου που τυπώθηκε το 1994 και αποτέλεσε σε εκείνη την χειρόγραφη μορφή το βασικό εγχειρίδιο του Εργαστηρίου Φυσικής του Τμήματος Ηλεκτρονικής για πολλά χρόνια μέχρι και σήμερα. Σε εκείνη την παλιά χειρόγραφη έκδοση την τεχνική επιμέλεια είχε ο Γιώργος Φέκας, Τεχνικός Εργαστηρίου (Ε.Τ.Π.) του Τμήματος Ηλεκτρολογίας και υπεύθυνος του Εργαστηρίου Φυσικής του Τμήματος Ηλεκτρολογίας και διορθώσεις κειμένου έχουν γίνει από τους Γεώργιο Μπουργανό, Αχιλλέα Τσορτό και Αθανάσιο Καναπίτσα Επιστημονικούς Συνεργάτες του Τμήματος Ηλεκτρονικής κατά την προαναφερθείσα περίοδο.

Οι υπογράφωντες, έχοντας διδάξει το υλικό των σημειώσεων για πολλά ακαδημαϊκά εξάμηνα στους πρωτοετείς φοιτητές του Τμήματος Ηλεκτρονικής αποφάσισαν, έχοντας και την σύμφωνη γνώμη του συγγραφέα να μετατρέψουν το έντυπο των σημειώσεων σε ηλεκτρονική μορφή βασιζόμενοι στο έντυπο της έκδοσης του 1994. Οι σημειώσεις περιέχουν συνολικά 12 ασκήσεις που καλύπτουν διάφορους τομείς της Φυσικής. Η αριθμηση των εργαστηριακών ασκήσεων είναι αυτή της αρχικής έκδοσης. Όμως, παράλληλα με την απόλυτη αριθμηση των ασκήσεων, και επειδή οι ασκήσεις αποτελούν υποσύνολο μιας μεγαλύτερης συλλογής, αριθμούνται και με την μορφή Μ1, Μ2,...., καθώς και Η1, Η2,..... όπου τα γράμματα Μ και Η σημαίνουν Μηχανική και Ηλεκτρισμός αντίστοιχα. Στην έκδοση αυτή σταθήκαμε όσο γινόταν πιο κοντά στο πνεύμα των αρχικών σημειώσεων της έκδοσης του 1994 και δεν αλλάξαμε σχεδόν τίποτα στην ύλη τους. Προσπαθήσαμε μόνο να διορθώσουμε αβλεψίες στο κείμενο και στους τύπους, καθώς και όποια τυπογραφικά λάθη εντοπίσαμε και αλλάξαμε κάποια σχήματα και εικόνες, τελικά όμως διατηρήσαμε τις σημειώσεις όσο ήταν δυνατόν πλησιέστερα στην αρχική τους μορφή.

Στην προσπάθεια αυτή αρωγοί στάθηκαν αρκετοί φοιτητές του Τμήματος Ηλεκτρονικής, οι οποίοι άλλοι στα πλαίσια των πτυχιακών τους εργασιών και άλλοι στα πλαίσια παρακολούθησης του μαθήματος έχουν συνδράμει τα μέγιστα στην πληκτρολόγηση των σημειώσεων χρησιμοποιώντας κυρίως Microsoft Word αλλά και άλλους επεξεργαστές κειμένου. Οι φοιτητές Θεόδωρος Τάμπρας, Νικόλαος Βουγιουκλάκης, Κωνσταντίνος Δουβής και Θωμάς Ξένος δημιούργησαν στα πλαίσια των πτυχιακών τους εργασιών ιστοσελίδες για το εργαστήριο Φυσικής και πληκτρολόγησαν τμήματα των σημειώσεων, σχεδίασαν δε απαρχής και κάποια από τα σχήματα. Επίσης ομάδα πρωτοετών φοιτητών που παρακολούθησαν το Εργαστήριο Φυσικής το Εαρινό εξάμηνο του Ακαδημαϊκού Έτους 2006-2007 πληκτρολόγησαν τμήματα των σημειώσεων. Η συρραφή των τμημάτων που έγραψαν οι παραπάνω έγινε από τους υπογράφοντες χρησιμοποιώντας Microsoft Word 2007, και το τελικό κείμενο δέχτηκε την κριτική μελέτη του Χαράλαμπου Ζώη τότε Επιστημονικού Συνεργάτη του Τμήματος Ηλεκτρολογίας και τώρα Καθηγητή Εφαρμογών στην Ακαδημία Εμπορικού Ναυτικού (Α.Ε.Ν) Ηπείρου. Όμως η τελική εικόνα των σημειώσεων οφείλεται στους υπογράφοντες που έχουν και την τελική ευθύνη για το συνολικό αποτέλεσμα.

Είναι γνωστό ότι είναι αδύνατο να υπάρξει έντυπο χωρίς τυπογραφικές ατέλειες, λάθη και αβλεψίες, που οφείλονται στον γνωστό σε όλους «δαίμονα του

τυπογραφείου», και ζητάμε προκαταβολικά συγγνώμη για όσα από αυτά τα τυπογραφικά λάθη έχουν διαφύγει από την προσοχή μας και τα συναντήσετε κάπου κατά την ανάγνωση του κειμένου. Στοχεύοντας δε σε μελλοντική βελτιωμένη έκδοση των σημειώσεων ζητάμε την βοήθειά σας για την εξάλειψη όλων αυτών των αβλεψιών από τις σημειώσεις.

Λαμία Οκτώβριος 2010

Αθανάσιος Ν. Καναπίτσας
Αναπληρωτής Καθηγητής
Τμήμα Ηλεκτρονικής
Τ.Ε.Ι. Λαμίας

Νικόλαος Πετρόπουλος
MSc, PhD Θεωρητική Φυσική
Επιστημονικός Συνεργάτης
Τμήμα Ηλεκτρονικής
Τ.Ε.Ι. Λαμίας

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΑΚΕΣ ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ ΦΥΣΙΚΗΣ.....	0
ΕΙΣΑΓΩΓΗ	4
ΑΣΚΗΣΗ 1 (Μ 1).....	9
ΜΗΚΟΣ ΚΑΙ ΜΑΖΑ (ΒΑΡΟΣ).....	9
ΑΣΚΗΣΗ 2 (Μ 2).....	17
ΣΠΕΙΡΟΕΙΔΕΣ ΕΛΑΤΗΡΙΟ	17
ΑΣΚΗΣΗ 3 (Μ 3).....	25
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟ ΕΚΚΡΕΜΕΣ	25
ΑΣΚΗΣΗ 4 (Μ 13)	34
ΣΤΑΣΙΜΑ ΔΙΑΜΗΚΗ ΚΥΜΑΤΑ ΣΤΟ ΣΠΕΙΡΟΕΙΔΕΣ ΕΛΑΤΗΡΙΟ.....	34
ΑΣΚΗΣΗ 5 (Η 2).....	42
Ο ΝΟΜΟΣ ΤΟΥ ΟΗΜ	42
ΑΣΚΗΣΗ 5 (Η 3).....	45
ΕΠΑΛΛΗΛΙΑ ΚΙΝΗΣΕΩΝ -- ΜΕΤΡΗΣΕΙΣ ΜΕ ΠΑΛΜΟΓΡΑΦΟ	45
ΑΣΚΗΣΗ 6 (Η 4).....	64
ΜΕΤΡΗΣΗ ΑΝΤΙΣΤΑΣΕΩΝ.....	64
ΑΣΚΗΣΗ 7 (Η 15).....	68
ΜΕΤΡΗΣΗ ΤΗΣ ΕΝΤΑΣΗΣ ΤΟΥ ΜΑΓΝΗΤΙΚΟΥ ΠΕΔΙΟΥ ΤΗΣ ΓΗΣ.....	68
ΑΣΚΗΣΗ 9 (Η 17).....	77
ΝΟΜΟΣ ΤΗΣ ΕΠΑΓΩΓΗΣ.....	77
ΑΣΚΗΣΗ 10 (Η 31)	94
Ο ΛΟΓΟΣ E/M ΤΟΥ ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΟΥ	94
ΑΣΚΗΣΗ 11 (Η 32)	106
ΜΕΤΡΗΣΗ ΤΗΣ ΕΝΤΑΣΗΣ ΜΑΓΝΗΤΙΚΟΥ ΠΕΔΙΟΥ ΕΝΟΣ ΖΕΥΓΟΥΣ ΠΗΝΙΩΝ (ΠΗΝΙΑ HELMHOLTZ) ΚΑΤΑ ΜΗΚΟΣ ΤΟΥ ΑΞΟΝΑ.....	106
ΑΣΚΗΣΗ 12 (Η 29)	113
ΘΕΡΜΟΤΗΤΑ JOULE	113

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

1. Κανόνες για εργασίες στο εργαστήριο Φυσικής

1.1 Βοηθητικά μέσα

Για την διεξαγωγή μίας άσκησης εργαστηρίου απαραίτητα είναι μερικά βοηθητικά μέσα, τα οποία πρέπει να έχει ο σπουδαστής:

Ένα σύγχρονο και εξυπηρετικό βοηθητικό μέσον είναι ο ηλεκτρονικός υπολογιστής τσέπης με τις απλές συναρτήσεις, όπως τον δεκαδικό και τον επήρεια λογάριθμο, τις τριγωνομετρικές συναρτήσεις, τις εκθετικές συναρτήσεις και φυσικά τους τέσσερις απλούς τρόπους υπολογισμού.

Εξάλλου απαραίτητη κρίνεται η ύπαρξη ενός διαβήτη, ενός χάρακα, ενός μοιρογνωμονίου, ενός καμπυλόγραμμου και χιλιομετρικού χαρτιού. Για την καταγραφή των ασκήσεων πρέπει να προμηθευτεί ένα τετράδιο A4 100 σελίδων με τετραγωνάκια.

1.2 Προετοιμασία

Η επιτυχής διεξαγωγή μίας άσκησης εργαστηρίου προϋποθέτει μία αντίστοιχη προετοιμασία από το σπίτι, κατά την οποία ο σπουδαστής ασχολείται με το αντικείμενο της προσεχούς άσκησης, τις βασικές φυσικές και τεχνικές έννοιες, την μέθοδο μέτρησης, τα μεγέθη που πρόκειται να μετρηθούν και την ακρίβεια αυτών. Για το σκοπό αυτό όλες οι ασκήσεις που περιγράφονται, σ' αυτόν τον Οδηγό αποτελούνται από το θεωρητικό και από ένα πρακτικό (εργαστηριακό) μέρος. Αυτό όμως δεν σημαίνει, ότι δη' αυτού εξαντλείται όλη η θεωρία: ο ενδιαφερόμενος σπουδαστής μπορεί να συμβουλευτεί και βιβλία Φυσικής που διαθέτει ο ίδιος ή που μπορεί να δανειστεί από την Βιβλιοθήκη της Σχολής.

Κρίνεται σκόπιμο, η ουσία της μελέτης στο σπίτι, να σημειώνεται σε μία σελίδα, η οποία είναι η πρώτη του πρωτοκόλλου της άσκησης.

1.3 Διεξαγωγή της άσκησης

Τα εξαρτήματα της άσκησης ο σπουδαστής θα τα βρει είτε πάνω στο τραπέζι εργασίας είτε σ' ένα ντουλάπι κοντά στο τραπέζι εργασίας. Ο σπουδαστής οφείλει να γνωρίζει τα εξαρτήματα της άσκησης και την σημασία αυτών και να είναι σε θέση να κατασκευάσει την πειραματική διάταξη. Συνεπώς πρέπει πρώτα να σκεφτεί και μετά να πράξει, όχι αντίθετα.

Σε πολλά εργαστήρια ή σε πολλές εργαστηριακές ασκήσεις χρησιμοποιούνται σύγχρονα όργανα μέτρησης. Ο σπουδαστής οφείλει να μελετήσει τις οδηγίες χρήσης των οργάνων αυτών, ώστε να είναι πληροφορημένος για τις ιδιότητες τους, πριν τα θέσει αυτά σε λειτουργία. Κατά τ' άλλα ισχύει η αρχή: Για την μέτρηση ενός μεγέθους δεν χρειάζονται πάντα τα πιο 'σύγχρονα' βοηθητικά μέσα. Το αποτέλεσμα μέτρησης με την αντίστοιχα απαραίτητη ακρίβεια μπορεί να επιτευχθεί και με απλά μέσα. Σκοπός είναι δηλαδή η επίτευξη ενός ικανοποιητικού αποτελέσματος σε ελαχιστοποιημένο κόστος. Εδώ συγκεντρώνεται η τέχνη του καλού Φυσικού.

Σε περίπτωση κατασκευής, ηλεκτρικών κυκλωμάτων δεν επιτρέπεται η σύνδεση αυτών με πηγές τάσεις (ή ρεύματος) πριν από τον έλεγχο από τους υπεύθυνους του

εργαστηρίου. Μόνο έτσι μπορούν να αποκλειστούν βλάβες στα ίδια τα ηλεκτρικά όργανα, αλλά και σε ανθρώπους.

Κατά την κατασκευή της πειραματικής διάταξης τα όργανα χειρισμού πρέπει να τοποθετούνται έτσι στον χώρο, ώστε να είναι προσιτά και να χειρίζονται εύκολα.

Η άνεση στην κατασκευή διευκολύνει την εργασία. Όλα τα μη απαραίτητα υλικά πρέπει να απομακρυνθούν από το τραπέζι εργασίας.

Λόγω της ύπαρξης σφαλμάτων των μετρήσεων οι μετρήσεις η οι σειρές μετρήσεων πρέπει να επαναλαμβάνονται με σκοπό τη λήψη μίας άριστης τιμής.

1.4 Γραπτό της άσκησης

Στο γραπτό σημειώνεται η διαδικασία διεξαγωγής του πειράματος· συνεπώς η πρώτη καταγραφή είναι οριστική. Η καταγραφή των πειραματικών δεδομένων σε χαρτάκια ή σε, από τετράδια ξεσκισμένα φύλλα, από τα οποία φτιάχνεται μετά, στο σπίτι το “γραπτό” δεν φανερώνει οικονομικό πνεύμα και συνεπώς δεν επιτρέπεται. Στην επαγγελματική ζωή τα βιβλία εσόδων / εξόδων δεν ξαναγράφονται στο σπίτι, συνεπώς ας μάθουμε να γράφουμε το “γραπτό” σωστά από την πρώτη μέρα.

Σε περίπτωση που μία σημείωση αποδειχθεί λαθεμένη, τότε αυτή διαγράφεται, δεν σβήνεται και δεν τίθεται σε παρένθεση. Το σύμβολο της παρένθεσης στο φυσικό “κείμενο και στα μαθηματικά έχει μια εντελώς άλλη σημασία”. Ως προς τούτο πρέπει γρήγορα να ξεχάσουμε μερικές συνήθειες από την εποχή των εκθέσεων. Τα σημειωματάρια μεγάλων σοφών έχουν πολλές διαγραφές.

Στο γραπτό σημειώνεται κάθε φράση της πειραματικής διαδικασίας. Πέρα από την ονομασία του πειράματος και την ημερομηνία / χρονολογία διευκρινίζεται ο σκοπός του πειράματος και κατασκευάζεται ένα σκίτσο της πειραματικής διάταξης. Η καταγραφή των περιβαλλοντικών συνθηκών (θερμοκρασία, βαρομετρική πίεση, σχετική υγρασία) είναι απαραίτητη σε μερικές περιπτώσεις.

Κατά τ’ άλλα το πρωτόκολλο αναφέρεται στη διαδικασία του πειράματος και των μερικών αποτελεσμάτων, τα οποία καταγράφονται σε μορφή σειρών μετρήσεων. Η κατασκευή πινάκων γίνεται κατά την προετοιμασία του πειράματος στο σπίτι. Ο πίνακας πρέπει να περιέχει τόσο τις τιμές από τις μετρήσεις, όσο και τις υπολογισμένες τιμές, μαζί και αυτές από τις τιμές που θεωρούνται “εξωπραγματικές”. Στην κεφαλή του πίνακα αναφέρονται το σύμβολο και η μονάδα μέτρησης του μετρούμενου μεγέθους, π.χ. I/A που σημαίνει, το μετρούμενο μέγεθος είναι η ένταση ρεύματος I , η οποία μετριέται σε AMPERE(A). Κάτω από I/A καταγράφεται μόνο η αριθμητική τιμή, π.χ. 7, που σημαίνει 7 A.

1.5 Αξιολόγηση των μετρήσεων.

Συνήθως οι τιμές μετρήσεων δεν είναι τιμές αυτού του μεγέθους, το οποίο πρόκειται να προσδιοριστεί από το πείραμα. Το μέγεθος προσδιορισμού πρέπει να υπολογιστεί δια μίας εξίσωσης. Γι’ αυτό γίνεται χρήση ενός ηλεκτρονικού υπολογιστή. Ο απαραίτητος κόπος αποφασίζεται βάσει της ακρίβειας των τιμών μέτρησης και βάσει των υπολογιζόμενων σφαλμάτων.

Σε πολλές περιπτώσεις ζητείται η συναρτησιακή σχέση δύο μεγεθών ή ζητείται εφόσον η σχέση αυτή είναι γνωστή, ο προσδιορισμός μίας ή περισσότερων σταθερών μέσα από την γνωστή σχέση. Τότε τα αποτελέσματα των μετρήσεων πρέπει να αποδοθούν γραφικά. Για το σκοπό αυτό χρησιμοποιείται κατάλληλο χαρτί συντεταγμένων. Στην πιο απλή περίπτωση η τετμημένοι και η τεταγμένη είναι διαιρεμένες γραμμικά σε χιλιοστά (mm) – το χαρτί αυτό ονομάζεται χιλιομετρικό

χαρτί. Σε ειδικές περιπτώσεις μία ή και οι δύο συντεταγμένες είναι λογαριθμικά η εκθετικά υποδιαιρεμένες και σ' αυτές τις περιπτώσεις στις υποδιαιρέσεις των συντεταγμένων αναγράφεται το ίδιο το μέγεθος και όχι ο λογάριθμος κλπ. Συνεπώς είναι λάθος στους άξονες να γράφεται $\log G$, εφόσον G είναι το μέγεθος που ενδιαφέρει.

Ο χαρακτηρισμός των γραφικών παραστάσεων έχει ιδιαίτερη σημασία. Εκτός από την πληροφορία του παριστάμενου μεγέθους μπορούν να σημειωθούν και άλλες σχετικά σημαντικές πληροφορίες.

Τα σημεία μέτρησης, τα οποία σημειώνονται στο σύστημα συντεταγμένων κυμαίνονται γύρω από την “πραγματική” καμπύλη. Γι' αυτό δια των σημείων μέτρησης χαράσσεται μια ευθεία ζυγοστάθμισης. Δη' αυτού μπορεί να αποφευχθεί ο αντίστοιχος χρονοβόρος μαθηματικός υπολογισμός.

Σε περίπτωση που από την σχέση δύο μεγεθών πρόκειται να προσδιοριστεί ένα τρίτο μέγεθος (π.χ. $z = \frac{Y}{x}$), τότε ο υπολογισμός δεν γίνεται με τα ζεύγη των τιμών μέτρησης, αλλά με ζεύγη τιμών της καμπύλης ή της ευθείας ζυγοστάθμισης. Η εξεύρεση της μέσης τιμής με την βοήθεια του ηλεκτρονικού υπολογιστή αποτελεί αυτονόητα τον πιο απλό τρόπο.

2. Αβεβαιότητα των μετρήσεων, σφάλματα.

2.1 Παρατηρήσεις.

“Μετρήσεις ενός Φυσικού μεγέθους” σημαίνει “Σύγκριση με μία μονάδα του μεγέθους”. Αν η σύγκριση αυτή επαναληφθεί κάτω από τις ίδιες συνθήκες, τότε οι τιμές μέτρησης θα διαφέρουν μεταξύ τους, συνεπώς θα διαφέρουν και από την πραγματική τιμή του μεγέθους μέτρησης. Το πρόβλημα εστιάζεται μετά στο ότι, από τις τιμές μέτρησης πρέπει να προσδιοριστεί η σωστότερη δυνατή τιμή για την πραγματική τιμή του, μεγέθους μέτρησης και ένα μέτρο για την αβεβαιότητα της τιμής αυτής. Το αποτέλεσμα της μέτρησης αποτελείται μετά απ' αυτή τη σωστότερη δυνατή τιμή και την αβεβαιότητα της (παλαιάς : σφάλμα).

Στις αποκλίσεις μέτρησης γίνεται διάκριση μεταξύ των συστηματικών και των τυχαίων (στατιστικών) αποκλίσεων (“σφαλμάτων”).

Τα στατιστικά σφάλματα αποτελούν μια ολόκληρη θεωρία, η οποία στο σημείο αυτό δεν μπορεί να αναπτυχθεί.

Τα συστηματικά σφάλματα μπορούν να προκαλούνται από:

a. Λαθεμένη βαθμολόγηση των χρησιμοποιούμενων οργάνων μέτρησης, π.χ. όταν το “μέτρο” έχει μήκος $999mm$ ή $1002mm$, ή όταν η υποδιαίρεση της κλίμακας δεν είναι ομοιόμορφη. Τα σφάλματα κατά την βαθμολόγηση δεν αναγνωρίζονται εύκολα και προαπαιτούν ειδικό έλεγχο των οργάνων μέτρησης. Η ανομοιόμορφη υποδιαίρεση της κλίμακας ενός μέτρου διαπιστώνεται εύκολα, εφόσον για την μέτρηση χρησιμοποιείται κάθε φορά μια άλλη περιοχή του μέτρου.

b. την μέθοδο μέτρησης ή από δευτερεύουσες συνθήκες που δεν λήφθηκαν υποψιών. Έτσι π.χ. κατά την μέτρηση της διαμέτρου ενός λαστιχένιου σωλήνα με το διαστημόμετρο ο σωλήνας παραμορφώνεται λόγω της πίεσης των σιαγόνων. Τα αποτελέσματα των μετρήσεων είναι μικρότερα από την πραγματική διάμετρο.

Η εκτίμηση των συστηματικών αποκλίσεων, οι οποίες επηρεάζουν το αποτέλεσμα μονόπλευρα, απαιτεί κριτική ανάλυση όλων των σχετικών συνθηκών, τις ατέλειες του αντικείμενου μέτρησης, των οργάνων μέτρησης, της μεθόδου μέτρησης και αξιολόγησης, των περιβαλλοντικών συνθηκών και τέλος των προσωπικών ατελειών του παρατηρητή. Ο παρατηρητής οφείλει να αναγνωρίσει τις συστηματικές αποκλίσεις, να τις παρακάμψει ή να τις ελαχιστοποιήσει, οπωσδήποτε όμως να υπολογίσει την επίδρασή τους πάνω στο τελικό αποτέλεσμα και σύμφωνα με αυτή να διορθώσει το αποτέλεσμα μέτρησης. Η διόρθωση έχει την ίδια απόλυτη αριθμητική τιμή όπως η απόκλιση, αλλά αντίθετο πρόσημο.

2.2 . Χονδρικός υπολογισμός σφαλμάτων.

Ένας πολύ απλός και πρακτικός τρόπος υπολογισμού σφαλμάτων εξάγεται από το “πλήρες διαφορικό” μίας συνάρτησης. Η συνάρτηση αυτή δεν μετρείται άμεσα, αλλά έμμεσα. Ως παράδειγμα ανάπτυξης της τροπολογίας θα χρησιμοποιηθεί η ειδική αντίσταση ενός αγωγού, για την οποία ισχύει.

$$R = \rho \frac{l}{A}$$

και επομένως

$$\rho = \frac{R A}{l} = \frac{U}{I} \cdot \frac{\pi d^2}{4 l} \quad (1)$$

Η μέτρηση της ειδικής αντίστασης ρ προϋποθέτει λοιπόν την μέτρηση της τάσης U , της έντασης του ρεύματος I , της διαμέτρου d και του μήκους l του σύρματος. Κάθε ένα όμως από τα μεγέθη αυτά έχει και κάποιο σφάλμα, το μερικό σφάλμα, δηλαδή ΔU , ΔI , Δd και Δl . Τα σφάλματα αυτά προσδιορίζονται δια λίγων μετρήσεων ή δια ενός χονδρικού υπολογισμού.

Για το διαφορικό της συνάρτησης (1) προκύπτει

$$\Delta \rho = \frac{\pi d^2}{4 l I} \Delta U + \frac{U \pi d^2}{4 l I^2} \Delta I + \frac{U \pi 2 d}{4 l I} \Delta d + \frac{U \pi d^2}{4 l I^2} \Delta l \quad (2)$$

$$= \rho \frac{\Delta U}{U} + \rho \frac{\Delta I}{I} + \rho \frac{2}{d} \Delta d + \rho \frac{\Delta l}{l} \quad (2')$$

$$\frac{\Delta \rho}{\rho} = \frac{\Delta U}{U} + \frac{\Delta I}{I} + 2 \frac{\Delta d}{d} + \frac{\Delta l}{l} \quad (3)$$

Η σχέση (2) δίνει το απόλυτο σφάλμα $\Delta \rho$, ενώ η σχέση (3) το σχετικό σφάλμα. Επειδή το ζητούμενο είναι το μέγιστο δυνατό σφάλμα, στις παραπάνω σχέσεις χρησιμοποιήθηκαν οι απόλυτες τιμές των μερικών σφαλμάτων.

Σύμφωνα με τον παραπάνω τρόπο ο υπολογισμός του σφάλματος είναι δυνατός για οποιαδήποτε συνάρτηση. Ο τρόπος αυτός δεν διεκδικεί το χαρακτηρισμό της επιστημονικότητας, δίνει όμως τη δυνατότητα απόκτησης μίας εικόνας για την περιοχή, εντός της οποίας μπορεί να κυμαίνεται το σφάλμα. Η δυσκολία της διαδικασίας εστιάζεται στο χονδρικό υπολογισμό των μερικών σφαλμάτων των μεταβλητών (U , I , d , I). Στο σημείο αυτό ο πειραματιστής οφείλει να αναπτύξει δραστηριότητα και θάρρος και ιδέες. Τούτα είναι επιτρεπτά, εφ' όσον ο προσδιορισμός του σφάλματος της συνάρτησης είναι “χονδρικός”. Επειδή ο τρόπος ανάπτυξης του σφάλματος βασίζεται στην παραγωγή, είναι -χωρίς αμφιβολία- εύκολος και απομνημονεύσιμος, επαρκής δε στην πλειονότητα των πρακτικών εφαρμογών.

ΑΣΚΗΣΗ 1 (Μ 1)

ΜΗΚΟΣ ΚΑΙ ΜΑΖΑ (ΒΑΡΟΣ)

ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΜΕΡΟΣ

1. Όργανα μέτρησης μήκους.

1.1 Διαστημόμετρο.

Μήκη μέχρι και μερικά μέτρα μετρούνται – σε χαμηλές απαιτήσεις ως προς την ακρίβεια – με το διαστημόμετρο. (Σχ. 1). Το κύριο μέρος αυτού είναι η κλίμακα Μ, η οποία είναι βαθμολογημένη σε χιλιοστά (mm) και στην οποία είναι ορθογώνια τοποθετημένη η σιαγόνα μέτρησης MS₁. Η κλίμακα χρησιμεύει ταυτόχρονα ως οδηγός για τον σύρτη S₁ ο οποίος συνδέεται συμπαγώς, με την σιαγόνα μέτρησης MS₂. Ο σύρτης φέρει μια δεύτερη βοηθητική κλίμακα και στην μορφή αυτή ονομάζεται “βερνιέρος”.

Με τις σιαγόνες Σ₁ μετρούνται εξωτερικές διαστάσεις ενός σώματος, με τις γλώσσες Σ₂ μετρούνται εσωτερικές διαστάσεις, ενώ με τη γλώσσα Σ₃ διαστάσεις βάθους.



Σχ.1 Διαστημόμετρο

Η κλίμακα του βερνιέρου είναι υποδιαιρεμένη σε 10 ίσα τμήματα, ενώ ολόκληρο το μήκος της ισούται με 9 υποδιαιρέσεις, δηλαδή με 9 χιλιοστά, της κύριας κλίμακας.

Με: σ - μήκος μίας υποδιαίρεσης της κύριας κλίμακας ($= 1 \text{ mm}$)
 τ - μήκος μίας υποδιαίρεσης της κλίμακας του βερνιέρου ($= 0,9 \text{ mm}$)
 n -αριθμός υποδιαιρέσεων της κλίμακας του βερνιέρου ($=10$)
 $n-1$ - αριθμός υποδιαιρέσεων της κύριας κλίμακας του βερνιέρου ($=9$)
προκύπτει

$$(n-1)\sigma = n \cdot \tau$$

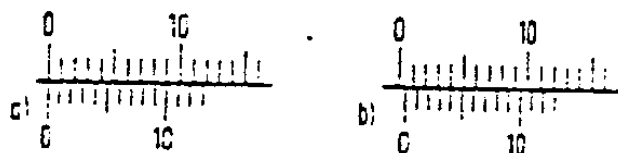
και επομένως

$$\delta = \sigma - \tau = \sigma/n = (1-0,9)\text{mm} = 1\text{mm}/10 = 0,1\text{mm} \quad (1)$$

Το μέγεθος δ ονομάζεται σταθερά του βερνιέρου.

Ως προς τη χρήση του δυναμόμετρου, παρακάτω αναφέρονται και αναλύονται μερικά παραδείγματα:

Σε περίπτωση που οι μηδενικές γραμμές της κύριας κλίμακας και της κλίμακας του βερνιέρου συμπίπτουν (Σχ. 2α), η απόσταση της πρώτης γραμμής του βερνιέρου από την πρώτη, γραμμή της κύριας κλίμακας είναι $0,1mm$, αυτή της δεύτερης γραμμής του βερνιέρου από τη δεύτερη γραμμή της κύριας είναι $0,2mm$ κλπ.



Σχ. 2 Βερνιέρος α.Θέση μηδενός β. Ρύθμιση $0,4mm$

Κατά την μετατόπιση του σύρτη π.χ. κατά $0,4mm$, η τέταρτη γραμμή της κλίμακας του βερνιέρου πρέπει να συμπίπτει, με την τέταρτη γραμμή της κύριας κλίμακας (Σχ. 2β). Επομένως ισχύει:

$$x = 4 \delta = 0,4mm$$

Αλλά υπάρχει και μια δεύτερη δυνατότητα εξεύρεσης του ιδίου αποτελέσματος: Η τέταρτη γραμμή της κύριας κλίμακας, η οποία συμπίπτει με κάποια γραμμή της κλίμακας του βερνιέρου, σημαίνει $4mm$. Η απόσταση αυτή είναι ίση με την ζητούμενη συν την απόσταση που δείχνει ο βερνιέρος. Στον βερνιέρο διαβάζεται $n=4$.

Επομένως:

$$4mm = x + n \cdot 0,9mm$$

$$\begin{aligned} x &= 4mm - 4 \cdot 0,9mm = (4 - 3,6)mm \\ &= 0,4mm \end{aligned}$$

Γενικεύοντας τις παραπάνω περιπτώσεις προκύπτει:

Η ζητούμενη απόσταση ισούται με την ακέραιη υποδιαίρεση της κύριας κλίμακας (η οποία βρίσκεται αριστερά πάνω από τη μηδενική γραμμή του βερνιέρου) συν το γινόμενο της σταθεράς του βερνιέρου και τη νιοστή υποδιαίρεση του βερνιέρου συμπίπτει με κάποια γραμμή της κύριας κλίμακας, δηλαδή:

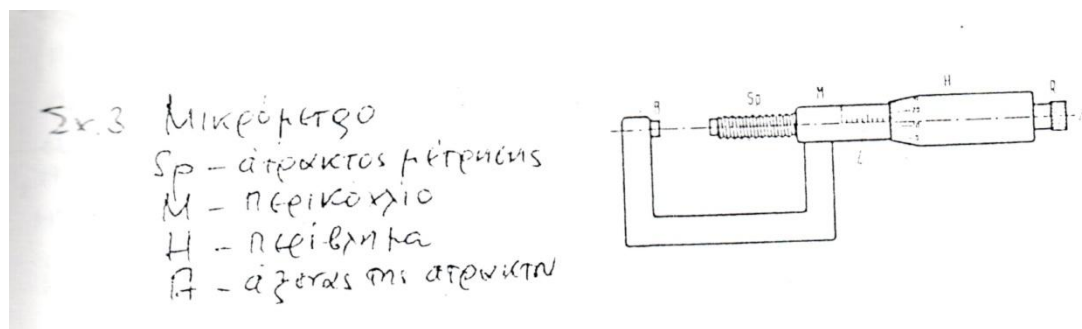
$$x = x_k + n \cdot \delta \quad (2)$$

Υποτίθεται ότι η υποδιαίρεση n του βερνιέρου συμπίπτει με μια υποδιαίρεση της κύριας κλίμακας. Αλλά μεγάλη πιθανότητα σύμπτωσης έχουν και οι υποδιαίρεσεις $(n-1)$ και $(n+1)$. Συνεπώς ως μέγιστο δυνατό σφάλμα ανάγνωσης μπορεί να θεωρηθεί συν/πλην μια υποδιαίρεση, δηλαδή $\pm \delta$. Δι' αυτού το τελικό αποτέλεσμα μπορεί να σημειωθεί ως εξής :

$$\begin{aligned} x &= (x_k + n\delta) \pm \delta \\ \text{π.χ.} \quad &= (2,0 \pm 0,7)mm \pm 0,1mm = (2,7 \pm 0,1)mm \end{aligned}$$

1.2. Μικρόμετρο

Τα μικρόμετρα που προβλέπονται για τη μέτρηση εξωτερικών διαστάσεων έχουν την τυπική μορφή του Σχ. 3. Ένα πεταλοειδές μεταλλικό τεμάχιο φέρει στο ένα άκρο το κυλινδρικό περικόχλιο Μ, του οποίου άξονας Α είναι κάθετος στο σκέλος και ο οποίος κείται στο επίπεδο του πεταλοειδούς. Μέσα στο περικόχλιο είναι η άτρακτος Sp, της οποίας το βήμα συνήθως είναι 0,5mm ή 1mm. Η άτρακτος είναι στερεά συνδεδεμένη με το τύμπανο Η, το οποίο περιβάλλει το περικόχλιο Μ. Περιστρέφοντας το τύμπανο Η κατά μια στροφή, τότε η άτρακτος Sp κινείται σύμφωνα με το βήμα του στη διεύθυνση του άξονα. Πάνω στο περικόχλιο Μ είναι ενσωματωμένη μια κλίμακα της οποίας η θέση του μηδενός είναι έτσι ρυθμισμένη, ώστε κατά την επαφή της ατράκτου Sp με το σημείο Β να βρίσκεται στο μετωπικό επίπεδο του τυμπάνου.



Σχ. 3 Μικρόμετρο
Sp-Άτρακτος μέτρησης
M-Περικόχλιο
H-Περίβλημα
A-Άξονας της ατράκτου

Μια πλήρης περιστροφή της ατράκτου (κοχλία) σημαίνει την μετατόπιση του τυμπάνου κατά 0,5 mm (βήμα 0,5 mm) ή κατά 1 mm (βήμα 1,0 mm) κατά μήκος του άξονα και επομένως κατά μήκος της κύριας κλίμακας. Αυτό σημαίνει, ότι μια μεταβολή της απόστασης κατά 10^{-2} mm μπορεί να παρακολουθηθεί με βεβαιότητα. Η σταθερά του τυμπάνου δ ισούται με το μήκος, το οποίο διανύει το χείλος του τυμπάνου πάνω στην κύρια κλίμακα. Γι' αυτό ισχύει:

$$\delta = \frac{\nu}{n} \quad (3)$$

όπου ν είναι το βήμα του κοχλία και n ο αριθμός υποδιαίρέσεων του τυμπάνου. Με $\nu=0,5$ mm και $n=50$ προκύπτει $\delta=10^{-2}$ mm. Η ίδια τιμή προκύπτει και με $\nu=1,0$ mm, $n=100$.

Για τη μέτρηση, το αντικείμενο μέτρησης τοποθετείται και στερεώνεται ανάμεσα Β και Sp. Μετά, πάνω στην κλίμακα του περικοχλίου αναγιγνώσκεται ο αριθμός χ_k των

συμπληρωμένων περιστροφών, ενώ πάνω στην κλίμακα του τυμπάνου ο αριθμός m του κλάσματος της περιστροφής. Δι' αυτού για την τιμή μέτρησης προκύπτει :

$$x = x_k + m\delta \quad (4)$$

Στην (4) έγινε η υπόθεση, ότι το κλάσμα της υποδιαιρέσεις του τυμπάνου είναι m . Αλλά μεγάλη πιθανότητα ορθής ανάγνωσης έχουν και οι υποδιαιρέσεις $(m-1)$ και $(m+1)$. Άρα το μέγιστο δυνατό σφάλμα είναι $\pm \delta$. Δι' αυτού το τελικό αποτέλεσμα πρέπει να σημειωθεί ως εξής :

$$x = (x_k + m\delta) \pm \delta$$

π.χ.

$$x = (2,10 + 49 \cdot 10^{-2}) \text{mm} \pm 0,01 \text{mm} = (2,59 \pm 0,01) \text{mm} \quad (5)$$

Οι κλίμακες παλαιών και κακώς χειριζόμενων μικρομέτρων, παρότι ο κοχλίας εφάπτεται με το σημείο B, δεν βρίσκονται στη θέση του μηδενός. Αυτό σημαίνει ότι σε κάθε μέτρηση υπάρχει ένα συστηματικό σφάλμα. Άρα η 'θέση του μηδενός' πρέπει να καθοριστεί ξεχωριστά. Ως προς τούτο, ο κοχλίας περιστρέφεται μέχρι την επαφή B και αναγιγνώσκεται τόσο $x_{k,0}$ όσο και m_0 . Η τιμή μέτρησης είναι δι' αυτού

$$x = [(x_k - x_{k,0}) + (m - m_0)10^{-2}] \text{mm} \pm 0,01 \text{mm} \quad (6)$$

Το φαινόμενο αυτό καλείται μετατόπιση του μηδενός. Τέλος ας σημειωθεί ότι η μετατόπιση μπορεί να είναι θετική ή αρνητική, και τούτο πρέπει από τον πειραματιστή να ληφθεί υπόψη. Η αιτία για το φαινόμενο της μετατόπισης του μηδενός είναι ο κακός χειρισμός του μικρομέτρου. Για την αποτροπή βλαβών, στο εξώτατο άκρων του τυμπάνου έχει προστεθεί από τον κατασκευαστή, η ροκάνα R. Αν η ροπή στρέψης στην R υπερβεί ένα ορισμένο όριο, τότε η R περιστρέφεται, αλλά δεν είναι σε θέση να μεταδώσει την κίνηση της στο τύμπανο H. Για το λόγο αυτό η άτρακτος (κοχλίας) μέτρησης δεν πρέπει ποτέ να ρυθμίζεται δια του τυμπάνου H, αλλά μόνο δια της ροκάνας R. Μόνο έτσι αποφεύγεται η καταστροφή του κοχλίου, μόνο έτσι αποτρέπεται η μετατόπιση του μηδενός.

1.3.Μέτρηση μήκους

Η μέτρηση μήκους είναι ένα από τα παλαιότερα προβλήματα μέτρησης . Η μονάδα του μήκους είναι το μέτρο (1m), και ορίζεται ως το μήκος εκείνης της απόστασης , η οποία διανύετε από το φως στο κενό στη διάρκεια $1/299792458$ s. Άρα το μέτρο εξαρτάται μετρολογικά από την ταχύτητα του φωτός ($c=299792458$ m/s). Παραταύτα στο διεθνές σύστημα μονάδων (SI) χρησιμοποιείται ως θεμελιώδης μονάδα.

2. ΖΥΓΟΣ

2.1. Λειτουργία του ζυγού

Ο πιο απλός ζυγός είναι ένας μοχλός με τρεις βραχίονες. Ο βραχίονας B (ο οποίος θα μπορούσε να έχει μια οποιαδήποτε μορφή με μικρή μάζα σε μεγάλη αντοχή κάμψης) μπορεί να περιστρέφεται γύρω από τον άξονα A, ο οποίος δεν περνά από το κέντρο βάρους S (βλ. Σχ.4). Καθόσον S βρίσκεται κάτωθεν του A, η φάλαγγα ισορροπεί. Το

σημείο S τοποθετείται κάτω από A (θέση μηδενός). Εφόσον η φάλαγγα περιστραφεί κατά τη γωνία α , δρα μια ροπή επαναφοράς

$$M_{\beta} = G_{\beta} s \sin \alpha$$

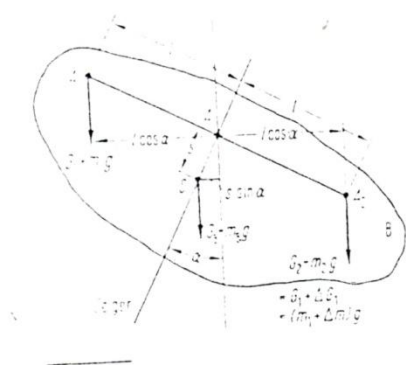
Η οποία προκαλεί μια ταλάντωση γύρω από τη θέση του μηδενός. Η απόσταση AS είναι ο τρίτος βραχίονας της φάλαγγας. Στους άξονες περιστροφής A_1 και A_2 (που έχουν ίση απόσταση l από τον άξονα A και μαζί του σχηματίζουν μια ευθεία) είναι τοποθετημένοι οι δίσκοι. Άρα τα σημεία A_1 και A_2 είναι τα σημεία εφαρμογής των δυνάμεων

$$G_1 = m_1 g \text{ και } G_2 = m_2 g$$

Η φάλαγγα ισορροπεί, εφόσον το άθροισμα των ροπών στρέψης είναι μηδέν ή εφόσον το άθροισμα των αριστερόστροφων ροπών ισούται με το άθροισμα των δεξιόστροφων ροπών, δηλαδή εφόσον :

$$m_1 g l \cos \alpha + m_{\beta} g s \sin \alpha = m_2 g l \cos \alpha \quad (7)$$

Από τη σχέση αυτή φαίνεται, ότι σε περίπτωση $m_2 = m_1$, η ένδειξη α του ζυγού είναι μηδέν, δηλαδή η φάλαγγα βρίσκεται σε θέση ισορροπίας.



Σχ. 4
Ο ζυγός ως μοχλός με τρεις βραχίονες A-A₁,
A-A₂ και A-S

Σχ.4 Ο ζυγός ως μοχλός με τρεις βραχίονες A-A₁, A-A₂ και A-S

Σε περίπτωση $m_1 \neq m_2$, πράγμα που ισχύει πάντοτε κατά τη ζύγιση, π.χ. $m_2 = m_1 + \Delta m$, τότε από (7) προκύπτει η ένδειξη

$$\tan \alpha = \frac{l}{m_{\beta} s} \Delta m \quad (8)$$

Για μικρές γωνίες ($\alpha \approx \tan \alpha$) η (8) παίρνει μορφή

$$\alpha = \frac{l}{m_{\beta} s} \Delta m \quad (8')$$

Συνεπώς η ένδειξη α είναι ανεξάρτητη από g και ανάλογη της διαφοράς Δm των μαζών. Ο λόγος :

$$\varepsilon = \frac{\text{ένδειξη}}{\text{διαφορά μαζών}} = \frac{\alpha}{\Delta m} = \frac{l}{m_\beta s} \quad (9)$$

ονομάζεται 'ευαισθησία του ζυγού'.

Σε μικρές γωνίες α στη σχέση (7) μπορεί να δοθεί και η μορφή

$$\begin{aligned} M_A &= -m_\beta g s a + \Delta m g l \\ &= -D \cdot \alpha + \Delta m \cdot g \cdot l \end{aligned} \quad \text{και με} \quad D = m_\beta g s \quad (10)$$

Όμως για τη ροπή στρέψης --σύμφωνα με τον θεμελιώδη νόμο της περιστροφικής κίνησης -- ισχύει

$$M_A = I_A \ddot{\alpha} \quad (11)$$

Άρα προκύπτει

$$\begin{aligned} I_A \ddot{\alpha} &= -D \alpha + \Delta m g l \\ &= -D \left(\alpha - \frac{\Delta m g l}{D} \right) = -D \bar{\alpha} \end{aligned}$$

Και επομένως

$$I_A \ddot{\bar{\alpha}} = -D \bar{\alpha}$$

(12)

Η εξίσωση αυτή αναγνωρίζεται αμέσως ως εξίσωση ταλάντωσης, η οποία έχει περίοδο :

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I_A}{D}} = 2\pi \sqrt{\frac{I_A}{m_\beta g s}} \quad (13)$$

Η σχέση (13) σχετίζεται άμεσα με τη σχέση (9). Αυτό σημαίνει ότι η περίοδος T σχετίζεται άμεσα με την ευαισθησία του ζυγού. Στην (13) I_A είναι η ροπή αδράνειας, η οποία είναι ανάλογη του l και της μάζας Δm . Συνεπώς από (13) προκύπτει η συνάρτηση:

$$T \sim \sqrt{\Delta m \varepsilon} \quad (14)$$

Συνεπώς η αύξηση της ευαισθησίας του ζυγού συνεπάγεται κατά κανόνα την αύξηση της περιόδου, εφόσον π.χ. η επιμήκυνση του βραχίονα αυξάνει τη ροπή αδράνειας.

Αλλά, από την εξίσωση (9) δεν πρέπει να συμπεραίνεται σώνει και καλά, ότι η ευαισθησία είναι τόσο μεγαλύτερη, όσο μεγαλύτερο είναι το μήκος του βραχίονα, εφόσον με το μήκος του αυξάνεται και η μάζα του και το βάρος του. Το βάρος $m_\beta \cdot g$ μάλλον πρέπει να αυξάνεται πιο αισθητά, ώστε να εξασφαλίζεται η στερεότητα του βραχίονα. Άρα από (9) πρέπει να εξαχθεί το συμπέρασμα, ότι η χρήση βραχέων βραχιόνων είναι ευνοϊκή. Δι' αυτού προκύπτει και το πλεονέκτημα, ότι η περίοδος και επομένως και ο χρόνος ζύγισης έχουν μικρή διάρκεια. Επίσης προκύπτει, ότι η ευαισθησία αυξάνεται, όσο μικραίνει το μέγεθος s , όσο πιο κοντά στον άξονα

περιστροφής είναι, δηλαδή το κέντρο μάζας. Αν όμως $s=0$, τότε $\varepsilon = \infty$, και η ζύγιση δεν είναι πλέον δυνατή.

2.2. Αναγωγή της δύναμης βαρύτητας στο κενό

Ένα σώμα όγκου V που περιβάλλεται από ένα αέριο ή από ένα υγρό πυκνότητας ρ , δέχεται την επίδραση μιας δύναμης, η οποία έχει αντίθετη φορά από τη βαρύτητα και της οποίας η τιμή είναι :

$$F_A = QVg \quad (15)$$

Για το λόγο αυτό, οι δυνάμεις που εφαρμόζονται στα σημεία A_1 και A_2 του ζυγού (Σχ. 4) δεν είναι το πραγματικό βάρος του σώματος $G_\Sigma^0 = m_\Sigma g$ και το πραγματικό βάρος του αντίβαρου $G_A^0 = m_A g$. Τα βάρη αυτά είναι ελαττωμένα κατά την τιμή της άνωσης $F_{A\Sigma} = Q_L g V_\Sigma$ και $F_{AA} = Q_L g V_A$ αντίστοιχα ρ_L είναι η πυκνότητα του αέρα, ενώ V_Σ , V_A είναι ο όγκος του σώματος και του αντίβαρου αντίστοιχα. Η συνθήκη ισορροπίας (7) πρέπει επομένως να τροποποιηθεί σχετικά. Σε περίπτωση ισορροπίας ($\alpha=0$) ισχύει:

$$G_\Sigma^0 - V_\Sigma Q_L g = G_A^0 - V_A Q_L g \quad (16)$$

Αν η φύση του ζυγισομένου σώματος και του αντίβαρου είναι γνωστή, τότε οι V_Σ και V_A υπολογίζονται σύμφωνα με:

$$V_\Sigma = \frac{m_\Sigma}{Q_\Sigma} \quad V_A = \frac{m_A}{Q_A} \quad (17)$$

Δι' αντικατάστασης στην (16) προκύπτει:

$$m_\Sigma = m_A \frac{1 - Q_L / Q_A}{1 - Q_L / Q_\Sigma} \quad (18)$$

Οι λόγοι των πυκνοτήτων ρ_L / ρ_A και ρ_L / ρ_Σ είναι πολύ μικρά μεγέθη (10^{-3}). Έτσι η έκφραση $\frac{1}{(1 - \frac{Q_L}{Q_\Sigma})}$ μπορεί να αναπτυχθεί σε σειρά*. Δι' αυτού από (18) προκύπτει:

$$m_\Sigma = m_A \left(1 - \frac{Q_L}{Q_A}\right) \left(1 + \frac{Q_L}{Q_\Sigma}\right) = m_A \left(1 - \frac{Q_L}{Q_A} + \frac{Q_L}{Q_\Sigma} + \frac{Q_L^2}{Q_A Q_\Sigma}\right)$$

Εδώ, το τετραγωνικό σκέλος (τάξη μεγέθους 10^{-6}) μπορεί σε σύγκριση με τις απλές εκφράσεις να αμεληθεί. Επομένως προκύπτει:

$$m_\Sigma = m_A \left(1 - \frac{Q_L}{Q_A} + \frac{Q_L}{Q_\Sigma}\right) \quad (19)$$

Η έκφραση αυτή είναι ήδη η ορθή τιμή για τη μάζα του ζυγισμένου σώματος

*Σειριακή ανάπτυξη

$$y(x) = y(0) + y'(0)x + \frac{y''(0)}{2}x^2 + \dots$$

ΠΡΑΚΤΙΚΟ ΜΕΡΟΣ

1. ΜΗΚΟΣ

1.1. Διαστημόμετρο

1.1.1. Αναγνώριση διαστημομέτρου – εύρεση της σταθεράς του βερνιέρου (δ), του σφάλματος ανάγνωσης ($\sigma = \pm \delta$) και της μετάθεσης του μηδενός (μ).

Καταχωρείστε τα αποτελέσματα σε Πίνακα.

1.1.2. Βρείτε, χρησιμοποιώντας το διαστημόμετρο, το μήκος ενός διαστήματος εξωτερικά, ενός διαστήματος εσωτερικά και ενός διαστήματος εις βάθος, διαφόρων αντικειμένων. Διατυπώστε τις μετρήσεις σας στην μορφή (2) και αποδώστε τα τελικά αποτελέσματα. (2')

1.1.3. Εξάσκηση με διαστημόμετρο σε τυχαίες μετρήσεις δική σου επιλογής.

1.2. Μικρόμετρο

1.2.1. Αναγνώριση μικρομέτρου – εύρεση της σταθεράς του μικρομέτρου (δ) του σφάλματος ανάγνωσης ($\sigma = \pm \delta$) και της μέτρησης του μηδενός (μ) . Καταχωρήστε τα αποτελέσματα σε πίνακα.

1.2.2. Βρείτε, χρησιμοποιώντας το μικρόμετρο, το μήκος δύο διαστημάτων δική σας επιλογής. Διατυπώστε τις μετρήσεις σας στην μορφή (4) και αποδώστε τα τελικά αποτελέσματα (μορφή 5).

1.2.3. Εξάσκηση με μικρόμετρο σε τυχαίες μετρήσεις δικής σας επιλογής.

2. ΖΥΓΟΣ

2.1. Μέτρηση των μαζών τριών αντικειμένων δική σας επιλογής.

2.2. Υπολογισμός των βαρών των αντικειμένων.

ΑΣΚΗΣΗ 2 (Μ 2)

ΣΠΕΙΡΟΕΙΔΕΣ ΕΛΑΤΗΡΙΟ

ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΜΕΡΟΣ

1. Νόμος του HOOKE και εξίσωση δυνάμεων.

Μεταξύ της τάσης και της ελαστικής παραμόρφωσης ενός σώματος υπάρχει μια απλή σχέση, ο νόμος του HOOKE.

Οι ελαστικές τάσεις και οι παραμορφώσεις είναι ανάλογες. Ειδικά, εάν η εφαρμοζόμενη τάση (δύναμη ανά εμβαδόν) μηδενιστεί, τότε η παραμόρφωση εξαφανίζεται, δηλαδή το σώμα επιστρέφει στην αρχική του μορφή. Ο νόμος του HOOKE είναι ένας εμπειρικός νόμος, με περιορισμένη περιοχή ισχύος, σωστός είναι μόνο σε μικρές παραμορφώσεις. Για ένα σύρμα π.χ. με μήκος l , διατομή S , στο οποίο εφαρμόζεται η δύναμη F , συνεπώς η τάση $\sigma = F/S$, πειραματικά διαπιστώνεται, ότι η επιμήκυνση είναι :

$$\Delta l = \frac{1}{E} \sigma l \Rightarrow F = E \frac{S}{l} \Delta l \quad (1)$$

όπου E είναι μια υλική σταθερά που καλείται μέτρο ελαστικότητας. Κατά την επιμήκυνση ενός σπειροειδούς ελατηρίου το υλικό καταπονείται προπαντός 'στρεπτικά'. Οι ελαστικές ιδιότητες του ελατηρίου αυτού καθορίζονται -πέρα από τις γεωμετρικές διαστάσεις του- από το μέτρο στρέψης του υλικού. Επ' αυτού μεταξύ της σταθεράς k του ελατηρίου, της διαμέτρου του σύρματος d , της μέσης διαμέτρου του των σπειρών D , του αριθμού των σπειρών N και του μέτρου στρέψης G ισχύει η σχέση

$$k = G \frac{d^4}{8ND^3} \quad (2)$$

Η εφαρμοζόμενη στο ελατήριο εξωτερική δύναμη F προκαλεί την επιμήκυνση του ελατηρίου και αφυπνίζει δι' αυτού τη δύναμη επαναφοράς, η οποία σχετίζεται άμεσα με την ίδια την επιμήκυνση και με την σταθερά του ελατηρίου. Δι' αυτού προκύπτει η σχέση

$$F = -k x \quad (3)$$

Η δύναμη αυτή αποτελεί το ένα σκέλος της εξίσωσης δυνάμεων. Το δεύτερο σκέλος είναι -σύμφωνα με το Δεύτερο νόμο του NEWTON-

$$F = m \ddot{x} \quad (4)$$

Συνεπώς, με (3) και (4) για την εξίσωση δυνάμεων λαμβάνεται

$$m \ddot{x} = -kx \rightarrow \ddot{x} + \frac{k}{m} x = 0 \quad (5)$$

2. Εξίσωση κίνησης

Η εξίσωση κίνησης $x=f(t)$ προκύπτει από τη λύση της εξίσωσης δυνάμεων (5). Η σχέση αυτή είναι μια διαφορική εξίσωση, η οποία χωρίς σχετικές μαθηματικές γνώσεις, δεν μπορεί να λυθεί. Η λύση όμως μπορεί παραταύτα να βρεθεί, εφόσον χρησιμοποιηθεί ένας πλάγιος τρόπος, ο οποίος συνιστάται στην εφαρμογή της Αρχής Διατήρησης της Ενέργειας. Γι' αυτήν ισχύει:

$$m \ddot{x} + kx = 0 \rightarrow m \dot{x} dx + kx dx = 0$$

$$m \frac{du}{dt} u dt + kx dx = 0 \rightarrow m u du + kx dx = 0$$

$$\frac{m}{2} u^2 + \frac{k}{2} x^2 = E \quad (6)$$

όπου E είναι η ολική ενέργεια, η οποία προκύπτει όταν $u=0$ και $x=x_m$. Επομένως ισχύει

$$E = \frac{k}{2} x_m^2 \quad (7)$$

Από (6) προκύπτει

$$\frac{dx}{dt} = u = \sqrt{\frac{2}{m} \left(E - \frac{k}{2} x^2 \right)} = \sqrt{\frac{2E}{m} \left(1 - \frac{x^2}{2E/k} \right)} = \sqrt{\frac{2E}{m}} \sqrt{1 - \frac{x^2}{2E/k}}$$

Η σχέση αυτή είναι ένα ολοκλήρωμα, εφόσον

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{2E}{m}} \sqrt{1 - \frac{x^2}{2E/k}} \Rightarrow \sqrt{\frac{2E}{m}} dt = \frac{dx}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{2E/k}}}$$

Με $z = \frac{x}{\sqrt{2E/k}}$ και $dx = \sqrt{2E/k} dz$ προκύπτει

$$\sqrt{2E/m} t = \sqrt{2E/k} \int \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} \Rightarrow \sqrt{\frac{k}{m}} t = \int \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}$$

Η ολοκλήρωση έχει ως αποτέλεσμα

$$\sqrt{\frac{k}{m}} t = t_0 \xi \sin z - \varphi_0 = t_0 \xi \sin \frac{x}{\sqrt{2E/k}} - \varphi_0$$

Και επομένως

$$x = \sqrt{\frac{2E}{k}} \sin \left(\sqrt{\frac{k}{m}} t + \varphi_0 \right) \quad (8)$$

όπου-σύμφωνα με (7)- $\sqrt{\frac{2E}{k}} = x_m$. Η σχέση (8) είναι ήδη η ζητούμενη εξίσωση κίνησης η οποία περιγράφει την αρμονική ταλάντωση, της οποίας κυκλική συχνότητα είναι

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (9)$$

Από (9) για την περίοδο της ταλάντωσης προκύπτει

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \quad . \quad (10)$$

Συνεπώς μια μάζα η οποία στερεώνεται στο ελεύθερο άκρο ενός κατακόρυφα αναρτημένου ελατηρίου και στην οποία δίδεται μια ορισμένη ορμή, εκτελεί μια αρμονική ταλάντωση γύρω από τη θέση ισορροπίας. Το μέγεθος φ_0 είναι μια σταθερά ολοκλήρωσης και καθορίζει την απομάκρυνση x της μάζας από τη θέση ισορροπίας τη στιγμή της έναρξης της κίνησης.

3. Ενεργός μάζα.

Σύμφωνα με (10), η περίοδος της ταλάντωσης είναι $T=0$, εφόσον στο ελεύθερο άκρο του ελατηρίου, δεν στερεωθεί κανένα σώμα, δηλαδή εφόσον $m=0$. Το πόρισμα αυτό δεν είναι σωστό, επειδή και το ίδιο, το ελατήριο έχει μάζα. (ο καθένας μπορεί να πεισθεί κάνοντας μερικές δοκιμές, ότι το ελατήριο μόνο του έχει μια πεπερασμένη διάρκεια ταλάντωσης). Άρα η μάζα m_E του ελατηρίου πρέπει να ληφθεί υπόψη. Για την απόδειξη της ενεργού συμμετοχής της μάζας m_E , στην ταλάντωση αφετηρία αποτελεί η Αρχή διατήρησης της ενέργειας, σύμφωνα με την οποία το άθροισμα της κινητικής και της δυναμικής ενέργειας πρέπει να είναι σταθερό.

Η δυναμική ενέργεια του εκκρεμούς στη θέση x είναι

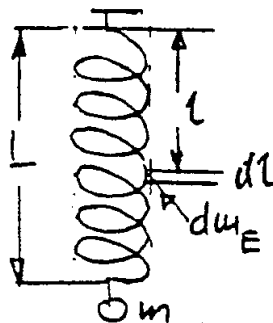
$$E_{\Delta} = \int_0^x kx dx = \frac{k}{2} x^2 \quad . \quad (11)$$

Η κινητική ενέργεια αποτελείται από δύο συνιστώσες, την κινητική ενέργεια του αναρτημένου σώματος και την κινητική ενέργεια $E_{κ|E}$ του ελατηρίου. Επομένως ισχύει

$$E_{\kappa} = \frac{m}{2} u^2 + E_{\kappa|E} \quad . \quad (12)$$

Για τον υπολογισμό της κινητικής ενέργειας του ίδιου του ελατηρίου, το ελατήριο-σύμφωνα με Σχ. 1-το θεωρούμε διαιρεμένο σε πολλά μικρά κομμάτια μάζας dm_E , στα οποία αντιστοιχεί το μήκος dl . Αν το ελατήριο είναι ομογενές, τότε ισχύει

$$\frac{dm_E}{m_E} = \frac{dl}{L} \quad . \quad (13)$$



Σχ. 1 Κινητική ενέργεια

Εφόσον η μάζα m του σώματος έχει μετατοπιστεί από τη θέση ισορροπίας κατά x και εφόσον η απόσταση του στοιχείου μάζας dm_E από το σημείο ανάρτησης είναι l , τότε το στοιχείο αυτό έχει εκτραπεί από τη θέση ισορροπίας του κατά

$$\xi = \frac{l}{L} x \quad . \quad (14)$$

Αν δηλαδή το σώμα m κινείται με ταχύτητα $u = \dot{x}$, τότε η μάζα dm_E κινείται με ταχύτητα

$$\dot{\xi} = \frac{l}{L} \dot{x} \quad . \quad (15)$$

Επομένως για την κινητική ενέργεια της μάζας dm_E προκύπτει

$$dE_{k_E} = \frac{dm_E}{2} \dot{\xi}^2 = \frac{1}{2} \left(m_E \frac{dl}{L} \right) \left(\frac{l}{L} \dot{x} \right)^2 \quad (16)$$

$$E_{k_E} = \int_0^L \frac{m_E}{2} \dot{x}^2 \frac{l^2}{L^2} \frac{dl}{L} = \frac{m_E}{2} \dot{x}^2 \frac{l}{L^3} \int_0^L l^2 dl = \frac{1}{3} \frac{m_E}{2} \dot{x}^2 \quad (16')$$

Έτσι, για την ολική ενέργεια του εκκρεμούς προκύπτει

$$E_{o\lambda} = E_{\Delta} + E_K = E_{\Delta} + \frac{m}{2} u^2 + \frac{1}{3} \frac{m_E}{2} u^2$$

$$E_{o\lambda} = \frac{\kappa}{2} x^2 + \frac{1}{2} \left(m + \frac{m_E}{3} \right) u^2 \quad . \quad (17)$$

Συνεπώς, στην ταλάντωση το ελατήριο, συμμετέχει με το $1/3$ της μάζας του. Η μάζα αυτή καλείται ενεργός μάζα του ελατηρίου

$$m_{ev} = \frac{m_E}{3} \quad . \quad (18)$$

4. Τροποποιημένες σχέσεις

Το γεγονός, ότι στην ταλάντωση συμμετέχει και η ενεργός μάζα του ελατηρίου, συνεπάγεται την τροποποίηση της εξίσωσης δυνάμεων, της εξίσωσης κίνησης, της κυκλικής συχνότητας και δι' αυτού και της περιόδου ταλάντωσης. Από την παραγωγή της ολικής ενέργειας (17) ως προς το χρόνο προκύπτει η τροποποιημένη εξίσωση δυνάμεων

$$\left(m + \frac{m_E}{3} \right) \ddot{x} + k x = 0 \quad . \quad (19)$$

Αντί της (8), για την εξίσωση κίνησης ισχύει πλέον

$$x = \sqrt{\frac{2E}{k}} \sin \left(\sqrt{\frac{k}{m + m_E/3}} t + \varphi_0 \right) \quad , \quad (20)$$

και επομένως

$$\omega^2 = \frac{k}{m + m_E/3} \quad , \quad T^2 = 4\pi^2 \frac{m + m_E/3}{k} \quad . \quad (21)$$

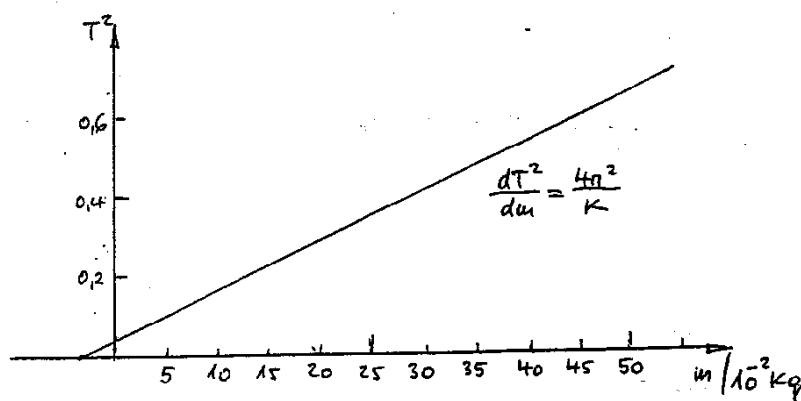
Από την (21) φαίνεται ότι η συνάρτηση $T^2 = f(m)$ είναι ευθεία. Επομένως προκύπτει (βλ. σχ. 2). Σε $m=0$

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{k} \frac{m_E}{3} . \quad (22)$$

Στο σημείο αυτό η ευθεία τέμνει τον άξονα T^2 . Απεναντίας, όταν $T^2=0$, προκύπτει $m = -\frac{m_E}{3}$. (23)

Στο σημείο αυτό η ευθεία τέμνει τον άξονα m . Ο προσδιορισμός της ενεργού μάζας είναι και στα δύο αυτά σημεία δυνατός. Η κλίση της ευθείας είναι

$$\frac{dT^2}{dm} = \frac{4\pi^2}{k} \Rightarrow k = \frac{4\pi^2}{dT^2 / dm} . \quad (24)$$



Σχ. 2 Υπολογισμός της ενεργούς μάζας και της σταθεράς.

Εξάλλου από τη σχέση (24) φαίνεται καθαρά, ότι η ενεργός μάζα δεν επηρεάζει τη σταθερά του ελατηρίου. Με γνωστή την ενεργό μάζα ο προσδιορισμός της σταθεράς του ελατηρίου είναι εύκολη υπόθεση. Το ίδιο ισχύει και αντίστροφα. Στις περιπτώσεις αυτές το κάθε φορά άγνωστο μέγεθος υπολογίζεται π.χ. με τη βοήθεια της σχέσης (19) μετρώντας την επιμήκυνση x . Έτσι π.χ. για $m_E/3$ προκύπτει

$$m_{E/3} = \frac{kx}{q} - m \quad (25)$$

και αντίστοιχα για τη σταθερά ελατηρίου $k = \frac{(m + m_{E/3})q}{x}$

5. Υπολογισμός της ενεργού μάζας και της σταθεράς ελατηρίου με τη μέθοδο των δυο μετρήσεων.

Ως προς τούτο αφετηρία είναι η σχέση (19). Από την ανάρτηση της μάζας m_1 και την εξισορρόπηση των δυνάμεων προκύπτει

$$(m_1 + m_{ev})q = kx_1$$

Αντίστοιχα για

$$m_2 (m_2 + m_{ev}) q = kx_2 .$$

Άρα πρόκειται για σύστημα δυο εξισώσεων για δυο αγνώστους. Η λύση έχει τα αποτελέσματα

$$m_{ev} = \frac{m_2 x_1 - m_1 x_2}{x_2 - x_1} \quad k = g \frac{m_2 - m_1}{x_2 - x_1} . \quad (26)$$

6. Διχοτόμηση και σταθερά ελατηρίου.

Η σταθερά του ελατηρίου εξαρτάται -πέρα από το υλικό κατασκευής- και από το μήκος του ελατηρίου. Ως προς τούτο σε ένα ελατήριο με k_1 και l_1 εφαρμόζεται μια δύναμη, F , η οποία το επιμηκώνει κατά x_1 . Το ήμισυ του ελατηρίου επιμηκώνεται επομένως κατά $\frac{x_1}{2} = x_2$. Αυτό σημαίνει, ότι η δύναμη F εφαρμόζεται πλήρως σε κάθε σημείο του ελατηρίου. Αν τώρα το ελατήριο διχοτομηθεί, εφαρμόζοντας και πάλι την ίδια δύναμη, ισχύει

$$F = k_1 x_1 = k_2 x_2 = k_2 \frac{x_1}{2}$$

Άρα προκύπτει

$$k_2 = 2k_1 \quad (27)$$

Συνεπώς, με τη διχοτόμηση του ελατηρίου η σταθερά διπλασιάζεται. Με τον τεμαχισμό του ελατηρίου σε n μέρη η σταθερά του ενός μέρους είναι $k_n = nk_1$. Το ίδιο αποτέλεσμα λαμβάνεται και με τη βοήθεια της δυναμικής ενέργειας. Το ελατήριο μήκους, l_1 και σταθεράς k_1 επιμηκώνεται κατά x_1 . Η αντίστοιχη δυναμική ενέργεια είναι $E_\Delta = \frac{k_1}{2} x_1^2$. Τώρα το ελατήριο διχοτομείται σε δυο ίσα μέρη. Στο ένα μέρος από αυτά εφαρμόζεται μια τέτοια δύναμη, ώστε η επιμήκυνση να ισούται με $x_2 = \frac{x_1}{2}$. Το ίδιο γίνεται και στο δεύτερο μέρος του ελατηρίου, ώστε η ολική μετατόπιση να ισούται με x_1 . Άρα ισχύει

$$\frac{k_1}{2} x_1^2 = \frac{k_2}{2} \left(\frac{x_1}{2} \right)^2 + \frac{k_2}{2} \left(\frac{x_1}{2} \right)^2$$

Συνεπώς, το καινούριο μισό ελατήριο, έχει μια δυναμική ενέργεια η οποία ισούται με το μισό της δυναμικής ενέργειας του αρχικού ελατηρίου. Από το πόρισμα αυτό όμως προκύπτει αμέσως η ορθότητα της σχέσης (27) και κατ' επέκταση της σχέσης (28).

ΠΡΑΚΤΙΚΟ ΜΕΡΟΣ

1. Ζύγισμα του ελατηρίου και υπολογισμός της ενεργούς μάζας σύμφωνα με (18).
2. Μέτρηση του μήκους l_0 του ελατηρίου σε οριζόντια θέση.
3. Μετρήσεις της επιμήκυνσης και αξιολόγηση.
 - 3.1. Τοποθέτηση μαζών στο ελεύθερο άκρο του ελατηρίου και μέτρηση της επιμήκυνσης σύμφωνα με τον παρακάτω πίνακα.

m/g	F/N	l_0 / m	l / m	$x = l - l_0 / m$
0				
100				
200				
300				
400				
500				

- 3.2 Κατασκευή γραφήματος σύμφωνα με (19)

$$\left(m + \frac{m_E}{3}\right) \ddot{x} = kx \Rightarrow mg = kx - \frac{m_E}{3} g \Rightarrow F = kx - m_{ev} g$$

Σαν τεταγμένη επιλέγεται η δύναμη F και σαν τετμημένη η επιμήκυνση x (βλ. πίνακα υπό 3.1)

Υπολογισμός της ενεργού μάζας από την τομή της ευθείας με τον άξονα F και σε γνωστή k από την τομή με τον άξονα x .

Υπολογισμός της σταθεράς του ελατηρίου από την κλίση της ευθείας, ισχύει $\frac{dF}{dx} = k$

4. Μετρήσεις της περιόδου και αξιολόγηση.

4.1. Τοποθέτηση μαζών στο ελεύθερο άκρο του ελατηρίου, ταλάντωση του συστήματος και μέτρηση της περιόδου σύμφωνα με τον παρακάτω πίνακα (το πλάτος της ταλάντωσης να μην υπερβαίνει 2 cm).

m/g	Ταλαντώσεις n	Χρόνος t/s για n ταλαντώσεις	Περίοδος $T=t/n$	T^2 / s^2
100	20			
200	20			
300	20			
400	20			
500	20			

- 4.2. Κατασκευή γραφήματος σύμφωνα με (21) και Σχ. 2

Υπολογισμός της σταθεράς του ελατηρίου από την κλίση του γραφήματος.

Υπολογισμός της ενεργούς μάζας από τις τομές του γραφήματος με του άξονες T^2 και m .

5. Σύγκριση αποτελεσμάτων.

5.1. Σύγκριση των τιμών για την σταθερά ελατηρίου των δυο γραφημάτων.

5.2. Σύγκριση των τιμών για την ενεργό μάζα των δυο γραφημάτων (4 τιμές) και της ζύγισης (βλ.εδ.1)

6. Μέτρο στρέψης.

Μέτρηση του αριθμού σπειρών N του ελατηρίου

της διαμέτρου d του σύρματος

της διαμέτρου D των σπειρών

Υπολογισμός του μέτρου στρέψης σε γνωστή σταθερά ελατηρίου σύμφωνα με (2).

ΑΣΚΗΣΗ 3 (Μ 3)

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟ ΕΚΚΡΕΜΕΣ

ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΜΕΡΟΣ

1. ΟΡΙΣΜΟΣ

Μαθηματικό εκκρεμές ονομάζεται μία σημειακή μάζα, η οποία είναι αναρτημένη σε νήμα. Το ίδιο το νήμα δεν έχει μάζα δική του, εξάλλου δεν μπορεί να επιμηκυνθεί. Κανονικά το μαθηματικό εκκρεμές δεν είναι κατασκευάσιμο, εφόσον σημειακή μάζα σημαίνει ‘μάζα χωρίς όγκο’, πράγμα που είναι αδύνατο.

Η κατασκευή του γίνεται προσεγγιστικά: Το άκρον ενός νήματος στερεώνεται σε ένα σταθερό σημείο, στο δε δεύτερο άκρον του ένα σφαιρίδιο. Το σφαιρίδιο αυτό, εφόσον εκτραπεί με κάποιο τρόπο από τη θέση ισορροπίας του, εκτελεί μία κίνηση πάνω στην επιφάνεια της σφαίρας. Για την προσεγγιστική υλοποίηση του μαθηματικού εκκρεμούς πρέπει να πληρούνται οπωσδήποτε οι εξής δύο συνθήκες:

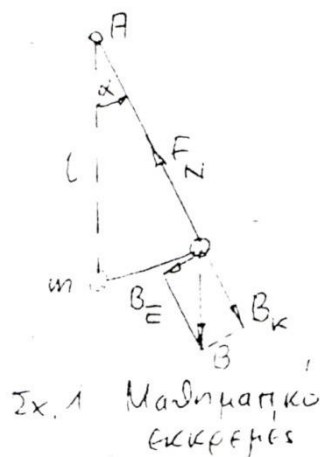
α. Οι διαστάσεις του αναρτημένου σφαιριδίου πρέπει να είναι μικρές σε σύγκριση με το μήκος του νήματος

β. Η εκτροπή από τη θέση ισορροπίας τη στιγμή της εκκίνησης πρέπει να είναι μικρή, έστω μερικές μοίρες. Η αναγκαιότητα της συνθήκης αυτής θα μελετηθεί αμέσως.

2. ΕΙΣΩΣΗ ΔΥΝΑΜΕΩΝ

Σύμφωνα με το Σχ. 1 θεωρούμε και εξετάζουμε μία επίπεδη κίνηση όπου μία μάζα m -κάτω από την επίδραση της βαρύτητας- μέρος του κύκλου. Το βάρος $B = mg$ δρα κατακόρυφα προς τα κάτω έχει δε σημείο εφαρμογής το γεωμετρικό κέντρο του σφαιριδίου, δηλαδή της σημειακής μάζας. Αυτό το βάρος B , αναλύεται στις δύο συνιστώσες B_E και B_K . Η συνιστώσα B_E είναι παράλληλη προς τη διεύθυνση της τροχιάς, η συνιστώσα B_K απεναντίας κάθετη. Αντίθετη προς τη συνιστώσα B_K η τάση του νήματος F_N . Άρα προς το κέντρο του κύκλου δείχνει μια κεντρομόλος δύναμη

$$\frac{mu^2}{l} = F_N - B_K \quad (1)$$



Σχ.1 Μαθηματικό εκκρεμές

Συνεπώς για την τάση του νήματος λαμβάνεται

$$F_N = m \frac{u^2}{l} + B_K \quad (1')$$

Η δύναμη F_N , δηλαδή η τάση του νήματος, είναι μία δύναμη εξαναγκασμού. Αυτό σημαίνει, ότι η δύναμη αυτή αναγκάζει το σώμα να διαγράφει την κυκλική τροχιά. Όπως όλες οι δυνάμεις εξαναγκασμού έτσι και η τάση του νήματος, είναι κάθετη πάνω στην τροχιά της κίνησης.

Οι τιμές των δυνάμεων B_E και B_K υπολογίζονται γεωμετρικά. Από το Σχ. 1 προκύπτει

$$|B_E| = mg |\sin a| \quad (2)$$

Η γωνία εκτροπής a θεωρείται θετική, εφόσον η εκτροπή έχει αντίθετη φορά από την κίνηση του δείκτη του ρολογιού. Αντίστοιχα οι δυνάμεις που έχουν αυτή τη φορά, θεωρούνται επίσης θετικές. Με τις συνθήκες αυτές, από (2) προκύπτει

$$B_E = -mg \sin a \quad (2')$$

Από τη σχέση αυτή φαίνεται καθαρά, ότι το $\sin a$ προσδιορίζει επακριβώς τη δύναμη B_E . Για το $\sin a$ προκύπτει όμως – σύμφωνα με Σχ. 2- και μια άλλη σημασία, η οποία δεν σχετίζεται με τις δυνάμεις, αλλά με τις γεωμετρικές διαστάσεις, εφόσον ισχύει

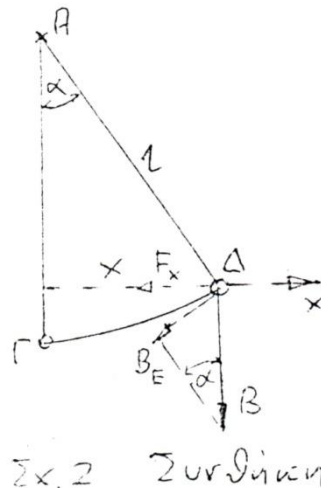
$$\sin a = \frac{x}{l} \quad (3)$$

Άρα από (2') προκύπτει

$$B_E = -mg \frac{x}{l} \quad (2'')$$

Για πολύ μικρές γωνίες εξάλλου, η καμπυλόγραμμη τροχιά, δηλαδή το τόξο ΓΔ, μπορεί προσεγγιστικά, να θεωρηθεί ως ευθεία. Στην περίπτωση αυτή ισχύει

$$F_x = B_E = -mg \frac{x}{l} \quad (4)$$



Σχ. 2 Συνθήκη

Αυτό σημαίνει, ότι η δύναμη B_E έχει τη διεύθυνση του άξονα x . Στο Σχ.2 η γωνία εκτροπής είναι $\alpha = \angle(F_{\chi l}, B_E)$.

Η δύναμη (4) αποτελεί το ένα σκέλος της εξίσωσης δυνάμεων. Το δεύτερο σκέλος είναι - σύμφωνα με το Δεύτερο νόμο του NEWTON-

$$F_x = m\ddot{x} \quad (5)$$

Συνεπώς για την εξίσωση δυνάμεων λαμβάνεται

$$m\ddot{x} = -\frac{mg}{l}x \quad \text{ή} \quad \ddot{x} = -\frac{g}{l}x \quad (6)$$

3. ΕΞΙΣΩΣΗ ΚΙΝΗΣΗΣ

Η εξίσωση κίνησης προκύπτει από τη λύση της εξίσωσης δυνάμεων (6) και είναι της μορφής $x=f(l)$. Η εξίσωση (6) είναι μια διαφορική εξίσωση, η οποία στο A' εξάμηνο -λόγω έλλειψης μαθηματικού υποβάθρου- δεν μπορεί να λυθεί. Η λύση αυτής είναι όμως ήδη γνωστή από τη Μέση εκπαίδευση

$$x = x_m \cos(\omega t + \varphi_0) \quad \text{ή} \quad x = x_m \sin(\omega t + \varphi_0) \quad (7)$$

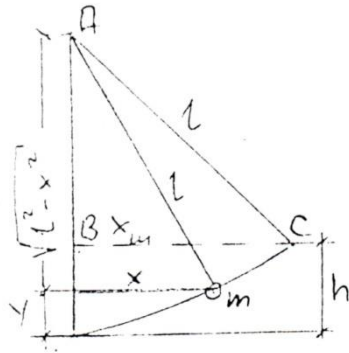
Η λύση αυτή μπορεί να βρεθεί με έναν πλάγιο τρόπο, ο οποίος συνίσταται στη χρήση της αρχής διατήρησης της ενέργειας. Το Σχ. 3 αποσαφηνίζει την κατάσταση. Η ολική ενέργεια της μάζας είναι $E=mgh$, εφόσον h είναι το μέγιστο ύψος που μπορεί να καταλάβει η μάζα. Στο σημείο αυτό η κινητική ενέργεια μηδενίζεται. Αν όμως $h=0$, τότε μηδενίζεται η δυναμική ενέργεια, ενώ η κινητική ενέργεια είναι μέγιστη.

Σε ένα ενδιάμεσο σημείο (ύψος y) για την Αρχή Διατήρησης της Ενέργειας ισχύει

$$\frac{m}{2}u^2 + mgy = mgh \quad (8)$$

με

$$y = l - \sqrt{l^2 - x^2} = l(1 - \sqrt{1 - (\frac{x}{l})^2}) \quad (9)$$



Σχ.3 Αρχή διατήρησης της ενέργειας

Σχ. 3 Αρχή διατήρησης της ενέργειας.

Αλλά, επειδή $\frac{x}{l} < 1$, η ρίζα μπορεί να αναπτυχθεί σε σειρά

$$f(z) = f(0) + f'(0)x + f''(0)\frac{z^2}{2!} + \dots$$

$$\sqrt{1 - \left(\frac{x}{l}\right)^2} = 1 - \frac{1}{2} \frac{x^2}{l^2} + \dots$$

Επομένως, για y λαμβάνεται

$$y = l - l\sqrt{1 - \frac{x^2}{l^2}} = l - l\left(1 - \frac{x^2}{2l^2}\right) = \frac{x^2}{2l}$$

Έτσι, από (8) προκύπτει

$$\frac{m}{2}u^2 + mg\frac{x^2}{2l} = mgh$$

(8')

$$u^2 + \frac{g}{l}x^2 = 2gh$$

$$\frac{dx}{dt} = u = \sqrt{2gh - \frac{g}{l}x^2} = \sqrt{2gh\left(1 - \frac{x^2}{2lh}\right)} = \sqrt{2gh}\sqrt{1 - \frac{x^2}{2lh}}$$

Η σχέση αυτή είναι ένα ολοκλήρωμα. Εφόσον

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{2gh}\sqrt{1 - \frac{x^2}{2lh}} \Rightarrow \sqrt{2gh}dt = \frac{dx}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{2lh}}}$$

με

$$z = \frac{x}{\sqrt{2lh}} \text{ και } dx = \sqrt{2lh} dz$$

προκύπτει

$$\begin{aligned}\sqrt{\frac{g}{l}}t &= \int \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} = \tau o\xi \sin z - \varphi_0 \\ &= \tau o\xi \sin \frac{x}{\sqrt{2lh}} - \varphi_0\end{aligned}$$

και επομένως

$$x = \sqrt{2lh} \sin\left(\sqrt{\frac{g}{l}}t + \varphi_0\right) \quad (11)$$

Η σχέση αυτή είναι ήδη η ζητούμενη εξίσωση κίνησης.

4. ΣΥΖΗΤΗΣΗ ΕΞΙΣΩΣΗΣ ΚΙΝΗΣΗΣ

Η σχέση (11) περιγράφει την ταλάντωση. Τούτο φαίνεται από το ημίτονο της γωνίας $\varphi = \sqrt{\frac{g}{l}}t + \varphi_0$

Συνεπώς η κυκλική συχνότητα είναι

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

και επομένως

$$\nu = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{l}}, \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

Η έκφραση $\sqrt{2lh}$ είναι το πλάτος της ταλάντωσης. Τούτο μπορεί να ελεγχθεί με τη βοήθεια του Σχ.3. Από το τρίγωνο ABC με $x_m = BC = AC$ και $AB = l - h$, προκύπτει

$$x_m^2 = l^2 - (l - h)^2 = 2lh - h^2 \approx 2lh \Rightarrow x_m = \sqrt{2lh} \quad (14)$$

Το μέγεθος φ_0 είναι μια σταθερά ολοκλήρωσης. Εφόσον $t=0$, από (11) προκύπτει

$$x = x_m \sin \varphi_0$$

δηλαδή στο χρόνο $t=0$ ισχύει $x=0$, τότε $\varphi_0 = 0, \pi, 2\pi, \dots$, στο χρόνο $t=0$ ισχύει $x = x_m$, τότε $\sin \varphi_0 = 1$ και επομένως $\varphi_0 = \frac{\pi}{2}$.

Άρα η γωνία φ_0 καθορίζει το διάστημα x τη στιγμή της έναρξης της κίνησης. Για την περίπτωση $\varphi_0 = \frac{\pi}{2}$ ισχύει

$$x = x_m \sin(\omega t + \frac{\pi}{2}) = x_m \cos \omega t .$$

Δι' αυτού επαληθεύεται η ορθότητα των δύο σχέσεων (7). Η διαφορά αυτών των σχέσεων οφείλεται στη φ_0 , δηλαδή στη διαφορά φάσης.

Η προκύπτουσα ταλάντωση (11) ονομάζεται αρμονική ταλάντωση επειδή περιγράφεται επακριβώς από το ημίτονο ή το συνημίτονο. Άρα το μαθηματικό εκκρεμές εκτελεί αρμονικές ταλαντώσεις. Τούτο ισχύει μόνον, εφόσον το εκκρεμές της πειραματικής διάταξης πληρεί πράγματι τις αρχικά αναφερόμενες συνθήκες, δηλαδή τις αρχικά αναφερόμενες συνθήκες $x < l$ και μικρή εκτροπή από τη θέση ισορροπίας.

Αν η γωνία εκτροπής δεν είναι μικρή, τότε το πλάτος x_m είναι μεγάλο. Αντίθετα σημαίνει, ότι η δύναμη επαναφοράς δεν ορίζεται από τη σχέση (5) αλλά είναι μικρότερη. Επομένως η περίοδος T θα είναι μεγαλύτερη από αυτή της σχέσης (13). Εξάλλου η απομάκρυνση x δεν θα έχει ημιτονοειδή χαρακτήρα.

Για την ταχύτητα και την επιτάχυνση από (11) και με $\varphi_0 = 0$ προκύπτει αντίστοιχα

$$\begin{aligned} x &= x_m \sin \omega t \\ u &= \frac{dx}{dt} = \omega x_m \cos \omega t = \omega x_m \sin \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right) \\ a &= \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x_m \sin \omega t = -\omega^2 x = \omega^2 x_m \sin (\omega t + \pi) \end{aligned} \quad (15)$$

Από τις σχέσεις αυτές και ανεξάρτητα από την τιμή της φ_0 προκύπτει:

Η ταχύτητα προπορεύεται της απομάκρυνσης κατά $\pi/2$. Η επιτάχυνση προπορεύεται της απομάκρυνσης κατά π . Αυτό σημαίνει ότι η ταχύτητα και η επιτάχυνση προπορεύονται της απομάκρυνσης κατά $T/4$ και $T/2$ αντίστοιχα. Συνεπώς η επιτάχυνση είναι πάντοτε αντίθετη της απομάκρυνσης.

Για την αρχή διατήρησης της ενέργειας ισχύουν οι σχέσεις (8) και (8').

$$\frac{m}{2} u^2 + mg \frac{x^2}{2l} = mgh$$

Απλουστευτικά με σκοπό την επαλήθευση της σχέσης αυτής, τίθεται και πάλι $\varphi_0 = 0$.

Έτσι μπορούν να χρησιμοποιηθούν οι σχέσεις (15). Επομένως προκύπτει

$$\frac{m}{2} \omega^2 x_m^2 \cos^2 \omega t + mg \frac{1}{2l} x_m^2 \sin^2 \omega t = mgh$$

και με

$$\omega^2 = \frac{g}{l} \quad \frac{mg}{2l} x_m^2 (\cos^2 \omega t + \sin^2 \omega t) \equiv \frac{mg}{2l} x_m^2 = mgh .$$

Απλοποιώντας προκύπτει

$$\frac{x_m^2}{2l} = h \quad \text{ή} \quad x_m = \sqrt{2lh}$$

ένα αποτέλεσμα που συμπίπτει με τη σχέση (14). Άρα επαληθεύονται οι προηγούμενες σκέψεις.

ΠΡΑΚΤΙΚΟ ΜΕΡΟΣ

1. Κατασκευή του καλύτερου δυνατού μαθηματικού εκκρεμούς (νήμα, σφαιρίδιο, πλαίσιο ανάρτησης).

2. Μετρήσεις σε γωνία εκτροπής $\alpha \leq 5^\circ$ και αξιολόγηση.

2.1 Μετρήσεις

Οι μετρήσεις για τα διάφορα μήκη νήματος γίνονται σύμφωνα με τον παρακάτω Πίνακα 1.

Γωνία εκτροπής α	Μήκος νήματος l/m	Αριθμός ταλαντώσεων n	Χρόνος t/sec για n ταλαντώσεις	Περίοδος $T = t/n$ (sec)
$\leq 5^\circ$	$0 \cdot 10^{-2}$ 10 20 30 40 50 60 70	20		**

** : η περίοδος T για $l=0$ προκύπτει μέσα από μια λογική σκέψη

2.2 Μεθοδολογία αξιολόγησης των μετρήσεων

2.2. 1 Συνάρτηση $T=f(l)$

Από τις παραπάνω μετρήσεις φαίνεται καθαρά ότι η περίοδος T είναι μια συνάρτηση του μήκους νήματος. Από τη θεωρία γνωρίζουμε ότι η σχέση που συνδέει αυτά τα δύο μεγέθη, είναι η εξίσωση (13). Αλλά εδώ κάνουμε σαν να μην τη γνωρίζουμε.

Επομένως, με σκοπό να βρούμε την τάχα άγνωστη συνάρτηση, υποθέτουμε εντελώς αυθαίρετα, ότι ισχύει π.χ. $T = c_1 \sqrt[4]{l}$ ή $T = c_2 \sqrt{l}$ ή $T = c_3 l$ ή $T = c_4 l^2$. Αν μια από τις

σχέσεις αυτές ανταποκρίνεται στην πραγματικότητα, π.χ. η σχέση $T = c_2 \sqrt{l}$, τότε με

$\sqrt{l} = x$ ως τετμημένη, προκύπτει μια ευθεία. Έστω ότι αυτή η σχέση είναι σωστή. Υπό την συνθήκη αυτή, τι συμβαίνει στις άλλες σχέσεις, εφόσον ως

τετμημένες χρησιμοποιούνται $\sqrt[4]{l}$ ή l^1 ή l^2 .

$T = c_2 \sqrt{l} = c_2 \sqrt[4]{l} \sqrt[4]{l} = c_1 \sqrt[4]{l}$, και άρα $c_2 \sqrt[4]{l} = c_1$, επομένως η καμπύλη $T = c_1 \sqrt[4]{l}$ είναι κυρτή (καμπυλώνεται προς τα επάνω).

$T = c_2 \sqrt{l} = c_2 \sqrt{l} \frac{\sqrt{l}}{\sqrt{l}} = \frac{c_2}{\sqrt{l}} l = c_3 l$ και άρα $\frac{c_2}{\sqrt{l}} = c_3$, επομένως η καμπύλη είναι κοίλη (καμπυλώνεται προς τα κάτω). Στην τελευταία περίπτωση προκύπτει

$T = c_2 \sqrt{l} = c_2 \sqrt{l} \frac{\sqrt{l^3}}{\sqrt{l^3}} = \frac{c_2}{\sqrt{l^3}} l^2$ και άρα $\frac{c_2}{\sqrt{l^3}} = c_4$. Άρα και εδώ η προκύπτουσα καμπύλη είναι κοίλη.

2.2.2 Εφαρμογή της μεθοδολογίας

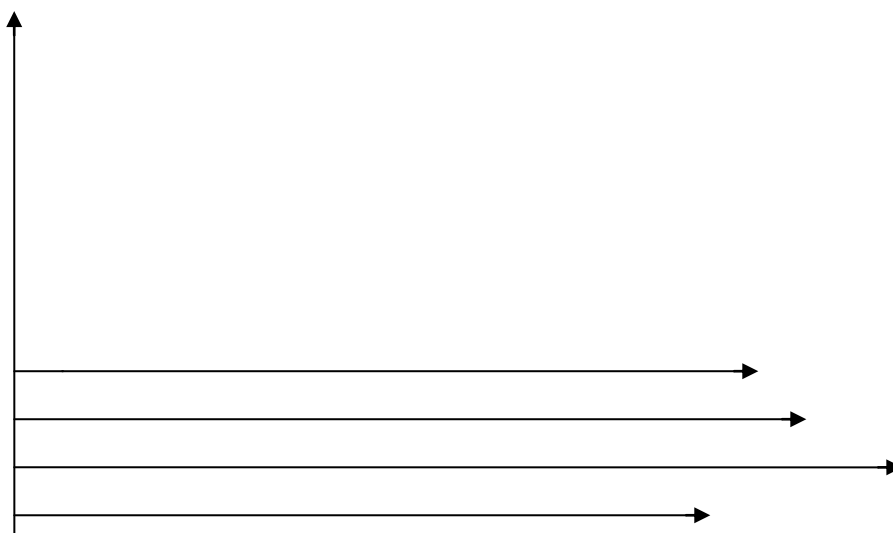
I. Όλη η παραπάνω μεθοδολογία για την εξεύρεση της συνάρτησης $T = f(l)$ γίνεται σύμφωνα με τον παρακάτω πίνακα II. Στην πρώτη στήλη καταγράφονται οι μετρήσεις της περιόδου T. Οι άλλες στήλες αναφέρονται στο μήκος νήματος

T/s	$l^{1/4} / \sqrt[4]{m}$	$l^{1/2} / \sqrt{m}$	l^1 / m	l^2 / m^2
			0 * 10 ⁻²	0 * 10 ⁻²
			10	1
			20	4
			30	9
			40	16
			50	25
			60	36
			70	49

και συγκεκριμένα στο $l^{1/4}$, $l^{1/2}$, l^1 , l^2 , δηλαδή σε μεγέθη που είναι υπολογίσιμα εφόσον το μήκος νήματος είναι γνωστό.

II. Κατασκευή γραφικών παραστάσεων

Τα αποτελέσματα $T=f(l^{1/4})$, $T=f(l^{1/2})$, $T=f(l^1)$ και $T=f(l^2)$ μεταφράζονται σε γραφικές παραστάσεις. Οι τέσσερις αυτές παραστάσεις σχεδιάζονται σε μια εικόνα, η οποία έχει κοινή τεταγμένη, αλλά διαφορετική τετμημένη. Οι υποδιαιρέσεις της τετμημένης επιλέγονται κατά τρόπο ώστε να καλύπτεται όλος ο χώρος. Όλες οι καμπύλες ξεκινούν από 0/0.



III. Μαθηματική διατύπωση της συνάρτησης $T=f(l)$ στη μορφή

$$T = c_1 l^{\nu} + c_2 \quad (16)$$

Προσδιορισμός των σταθερών, c_1 και c_2 από το γράφημα που ισχύει για το μαθηματικό εκκρεμές ως προς τιμή και μονάδα μέτρησης.

Σύγκριση της πειραματικής σχέσης (16) με τη θεωρητική σχέση (13) και υπολογισμός της επιτάχυνσης g .

Υπολογισμός του σφάλματος του g σε σύγκριση με την τιμή της βιβλιογραφίας ($g=9,81 \text{ m/s}^2$)

Μετρήσεις σε μεγάλο πλάτος (π.χ. $x=10 \text{ cm}$)

Οι μετρήσεις σε διαφορετικά μήκη νήματος και η αξιολόγηση των μετρήσεων γίνεται με ευθύνη του πειραματιστή.

Μετρήσεις σύμφωνα με εδάφιο 2, αλλά με σφαιρίδιο διπλής μάζας.

Οι μετρήσεις της περιόδου, η καταχώρηση σε πίνακες και η αξιολόγηση των μετρήσεων γίνεται με ευθύνη του πειραματιστή.

ΑΣΚΗΣΗ 4 (Μ 13)

ΣΤΑΣΙΜΑ ΔΙΑΜΗΚΗ ΚΥΜΑΤΑ ΣΤΟ ΣΠΕΙΡΟΕΙΔΕΣ ΕΛΑΤΗΡΙΟ

1. Θεωρία του στάσιμου κύματος

Μέσα σε κάποιο μέσο οδεύουν δύο επίπεδα κύματα ιδίου πλάτους και ιδίου μήκους κύματος στην ίδια διεύθυνση αλλά με αντίθετη φορά. Δι' Επαλληλίας σχηματίζεται μια χαρακτηριστική εικόνα συμβολής που ονομάζεται στάσιμο κύμα. Τούτο μπορεί π.χ. να παραχθεί καθώς ένα κύμα αφήνεται να ανακλαστεί σε οριακή διαχωριστική επιφάνεια. Έστω ότι το κύμα οδεύει προς θετικές τιμές του X , ανακλάται στο σημείο $x=0$ (όπου βρίσκεται η διαχωριστική επιφάνεια) και κινείται μετά προς αρνητικές τιμές του x . Στο σημείο ανάκλασης οι φάσεις ταλάντωσης των δυο κυμάτων μπορούν να διαφέρουν μεταξύ τους. Τούτο οφείλεται στο ότι η φάση μπορεί κατά την ανάκλαση να μεταβεί αλτικά σε άλλη τιμή. Το φαινόμενο καλείται άλμα φάσης.

Διακρίνονται δύο ειδικές περιπτώσεις:

α) Χωρίς άλμα φάσης ($\varphi=0$)

$$E_{\pi} = E_m \cdot \cos(kx - \omega t) \quad \text{προσπίπτον κύμα}$$

$$E_{\alpha} = E_m \cdot \cos(kx + \omega t) \quad \text{ανακλώμενο κύμα}$$

Από την επαλληλία των δύο κυμάτων προκύπτει:

$$\begin{aligned} E &= E_{\pi} + E_{\alpha} = E_m \cdot \cos(kx - \omega t) + E_m \cdot \cos(kx + \omega t) \\ &= E_m [\cos kx \cdot \cos \omega t + \sin kx \cdot \sin \omega t] + E_m [\cos kx \cdot \cos \omega t - \sin kx \cdot \sin \omega t] \\ &= 2 E_m \cos \omega t \cdot \cos kx \end{aligned}$$

$$= E' \cos kx \quad \text{με} \quad k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad (1)$$

Είναι ολοφάνερο ότι τα ακρότατα (μέγιστα και ελάχιστα = κοιλίες) σχηματίζονται στα σημεία $\cos kx = \pm 1$ δηλαδή όπου:

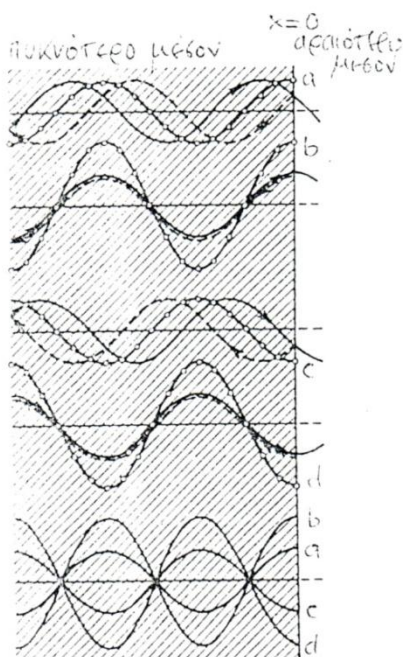
$$\begin{aligned} kx = 2\pi/\lambda \quad x = 0\pi, 1\pi, 2\pi \dots n\pi \equiv m\pi \quad \text{με } m=0,1,2,\dots,n \\ x = \frac{\lambda}{2\pi} m\pi = m \cdot \frac{\lambda}{2} \quad \text{σημεία των ακρότατων} \end{aligned} \quad (1')$$

Ιδιαίτερο ενδιαφέρον έχει το σημείο $x=0$, όπου υλοποιείται η ανάκλαση. Φαίνεται ότι εκεί σχηματίζεται κοιλία. Δεν υπάρχει καμιά αμφιβολία ότι σε αυτά και μόνο σε αυτά τα σημεία σχηματίζονται κοιλίες. Ένα άλλο ζήτημα είναι εάν αυτές οι κοιλίες έχουν μέγιστο δυνατό πλάτος είτε όχι. Κατά (1) το πλάτος είναι $2E_m \sin \omega t$, επομένως το μέγιστο δυνατό πλάτος είναι $2E_m$. Αυτό σημαίνει ότι το εκάστοτε δυνατό πλάτος εξαρτάται από το συντελεστή $\sin \omega t$, δηλαδή από την κατάσταση της φάσης. Το ζήτημα απεικονίζεται σχετικά καλά στο Σχ. 1. Στο Σχ. 1a η κατάσταση φάσης στο σημείο $x=0$ προκύπτει από:

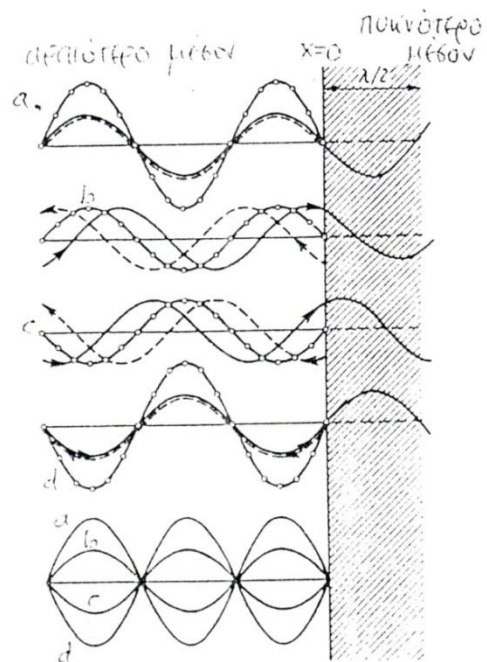
$$\cos \omega t = \frac{1}{2} \Rightarrow \omega t = \pi/3.$$

Επομένως για το πλάτος προκύπτει $E' = 2E_m \frac{1}{2}$. Στο Σχ. 1b ισχύει αντίστοιχα

$\cos \omega t = 1 \Rightarrow \omega t = 0$. Για το πλάτος λαμβάνεται δι' αυτού $E' = 2E_m$ κλπ.



Σχήμα 1: Σχηματισμός στάσιμου κύματος δι' ανάκλασης στο αραιότερο μέσον. (Το ανακλώμενο κύμα επιστρέφει έτσι, όπως το προσπίπτον κύμα να προχωρήσει στο όμοιο μέσον).



Σχήμα 2: Σχηματισμός στάσιμου κύματος δι' ανάκλασης στο πυκνότερο μέσον. (Το ανακλώμενο κύμα επιστρέφει έτσι, όπως το προσπίπτον κύμα να προχωρήσει στο όμοιο μέσον μετά από αλμα $\lambda/2$).

β) Άλμα φάσης από $\varphi=\pi$

Στην περίπτωση αυτή ισχύουν:

$$E_{\pi} = E_m \cos(kx - \omega t)$$

προσπίπτον κύμα

$$E_{\pi} = E_m \cos(kx - \omega t + \pi)$$

$$= E_m [\cos(kx - \omega t) \cos \pi - \sin(kx - \omega t) \sin \pi]$$

$$= -E_m \cos(kx - \omega t)$$

ανακλώμενο κύμα.

Από την επαλληλία των δύο κυμάτων και δια τριγωνομετρικών μετατροπών προκύπτει:

$$E = E_{\pi} + E_a = E_m \cos(kx - \omega t) - E_m \cos(kx - \omega t)$$

$$= E_m [\cos kx \cos \omega t + \sin kx \sin \omega t] - E_m [\cos kx \cos \omega t - \sin kx \sin \omega t]$$

$$= 2E_m \sin \omega t \sin kx \quad \text{και με} \quad E' = 2E_m \sin \omega t$$

$$= E' \sin kx$$

$$\text{όπου } k = 2\pi/\lambda$$

(2)

Τα ακρότατα (μέγιστα και ελάχιστα) σχηματίζονται στα σημεία όπου

$$\sin kx = \pm 1,$$

δηλαδή όπου

$$kx \equiv 2\pi/\lambda \cdot x = 1 \pi/2, 3 \pi/2, 5 \pi/2, \dots = (m + 1/2) \pi \quad \text{με } m = 0, 1, \dots, n$$

$$x = \lambda/2\pi (m + 1/2) \pi = (m + 1/2) \lambda/2$$

Το αν στα σημεία αυτά τα ακρότατα έχουν μέγιστη δυνατή τιμή $2E_m$, αυτό εξαρτάται από την κατάσταση φάσης, εφόσον $E' = 2E_m \sin \omega t$.

Απεναντίας οι κόμβοι σχηματίζονται στα σημεία όπου :

$$E = 2E_m \sin \omega t \quad \sin kx = E' \sin kx = 0,$$

δηλαδή όπου:

$$kx \equiv 2\pi/\lambda \cdot x = 0\pi, 1\pi, 2\pi, \dots, n\pi = m\pi \quad \text{με } m = 0, 1, 2, \dots, n$$

$$x = \lambda/2\pi m\pi = m \lambda/2$$

Επομένως και στο σημείο ανάκλασης ($x=0$) παρατηρείται κόμβος. Το φαινόμενο απεικονίζεται στο σχήμα 2.

Σύνοψη

Στο σημείο ανάκλασης παρατηρείται κοιλία της κίνησης, όταν το άλμα φάσης είναι $\varphi=0$. Για να σχηματιστεί κοιλία, τα σωματίδια ταλάντωσης πρέπει να μπορούν να ταλαντώνονται ελεύθερα. Άρα πρόκειται για ανάκλαση στο ελεύθερο άκρον είτε στο αραιότερο μέσον. Το ανακλώμενο κύμα κινείται έτσι, όπως ανενόχλητα θα προχωρούσε στο όμορο μέσον. (κατοπτρισμός στο σημείο ανάκλασης).

Απεναντίας στο σημείο ανάκλασης σχηματίζεται κόμβος της κίνησης, όταν το άλμα φάσης είναι $\varphi=\pi$. Ο κόμβος κίνησης παρατηρείται δηλαδή όταν στο σημείο ανάκλασης τα σωματίδια ταλάντωσης δεν έχουν ελευθερία κίνησης. Άρα πρόκειται για ανάκλαση στο σταθερό άκρον είτε στο πυκνότερο μέσον.

Στο σημείο ανάκλασης τα σωματίδια ταλάντωσης, υφίστανται μια ορμή με αντίθετη φορά. Τούτη μεταφράζεται σε άλμα φάσης από μισό μήκος κύματος. Το φαινόμενο αυτό σημαίνει, ότι τα κύματα ανακλώνται έτσι όπως θα προχωρούσαν ανενόχλητα μετά από μισό μήκος κύματος (άλμα $\lambda/2$).

Οι εξισώσεις (1) και (2) χαρακτηρίζουν την κατάσταση της ταλάντωσης. Τούτη διαφέρει σημαντικά από αυτήν ενός κύματος. Το όρισμα $(x/\lambda \pm f.t)$ που είναι η χαρακτηριστική ιδιότητα του κύματος για την εκδρομή της φάσης, δεν υπάρχει. Ο χρόνος t και η συντεταγμένη x του χώρου εμφανίζονται ανεξάρτητες μεταξύ τους σε δυο διαφορετικούς συντελεστές. Εξ αυτού έπεται, ότι οι εξισώσεις (1) και (2) δεν σημαίνουν κύμα, εφόσον ούτε η φάση, ούτε η ενέργεια εκδράμουν στο χώρο. Το φαινόμενο μπορεί να θεωρηθεί ιδιοταλάντωση του εκτεταμένου μέσου και αποτελεί πράγματι μια αρμονική ταλάντωση με μεταβλητό σε χώρο πλάτος. Το σχήμα της ταλάντωσης, είναι επ' αυτού σταθερό, οι κόμβοι π.χ. παρατηρούνται σε σταθερά σημεία του χώρου.

2. Στάσιμα διαμήκη κύματα στο σπειροειδές ελατήριο.

Ένα σπειροειδές ελατήριο μήκους, στερεωμένο στα δυο άκρα του, επιμηκύνεται και συμπιέζεται από έλασμα, το οποίο τίθεται σε ταλαντωτική κίνηση από ένα ηλεκτρομαγνήτη. Οι διαταραχές αυτές που επαναλαμβάνονται με συχνότητα f , εκδράμουν ως διάμηκες κύμα μήκους λ και ταχύτητας u δια του ελατηρίου. Τα μεγέθη f , λ και u συνδέονται μεταξύ τους δια της εξίσωσης

$$u = f \cdot \lambda \quad (3)$$

Τα στάσιμα κύματα σχηματίζονται δι' ανάκλασης στα ακίνητα άκρα του ελατηρίου. Στα ίδια τα άκρα παρατηρούνται κόμβοι κίνησης. Όταν η διέγερση του ελατηρίου γίνεται με τη θεμελιώδη συχνότητα f_1 , τότε μεταξύ των δύο κόμβων στα ακίνητα άκρα, παρατηρείται μια μοναδική κοιλία ($n=1$). Άρα ισχύει:

$$l = \lambda_1/2 \quad \text{είτε} \quad \lambda_1 = 2\ell = 2\ell/1$$

Όταν η διέγερση γίνεται με $f_2 = 2f_1$, τότε μεταξύ των άκρων παρατηρούνται οι κοιλίες. Τούτο σημαίνει ότι το μήκος l του ελατηρίου καλύπτεται από ένα μήκος κύματος

$$(\lambda_2 = 2\ell/2)$$

Όταν η διέγερση γίνεται με $f_3 = 3f_1$, τότε μεταξύ των άκρων παρατηρούνται τρεις κοιλίες ($n=3$). Αυτό σημαίνει, ότι το μήκος κύματος λ_3 καλύπτει τα $2/3$ του μήκους του ελατηρίου

$$(\lambda_3 = 2\ell/3).$$

Όταν το ελατήριο διεγείρεται με $fn = n f_1$, τότε μεταξύ των άκρων σχηματίζονται n κοιλίες. Άρα το μήκος κύματος λ_n καλύπτει τα $2\ell/n$ του μήκους του ελατηρίου

$$(\lambda_n = 2\ell/n).$$

σχηματίζοντας στις ως άνω περιπτώσεις το γινόμενο από f και λ προκύπτει :

$$n = 1: \quad f_1 \lambda_1 = f_1 (2\ell/1) = 2 f_1 \ell$$

$$n = 2: \quad f_2 \lambda_2 = (2f_1) (2\ell/2) = 2 f_1 \ell$$

$$n = 3: \quad f_3 \lambda_3 = (3f_1) (2\ell/3) = 2 f_1 \ell$$

.....

$$n = m: \quad f_m \lambda_m = (m f_1) (2\ell/m) = 2 f_1 \ell = u$$

Σε όλες τις περιπτώσεις προκύπτει το ίδιο αποτέλεσμα. Από (3) είναι ήδη γνωστόν ότι τούτο ισούται με την ταχύτητα διάδοσης u της φάσης εντός του δεδομένου κλειστού συστήματος. Γενικευμένα ισχύει επομένως:

$$f_n 2\ell/n = u \quad \Rightarrow \quad f = n \cdot u / 2\ell \quad (4)$$

Από τους ως άνω συλλογισμούς προκύπτει ότι η ταχύτητα διάδοσης είναι σταθερή παρότι τα μεγέθη f και λ είναι μεταβλητά. Αυτό σημαίνει ότι η ταχύτητα διάδοσης καθορίζεται από άλλους παράγοντες. Οι παράγοντες αυτοί είναι αποκλειστικά η διάπλωση του μέσου διάδοσης, το δε μέσον διάδοσης είναι το ίδιο το ελατήριο.

Θεωρώντας την ελαστική ράβδο, της οποίας μια ειδική περίπτωση αποτελεί το σπειροειδές ελατήριο, διαπιστώνεται ότι για τη δύναμη F που προκαλεί εφελκυσμό είτε σύνθλιψη κατά $\Delta \ell$, ισχύει

$$F = E (A / \ell) \Delta \ell,$$

όπου A είναι η διατομή και E ο δείκτης ελαστικότητας. Διά σύγκρισης με το γνωστό ελατήριο έπεται η σταθερά ελατηρίου

$$D = F / \Delta \ell = E A / \ell$$

Από τη θεωρία της ελαστικής ράβδου προκύπτει επίσης

$$u = \sqrt{\frac{E}{Q}} \Rightarrow u^2 = \frac{E}{Q} = \frac{1}{Q} E = \frac{1}{\frac{m}{Al}} \frac{Dl}{A} = l^2 \frac{D}{m}$$

$$\Rightarrow u = l \sqrt{\frac{D}{m}} \quad (5)$$

Άρα η ταχύτητα διάδοσης εξαρτάται πράγματι από τα μεγέθη διάπλωσης του ελατηρίου (ℓ , m , D).

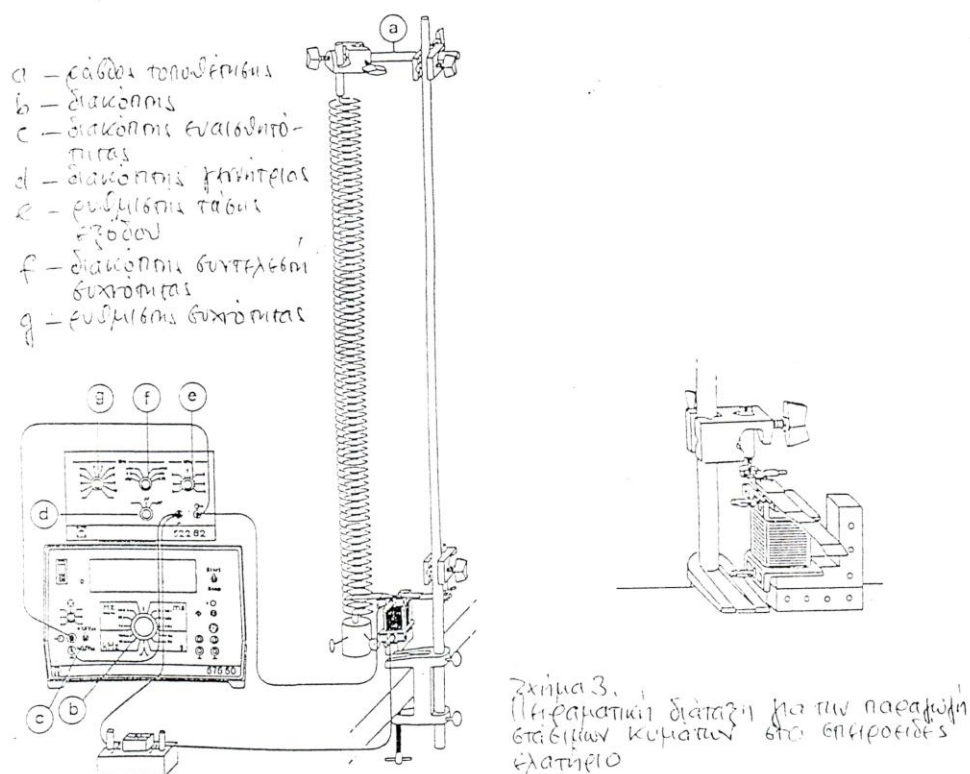
Από την σύγκριση των σχέσεων (4) για $n=1$ και (5), προκύπτει

$$u = 2l f_1 = l \sqrt{\frac{D}{m}} \Rightarrow f_1 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{D}{m}} \quad (6)$$

Τούτο σημαίνει εν συνεχεία, ότι η διάπλωση του ελατηρίου δεν καθορίζει μονοσήμαντα μόνο την ταχύτητα διάδοσης u , αλλά και την θεμελιώδη συχνότητα f_1 , επομένως και το μήκος κύματος λ_1 του στάσιμου κύματος.

3. Πειραματική διάταξη

Η πειραματική διάταξη κατασκευάζεται σύμφωνα με το Σχήμα 3. Ο πεταλοειδής πυρήνας με το πηνίο τοποθετείται πάνω στον σιδηροπυρήνα. Ο ρευματολήπτης με τον οπλισμό ταλάντωσης τοποθετείται πάνω στη μούφα (απόσταση μεταξύ του πεταλοειδούς πυρήνα και του οπλισμού ταλάντωσης περίπου 1mm).



Σχήμα 3. Πειραματική διάταξη για την παραγωγή στάσιμων κυμάτων στο σπειροειδές ελατήριο.

Το ελατήριο τοποθετείται κατακόρυφα (όρθιο). Το σημείο στερέωσης της ράβδου (α) επιλέγεται έτσι, ώστε το μήκος του ελατηρίου να είναι $\ell=65...70\text{cm}$. Το ελατήριο σπρώχνεται πάνω από τον οπλισμό ταλάντωσης. Το σημείο στερέωσης του οπλισμού ταλάντωσης πρέπει ενδεχομένως να ρυθμιστεί έτσι, ώστε να καλύπτεται μια σπείρα ελατηρίου.

Υποδείξεις

α) Η διόδος στο κύκλωμα του ηλεκτρομαγνήτη αποκόπτει τη μισή φάση της τάσης της γεννήτριας. Ο οπλισμός ταλάντωσης έλκεται δι' αυτού σε κάθε πλήρη περίοδο της τάσης εξόδου μόνο μία φορά. Η συχνότητα διέγερσης μειώνεται έτσι κατά το ήμισυ (τούτο είναι πλεονέκτημα για τη ρύθμιση της συχνότητας). Η ένδειξη συχνότητας στον ψηφιακό απαριθμητή συμφωνεί εξάλλου με την συχνότητα διέγερσης.

β) Όταν η συχνότητα μετριέται με την συσκευή P(575 45), τότε η συχνότητα συντονισμού στην περιοχή «H₇» (χρόνος πύλης 1s) πρέπει να υπολογιστεί δι' εξεύρεσης της μέσης τιμής από 5...10 μετρήσεις.

Ρυθμίσεις

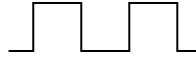
α) Ρύθμιση στον ψηφιακό απαριθμητή.

Διακόπτης b : Μέτρηση συχνότητας, χρόνος μέτρησης 10s

Διακόπτης ευαισθητότητας e : 1,5 Vss

β) Ρύθμιση στη γεννήτρια

Διακόπτης d στη θέση μαιανδρικής μορφής



Διακόπτης e (τάση εξόδου): Τέρμα δεξιά (± 6 Vs)

Διακόπτης f (συντελεστής συχνότητας): $\times 1$

Δεδομένες τιμές μεγεθών

Τα μηχανικά μεγέθη του ελατηρίου θεωρούνται ως δεδομένα

Μάζα $m_E = 80$ g

Μήκος ελατηρίου $\ell = 66$ cm

Σταθερά ελατηρίου $D = 2,7$ N/m

Ο τρόπος μέτρησης των μεγεθών αυτών περιγράφεται αναλυτικά στο πείραμα M2.

4. Διεξαγωγή του πειράματος και μετρήσεις.

Ρύθμιση της συχνότητας στο διακόπτη g, με αργό ρυθμό, ξεκινώντας από 1,5 Hz, και μέτρηση εκείνης της συχνότητας, στην οποία στο σπειροειδές ελατήριο σχηματίζεται κύμα με μήκος κύματος $\lambda = 2 \ell$

(θεμελιώδης ταλάντωση μεταξύ των δύο κόμβων στα άκρα σχηματίζεται μια κοιλία).

Αργή αύξηση της συχνότητας και μέτρηση εκείνων των συχνοτήτων όπου σχηματίζεται στάσιμο κύμα με

$\lambda_2 = 2 \ell / 2$ (1^η αρμονική : δύο κοιλίες, 3 κόμβοι)

$\lambda_3 = 2 \ell / 3$ (2^η αρμονική: τρεις κοιλίες, 4 κόμβοι)

.

.

.

μέχρι περίπου

$$\lambda_{14} = 2 \ell / 14 \text{ (13^η αρμονική)}$$

Κατασκευή πίνακα μετρήσεων (n – αριθμός κοιλιών, f – συχνότητα)

Γραφική παράσταση f συναρτήσει του n .

Βοήθεια στη ρύθμιση

Κοντά στην συχνότητα συντονισμού σχηματίζονται διακροτήματα πλάτους. Η συχνότητα του διακροτήματος εξασθενεί προσεγγίζοντας την συχνότητα συντονισμού. Στην περιοχή αυτή η συχνότητα πρέπει να ρυθμίζεται με πολύ αργό ρυθμό. Μετά από κάθε ρύθμιση αναμονή μερικών δευτερολέπτων μέχρι όπου διεκπεραιωθεί η κατάσταση εκκίνησης της ταλάντωσης.

Μείωση της τάσης εξόδου από διακόπτη e , όταν οι ταλαντώσεις στην περιοχή συντονισμού είναι πολύ έντονες.

5. Αξιολόγηση των αποτελεσμάτων μέτρησης

Υπολογίστε την ταχύτητα διάδοσης του στάσιμου κύματος κατά (5).

Υπολογίστε τη θεμελιώδη συχνότητα f_1 κατά (6).

Υπολογίστε την ταχύτητα διάδοσης του στάσιμου κύματος από την κλίση του γραφήματος κατά (4).

Συγκρίνετε το αποτέλεσμα μ' αυτό κατά (5).

Υπολογίστε την συχνότητα διέγερσης f_1 για τη θεμελιώδη ταλάντωση από το γράφημα $f = f(n)$.

Συγκρίνετε το αποτέλεσμα μ' αυτό κατά (6)

ΑΣΚΗΣΗ 5 (Η 2)

Ο ΝΟΜΟΣ ΤΟΥ ΟΗΜ

ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΜΕΡΟΣ

Ο νόμος του *OHM* στην πιο απλή μορφή του είναι

$$U=RI \quad (1)$$

εφόσον η αντίσταση R είναι σταθερό μέγεθος. Από την (1) φαίνεται ότι όλα τα μεγέθη που την απαρτίζουν, είναι βαθμωτά μεγέθη. Τα μεγέθη U και I έχουν και πρόσημο, π.χ. η τάση μπορεί να είναι θετική ή αρνητική. Δι' αντικατάστασης της R με

$$R=\rho \frac{l}{A} \quad \text{ή} \quad R = \frac{1}{\sigma} \frac{l}{A} \quad (2)$$

όπου l είναι το μήκος, A η διατομή της αντίστασης (αγωγού) αντίστοιχα, ρ η ειδική αντίσταση και σ η ειδική αγωγιμότητα του υλικού της αντίστασης, στη σχέση (1) δίδεται αμέσως μια άλλη διάσταση

$$U = \frac{1}{\sigma} \frac{I}{A} l \quad \mu\epsilon \quad \frac{U}{l} = E, \quad \frac{I}{A} = j$$

όπου E είναι η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου και j η πυκνότητα του ηλεκτρικού ρεύματος. Δι' αυτού λαμβάνεται

$$\vec{j} = \sigma \vec{E} \quad (3)$$

Σ' αυτή τη μορφή ο νόμος του Ohm αποκτά ιδιαίτερη σημασία εφόσον εκφράζεται από δύο ανυσματικά μεγέθη, το j και το E αλλά και η ειδική αγωγιμότητα σ έχει πολύ περισσότερο περιεχόμενο από την ειδική αντίσταση ρ . Η αγωγιμότητα των αγωγών ηλεκτρονίων εξαρτάται από τη θερμοκρασία, όσο υψηλότερη είναι η θερμοκρασία τόσο μικρότερη είναι η αγωγιμότητα. Για το λόγο αυτό, κατά την αναφορά της αγωγιμότητας ενός υλικού πρέπει να αναφέρεται οπωσδήποτε και η θερμοκρασία μέτρησης. Σε μεταλλικούς αγωγούς η αγωγιμότητα δίδεται σε $\Omega^{-1} \text{ m} \cdot \text{mm}^{-2}$ ή $\Omega^{-1} \text{ cm}^{-1}$. Μερικές ενδεικτικές τιμές σε $\Omega^{-1} \text{ cm}^{-1}$ και 20°C είναι:

Ασήμι $61 \cdot 10^4$

Χαλκός $58 \cdot 10^4$

Αλουμίνιο $36 \cdot 10^4$

Σίδηρο $10 \cdot 10^4$

Κωνσταντάνη $2 \cdot 10^4$

Χρωμονικέλιο $1.3 \cdot 10^4$

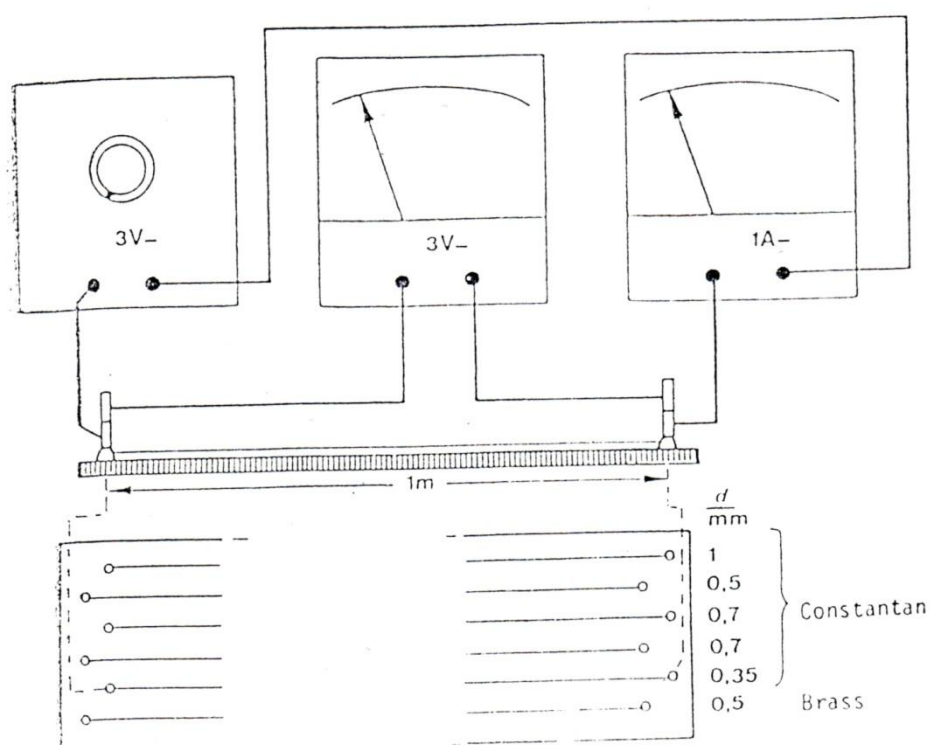
Υδράργυρος $1 \cdot 10^4$

Γραφίτης/Ανθρακας $0.1 \cdot 10^4$ μέχρι $10 \cdot 10^2$

ΠΡΑΚΤΙΚΟ ΜΕΡΟΣ

1. Διάταξη.

Κατασκευή της πειραματικής διάταξης σύμφωνα με Σχ. 1



Σχ. 1 : Πειραματική διάταξη

Σχ.1 Πειραματική διάταξη

2. Μετρήσεις με κωνσταντάνη $d=0,35\text{mm}$, $l=1\text{m}$

- 2.1. Αύξηση της τάσης σε βήματα των $0,5\text{V}$ από $U=0\text{V}$ μέχρι $U=3\text{V}$.
- 2.2. Κατασκευή πίνακα μετρήσεων και γραφήματος σε χιλιοστομετρικό χαρτί.
- 2.3. Υπολογισμός της αντίστασης από την κλίση του γραφήματος.
- 2.4. Υπολογισμός της ειδικής αγωγιμότητας και της ειδικής αντίστασης σύμφωνα με τη (2).

2.5. Υπολογισμός της πυκνότητας της έντασης ρεύματος και της έντασης του ηλεκτρικού πεδίου από τις μετρήσεις του εδαφίου 2.2

Κατασκευή γραφήματος $j=f(E)$

3. Μετρήσεις με κωνσταντάνη $l=1\text{ m}$ και d δικής σας επιλογής. Η διαδικασία είναι αυτή όπως στο εδάφιο 2 (2.1 - 2.5)

3.13.5

3.6. Συγκρίνετε τα αποτελέσματα του εδαφίου 2 και 3 ως προς την αντίσταση ρ , την αγωγιμότητα σ και $j=\sigma.E$

4. Μετρήσεις με ορείχαλκο (50 - 82 % Cu, 18 - 50 % Zn) με $l=1\text{ m}$ και $d=0,5\text{ mm}$

4.14.5 βλ. εδ. 2.1 ...2.5

4.6. Σύγκριση των αποτελεσμάτων ορείχαλκου και κωνσταντάνης.

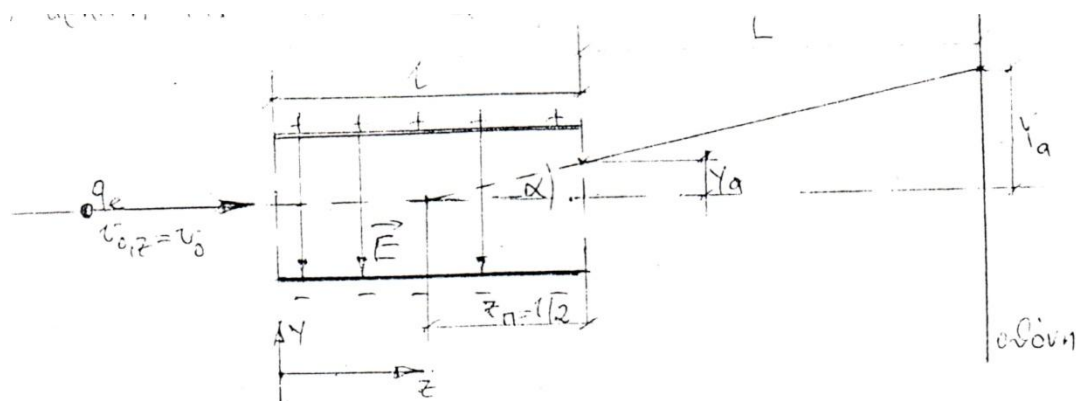
ΑΣΚΗΣΗ 5 (Η 3)

ΕΠΑΛΛΗΛΙΑ ΚΙΝΗΣΕΩΝ -- ΜΕΤΡΗΣΕΙΣ ΜΕ ΠΑΛΜΟΓΡΑΦΟ

1. Θεωρία

1.1 Εκτροπή δέσμης ηλεκτρονίων

Όταν μία δέσμη ηλεκτρονίων εισέρχεται με σταθερή ταχύτητα $U_0 = U_{0,z}$ (παράλληλα στον άξονα z) μέσα σ' έναν πυκνωτή του οποίου ηλεκτρικό πεδίο έχει διεύθυνση στον άξονα y και είναι ομογενές τότε η δέσμη ηλεκτρονίων εκτρέπεται από την αρχική της κατεύθυνση (σχήμα 1)



Σχήμα 1: Απόκλιση στον πυκνωτή (βελήνας Braun)

Σχήμα 1. Απόκλιση στον πυκνωτή (σωλήνας Braun)

Για τα κινηματικά και δυναμικά μεγέθη στους άξονες y και z ισχύει:

Άξονας z :

$$\begin{aligned} F_z &= 0 \Rightarrow m a_z = 0 \\ a_z &= 0 \\ U_z &= U_{z,0} = U_0 = U_0 t + Z_0 \quad \text{με } Z_0 = 0 \\ &= U_0 t \end{aligned}$$

Άξονας y :

$$F_y = q_e E \Rightarrow m a_y = q_e E$$

$$\begin{aligned}
a_y &= \frac{q_e}{m} E \\
U_y &= \frac{q_e}{m} E t + U_{y,0} \quad \mu\epsilon U_{y,0} = 0 \\
y &= \frac{1}{2} \left(\frac{q_e}{m} E \right) t^2 + U_{y,0} t + y_0 \\
&= \frac{1}{2} \left(\frac{q_e}{m} E \right) t^2 = \frac{a_y}{2} t^2 \quad \mu\epsilon y_0 = 0
\end{aligned}$$

Δι' απαλοιφής του χρόνου t στις εξισώσεις για z και y προκύπτει

$$\begin{aligned}
t &= \frac{z}{u_0} \Rightarrow t^2 = \frac{z^2}{u_0^2} \\
y &= \frac{a_y}{2} t^2 = \frac{a_y}{2} \frac{z^2}{u_0^2} \Rightarrow y = \frac{a_y}{2u_0^2} z^2 \quad (\text{εξίσωση παραβολής})
\end{aligned}$$

Η τροχιά των ηλεκτρονίων στο χώρο του πυκνωτή είναι παραβολική. Τούτο συμβαίνει μέχρι το σημείο $(z,y)=(l,y_a)$, το οποίο επιταχύνεται μετά από χρόνο

$$z = u_0 t \Rightarrow l = u_0 t_a \Rightarrow t_a = \frac{l}{u_0}.$$

Στο σημείο αυτό για τα κινηματικά μεγέθη ισχύει (ή προκύπτει)

$$u_{z,a} = u_{z,0} = u_0 \text{ στον άξονα } z \text{ και } u_{y,a} = a_y t_a = a_y \frac{l}{u_0} \text{ στον άξονα } y, \quad z = l \text{ στον άξονα } z$$

$$\text{και } y_a = \frac{a_y}{2} t_a^2 = \frac{a_y}{2} \frac{l^2}{u_0^2} \text{ στον άξονα } y.$$

Το μέγεθος

$$y_a = \frac{a_y}{2} \left(\frac{l}{u_0} \right)^2 = \frac{q_e E}{2m} \left(\frac{l}{u_0} \right)^2 = \frac{q_e E}{4} \frac{l^2}{\frac{m}{2} u_0^2} \quad (1)$$

είναι ένα σημαντικό μέγεθος εφόσον ταυτίζεται με την απόκλιση των ηλεκτρονίων στην έξοδο του πυκνωτή. Είναι ολοφάνερο ότι η απόκλιση y_a είναι τόσο μικρότερη όσο μεγαλύτερη είναι η αρχική κινητική ενέργεια $E_k = mv^2/2$ των ηλεκτρονίων. Είτε με άλλα λόγια: ο χρόνος $t_a = l/u_0$ που δίδεται στα ηλεκτρόνια για να εκτραπούν από την αρχική τους κατεύθυνση, είναι τόσο μικρότερος όσο μεγαλύτερη είναι η αρχική τους ταχύτητα u_0 .

Σημείο άφιξης των ηλεκτρονίων πάνω στην οθόνη

Η γωνία απόκλισης α στο σημείο $(z,y)=(l,y_a)$ μπορεί να υπολογιστεί από τη σχέση των ταχυτήτων

$$\tan \alpha = \frac{u_y / z = l}{u_x} = \frac{1}{u_0} (a_y t_a) = \frac{1}{u_0} \left(a_y \frac{l}{u_0} \right) = a_y \frac{l}{u_0^2}$$

Μια άλλη δυνατότητα υπολογισμού της δίδεται από τη σχέση

$$\tan a = \frac{y_a}{z_\rho} = \frac{a_y}{2} \frac{l^2}{u_0^2} \frac{1}{z_\rho}$$

Από την ισότητα αυτών των δύο αριθμών λαμβάνεται

$$\tan a = a_y \frac{l}{u_0^2} = \frac{a_y}{2} \frac{l^2}{u_0^2} \frac{1}{z_\rho} \Rightarrow z_\rho = \frac{l}{2}$$

Αυτό σημαίνει, ότι όλα τα ηλεκτρόνια φαίνεται σαν να εκλύονται στο κέντρο του πυκνωτή, δηλαδή η πηγή τους να βρίσκεται στο σημείο $(x,y)=(l/2,0)$. Γνωστό είναι όμως ότι τούτο δεν ισχύει σε ουδεμία περίπτωση. Το σημείο άφιξης (πρόσπτωσης) των ηλεκτρονίων πάνω στην οθόνη προκύπτει πλέον εύκολα από τριγωνομετρικές θεωρήσεις

$$\begin{aligned} \frac{y_a}{y_a} &= \frac{\frac{l}{2} + L}{\frac{l}{2}} \Rightarrow y_a = \frac{\frac{l}{2} + L}{\frac{l}{2}} y_a = \left(L + \frac{l}{2} \right) \frac{\frac{a_y}{2} y \frac{l^2}{u_0^2}}{\frac{l}{2}} = \left(L + \frac{l}{2} \right) \frac{a_y l}{u_0^2} \\ y_a &= \left(L + \frac{l}{2} \right) \frac{l}{u_0^2} \frac{q_0}{m} E \end{aligned} \quad (2)$$

Εκτροπή δέσμης ηλεκτρονίων σε μεταβλητή ένταση πεδίου

Από τη σχέση (2) προκύπτει ολοφάνερα ότι το σημείο άφιξης των ηλεκτρονίων πάνω στην οθόνη είναι μονοσήμαντα δεδομένο, εφόσον τα μεγέθη l και L , εξαρτώνται από τη γεωμετρία του πυκνωτή, τα μεγέθη q_e , m είναι σταθερές του ηλεκτρονίου, ή δε ταχύτητα u_0 εξαρτάται από την τάση επιτάχυνσης των ηλεκτρονίων. Τόσο η τάση επιτάχυνσης, και δι' αυτής η αρχική ταχύτητα, u_0 όσο και η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου E για την εκτροπή των ηλεκτρονίων υφίσταται την αυθαιρεσία του πειραματιστή.

Με σταθερά τα μεγέθη L , l , q_e , m , u_0 , και μεταβλητή την ένταση E του πεδίου, από (2) προκύπτει (αυθαίρετα τίθεται $Y=y$)

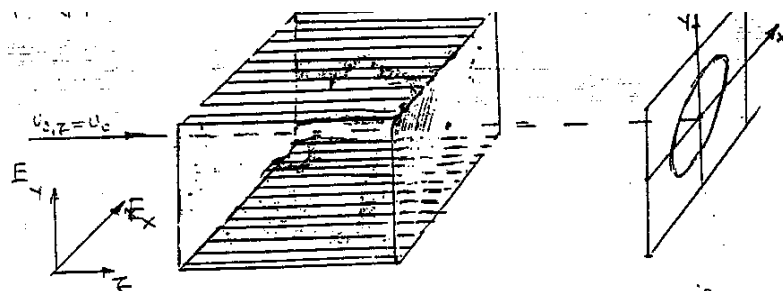
$$y = b' E_0 \sin \omega t = b \sin \omega t \quad (2')$$

Το σημείο άφιξης των ηλεκτρονίων πάνω στον άξονα y της οθόνης δεν είναι πλέον ένα και το ίδιο. Η φωτεινή κηλίδα στην οθόνη μετακινείται ημιτονικά και καλύπτει την απόσταση από $-b$ μέχρι $+b$. Το μάτι του ανθρώπου που είναι σε θέση να παρακολουθήσει τη χρονική μετακίνηση της φωτεινής κηλίδας παρατηρεί μία κατακόρυφη φωτεινή ευθεία.

1.2 Έλλειψη Lissajous (μελέτη της διαφοράς φάσης)

Ως γνωστόν, ο σωλήνας Braun φέρει δύο ζεύγη οπλισμών (δύο πυκνωτές), ένα ζεύγος για την κατακόρυφη απόκλιση και ένα ζεύγος οπλισμών για την οριζόντια απόκλιση. Όταν και στο δεύτερο ζεύγος οπλισμών εφαρμοστεί εναλλασσόμενη τάση, τότε η

εικόνα που παρατηρείται πάνω στην οθόνη, εξαρτάται από την συχνότητα των εφαρμοζόμενων τάσεων και από τη διαφορά φάσης μεταξύ αυτών (Σχ. 2)



Σχ. 2: Ζεύγη οπλισμών στον άξονα x και στον άξονα y , με τάσεις $x = a \sin \omega t$ και $y = b \sin(\omega t + \varphi)$

Έστω ότι στους οπλισμούς οριζόντιας απόκλισης (άξονας x) εφαρμόζεται τάση $u_x = u_{0,x} \sin \omega t$ και στους οπλισμούς κατακόρυφης απόκλισης (άξονας y) τάση $u_y = u_{0,y} \sin(\omega t + \varphi)$ τότε πάνω στην οθόνη προκύπτουν αντίστοιχα οι αποκλίσεις

$$x = a \sin \omega t \quad \text{και} \quad y = b \sin(\omega t + \varphi)$$

Δι' απαλοιφής του χρόνου t λαμβάνεται

$$\frac{y}{b} = \sin(\omega t + \varphi) = \sin \omega t \cos \varphi + \cos \omega t \sin \varphi \quad \text{και} \quad \mu\epsilon \sin \varphi = \frac{x}{a}$$

$$\cos \varphi = \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$$

$$= \frac{x}{a} \cos \varphi + \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \sin \varphi \quad \text{έτσι}$$

$$\frac{y}{b} - \frac{x}{a} \cos \varphi = \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \sin \varphi$$

$$\left(\frac{y}{b} - \frac{x}{a} \cos \varphi \right)^2 = \left(1 - \frac{x^2}{a^2} \right) \sin^2 \varphi \Rightarrow \frac{y^2}{b^2} - 2 \frac{xy}{ab} \cos \varphi + \frac{x^2}{a^2} \cos^2 \varphi = \sin^2 \varphi \frac{x^2}{a^2} \sin^2 \varphi$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 2 \frac{xy}{ab} \cos \varphi = \sin^2 \varphi \quad (4)$$

Η εξίσωση αυτή είναι η εξίσωση κωνικής τομής και συγκεκριμένα αυτή της έλλειψης (βλέπε Σχ. 2)

Διερεύνηση

1. $\varphi=0$

Από (4) προκύπτει

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 2\frac{xy}{ab} = 0 \Rightarrow \left(\frac{y}{b} - \frac{x}{a}\right)^2 = 0 \Rightarrow y = \frac{b}{a}x$$

Η εικόνα που σχηματίζεται στην οθόνη, είναι επομένως μια ευθεία με θετική κλίση από $\frac{dy}{dx} = \frac{b}{a}$. Όταν $b=a$, τότε $\frac{dy}{dx} = 1$ (σχήμα 3α)

2. $\varphi = \pi$

Από (4) προκύπτει

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + 2\frac{xy}{ab} = 0 \Rightarrow \left(\frac{y}{b} + \frac{x}{a}\right)^2 = 0 \Rightarrow y = -\frac{b}{a}x$$

Η εικόνα στην οθόνη είναι μια ευθεία με αρνητική κλίση $\frac{dy}{dx} = -\frac{b}{a}$.

3. $\varphi = \frac{\pi}{2}$

Από (4) προκύπτει

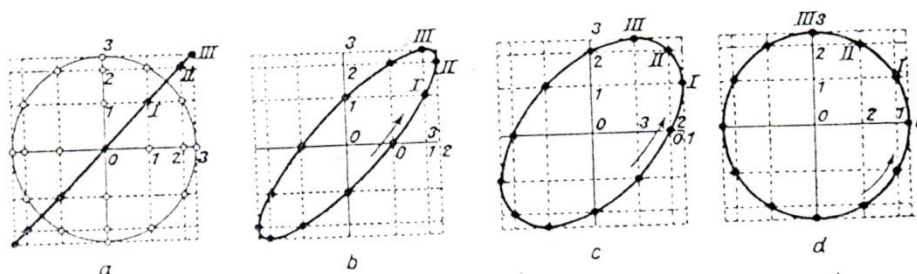
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, μια έλλειψη με τους ημιάξονες a και b . Σε περίπτωση ίσων ημιαξόνων $a=b$ προκύπτει κύκλος με ακτίνα $r=a$ (Σχ.3d), ο οποίος διαγράφεται αριστερόστροφα.

4. $\varphi = -\frac{\pi}{2}$

Από (4) προκύπτει

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1 \quad \text{είτε } x^2 + y^2 = -r^2 \text{ όταν } a=b=r.$$

Τόσο η προκύπτουσα έλλειψη όσο και ο προκύπτων κύκλος διαγράφονται δεξιόστροφα. Σε όλες τις άλλες περιπτώσεις σχηματίζεται έλλειψη, ακόμα και σε ίσους ημιάξονες $a=b$ (Σχ. 3b, 3c)



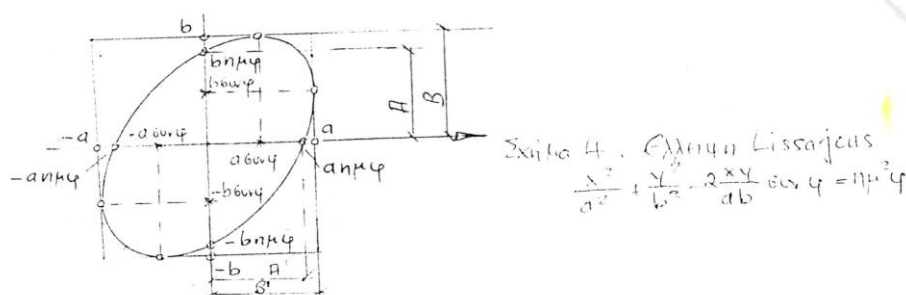
Σχήμα 3 : Σύνθεση ταλαντώσεων (κάθετων μεταξύ τους) με ίδια συχνότητα και με ίδιο πλάτος
 Οι διαφορές φάσης είναι α) $\varphi=0$, β) $\varphi=\frac{\pi}{6}$, γ) $\varphi=\frac{\pi}{3}$, δ) $\varphi=\frac{\pi}{2}$

Σχήμα 3. Σύνθεση ταλαντώσεων (κάθετων μεταξύ τους) με ίδια συχνότητα και με ίδιο πλάτος. Οι διαφορές φάσης είναι α) $\varphi=0$, β) $\varphi=\pi/6$, γ) $\varphi=\pi/3$, δ) $\varphi=\pi/2$

Διερεύνηση της έλλειψης

Το σχήμα που σχηματίζεται στην οθόνη είναι πάντα μία έλλειψη. Τόσο η ευθεία όσο και ο κύκλος μπορούν να θεωρηθούν ως ‘εκφυλισμένες’ ελλείψεις που προκύπτουν κάτω από ειδικές συνθήκες. Διά διερεύνησης της έλλειψης δίδεται η δυνατότητα υπολογισμού της διαφοράς φάσης μεταξύ των δύο ταλαντώσεων με τη βοήθεια του σχήματος στην οθόνη. Το αποτέλεσμα ισχύει αντίστοιχα τόσο για την ευθεία όσο και για τον κύκλο.

Στο Σχ. 4 απεικονίζεται μια έλλειψη με $a \neq b$. Από τη μελέτη της εξίσωσης (4)



Προκύπτουν τα εξής ζεύγη τιμών που σημειώνονται και στο σχήμα.

x	0	a	-a	$\pm a \sin \varphi$	$a \cos \varphi$	$-a \cos \varphi$
y	$\pm b \sin \varphi$	$b \cos \varphi$	$-b \cos \varphi$	0	b	-b

Τα σημεία των ακρότατων προκύπτουν ήδη από τη μελέτη της εξίσωσης (4), προκύπτουν όμως και από την πρώτη παράγωγο της (4). Διά παραγώγισης λαμβάνεται

$$\begin{aligned}
 & 2 \frac{y}{b^2} dy + 2 \frac{x}{a^2} dx - 2 \frac{\cos \varphi}{ab} x dy - 2 \frac{\cos \varphi}{ab} y dx = 0 \\
 \Rightarrow & dy \left(\frac{2y}{b^2} - 2 \frac{\cos \varphi}{ab} x \right) = dx \left(2 \frac{\cos \varphi}{ab} y - 2 \frac{x}{a^2} \right) \\
 \Rightarrow & \frac{dx}{dy} = \frac{\frac{\cos \varphi}{ab} y - \frac{x}{a^2}}{\frac{y}{b^2} - \frac{\cos \varphi}{ab} x} = 0 \Rightarrow \frac{\cos \varphi}{ab} y = \frac{x}{a^2} \Rightarrow x = x_m = \frac{a}{b} \cos \varphi y_m
 \end{aligned}$$

Δι αντικατάστασης στην (4) έπεται

$$\begin{aligned}\frac{y^2}{b^2} + \frac{x^2}{a^2} - 2 \frac{\cos \varphi}{ab} xy &= \sin^2 \varphi \\ \Rightarrow \frac{y_m^2}{b^2} + \frac{1}{a^2} \left(\frac{a}{b} \cos \varphi y_m \right)^2 - 2 \frac{\cos \varphi}{ab} \left(\frac{a}{b} \cos \varphi y_m \right) y_m &= \sin^2 \varphi \\ \Rightarrow \frac{y_m^2}{b^2} (1 - \cos^2 \varphi - 2 \cos^2 \varphi) &= \sin^2 \varphi \Rightarrow y_m = \pm b, x_m = \pm a \cos \varphi\end{aligned}$$

Τα δυο άλλα ακρότατα προκύπτουν από $\frac{dx}{dy} = 0$, δηλαδή από $\frac{y}{b^2} - \frac{\cos \varphi}{ab} x = 0$ και

είναι $x_m = \pm a$, $y_m = \pm b \cos \varphi$.

Η διαφορά φάσης φ υπολογίζεται επομένως εύκολα από τις πληροφορίες που παρέχει η οθόνη μετρώντας στην οθόνη τα ζεύγη τιμών (A, B) ή (A', B') .

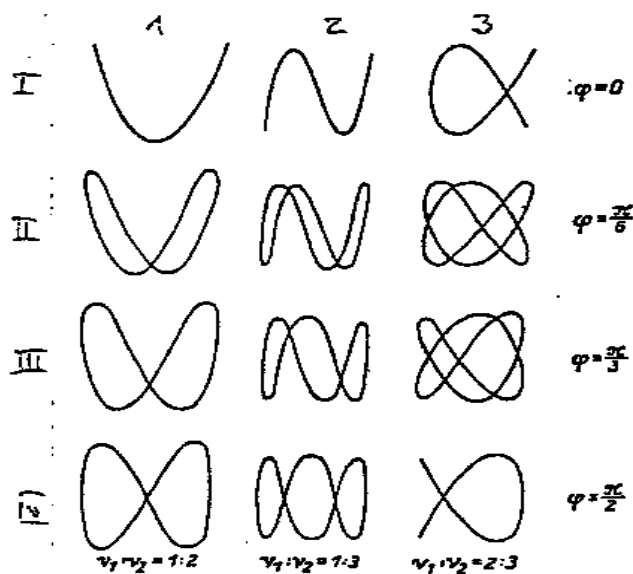
$$\frac{A}{B} = \frac{b \sin \varphi}{b} = \sin \varphi \quad \text{είτε} \quad \frac{A'}{B'} = \frac{a \sin \varphi}{a} = \sin \varphi$$

$$\sin \varphi = \frac{A}{B} \quad \text{είτε} \quad \sin \varphi = \frac{A'}{B'} \quad \Rightarrow \quad \varphi = \arcsin \frac{A}{B} \quad \text{είτε} \quad \varphi = \arcsin \frac{A'}{B'}$$

Όταν $A=0$, τότε $\sin \varphi = 0 \Rightarrow \varphi = 0$ (ευθεία). Όταν $A=B$, τότε $\sin \varphi = 1 \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{2}$, άρα πρόκειται για κύκλο.

1.3 Σχήματα Lissajous

Όταν οι δύο ταλαντώσεις διαφέρουν όχι μόνο στη φάση και στο πλάτος αλλά και στην συχνότητα, τότε στην οθόνη σχηματίζονται πολύπλοκα σχήματα. Αφετηρία για τη μελέτη αυτών των σχημάτων αποτελούν οι δύο ταλαντώσεις που συνθέτουν το σχήμα στην οθόνη.



Σχήμα 5. Σχήματα Lissajous

Εξετάζονται μερικές απλές περιπτώσεις

1. $\omega_x = \omega$, $\omega_y = 2\omega$

1.1 $\varphi = 0$

Για τις δυο ταλαντώσεις ισχύει επομένως

$$x = a \cos \omega t \Rightarrow \cos \omega t = \frac{x}{a}$$

$$y = b \cos 2\omega t \Rightarrow \frac{y}{b} = \cos 2\omega t = 2 \cos^2 \omega t - 1 \Rightarrow y = \frac{2b}{a} x^2 - b$$

Η προκύπτουσα εικόνα δίδεται από I (Σχήμα 5), είναι μια παραβολή. (Με $x = a \sin \omega t$, $y = b \sin 2\omega t$ δεν προκύπτει παραβολή, αλλά το σύμβολο του άπειρου που δεν αντικατοπτρίζει την πραγματικότητα).

1.2 $\varphi = \frac{\pi}{2}$

Για τις δυο ταλαντώσεις ισχύει

$$x = a \sin \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right) \Rightarrow \frac{x}{a} = \sin \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right) = \sin \omega t \cos \frac{\pi}{2} + \cos \omega t \sin \frac{\pi}{2} = \cos \omega t$$

$$y = b \sin 2\omega t \Rightarrow \frac{y}{b} = \sin 2\omega t = 2 \sin \omega t \cos \omega t = 2 \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \frac{x}{a}$$

$$\Rightarrow y = 2 \frac{b}{a} x \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$$

Η προκύπτουσα συνάρτηση διαφέρει από την περίπτωση $\varphi = 0$. Όταν $y = 0$, τότε $x = 0$ και $x = \pm a$. Για τα ακρότατα προκύπτει

$$\frac{a}{2b} \frac{dy}{dx} = \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} - \frac{\frac{x^2}{a^2}}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}} = 0 \Rightarrow x_{1/2} = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} a \text{ με } y_{1/2} = \pm b \text{ τόσο για } x_1 \text{ όσο και για}$$

x_2 . Το προκύπτον σχήμα είναι το IV (σχήμα 5), είναι δηλαδή ένα ξαπλωμένο οκτώ(σύμβολο του άπειρου).

2.

$$\omega_x = \omega, \omega_y = 3\omega, \varphi = \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{x}{a} = \sin \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right) = \sin \omega t \cos \frac{\pi}{2} + \cos \omega t \sin \frac{\pi}{2} = \cos \omega t \frac{x}{a} = \cos \omega t$$

$$\frac{y}{a} = \sin 3\omega t = \sin (2\omega t + \omega t) = \sin 2\omega t \cos \omega t + \cos \omega t \sin \omega t$$

$$= \sin \omega t \left(4 - 4 \sin^2 \omega t \right) = \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \left(4 \frac{x^2}{a^2} - 1 \right)$$

Η συνάρτηση μηδενίζεται ($y=0$) στα σημεία $x_{1/2} = \pm a$ και $x_{3/4} = \pm \frac{a}{2}$. Τα μέγιστα και ελάχιστα ακρότατα προκύπτουν από την παραγωγή της συνάρτησης και τον μηδενισμό της παραγώγου.

$$y' = \frac{d}{dx} \left[b \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \left(4 \frac{x^2}{a^2} - 1 \right) \right] = 0$$

Τα σημεία x_m όπου παρατηρούνται τα ακρότατα είναι $x_1 = 0, x_{2/3} = \pm \frac{3}{4}a$. Σε όλα

αυτά τα σημεία η συνάρτηση y παίρνει τις τιμές $y_m = \pm b$, εφόσον b είναι η μέγιστη δυνατή τιμή της εφαρμοζόμενης τάσης. Το προκύπτον σχήμα είναι στο Σχήμα 5 στη δεύτερη στήλη και στην τέταρτη σειρά (IV/2). Με παρόμοιο τρόπο αποδεικνύεται η ορθότητα τόσο των σχημάτων που δίδονται στο σχήμα 5 όσο και κάθε σχήματος που σχηματίζεται στην οθόνη.

Όλα τα παραπάνω σχήματα μπορούν στην οθόνη να στραφούν κατά $\pi/2$, όταν η διπλή συχνότητα δεν εφαρμόζεται στον άξονα y αλλά στον άξονα x .

Τα σχήματα Lissajous εφαρμόζονται για τον προσδιορισμό μιας άγνωστης συχνότητας. Η άγνωστη συχνότητα έστω ότι εφαρμόζεται στο οριζόντιο κανάλι του παλμογράφου (άξονας x). Στο κανάλι 2 (κάθετα, άξονας y) προσάγεται σήμα από γεννήτρια του οποίου η συχνότητα μεταβάλλεται μέχρις ότου στην οθόνη προκύψει κάποιο σήμα Lissajous. Η άγνωστη συχνότητα υπολογίζεται τότε από τον τύπο

$$f_{\text{οριζόντια}} = \frac{\text{πλήθος κατακόρυφων βρόγχων}}{\text{πλήθος οριζόντιων βρόγχων}} f_{\text{κατακόρυφα}} \quad (6)$$

1.4 Πρόσθεση ταλαντώσεων

Για την πρόσθεση δύο ταλαντώσεων αφετηρία αποτελεί η απλή εξίσωση

$$\begin{aligned} u &= a \sin \omega_1 t + b \sin \omega_2 t \\ &= a (\sin \omega_1 t + \sin \omega_2 t) + (b - a) \sin \omega_2 t \\ &= 2a \sin \left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t \right) \cos \left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t \right) + (b - a) \sin \omega_2 t \end{aligned}$$

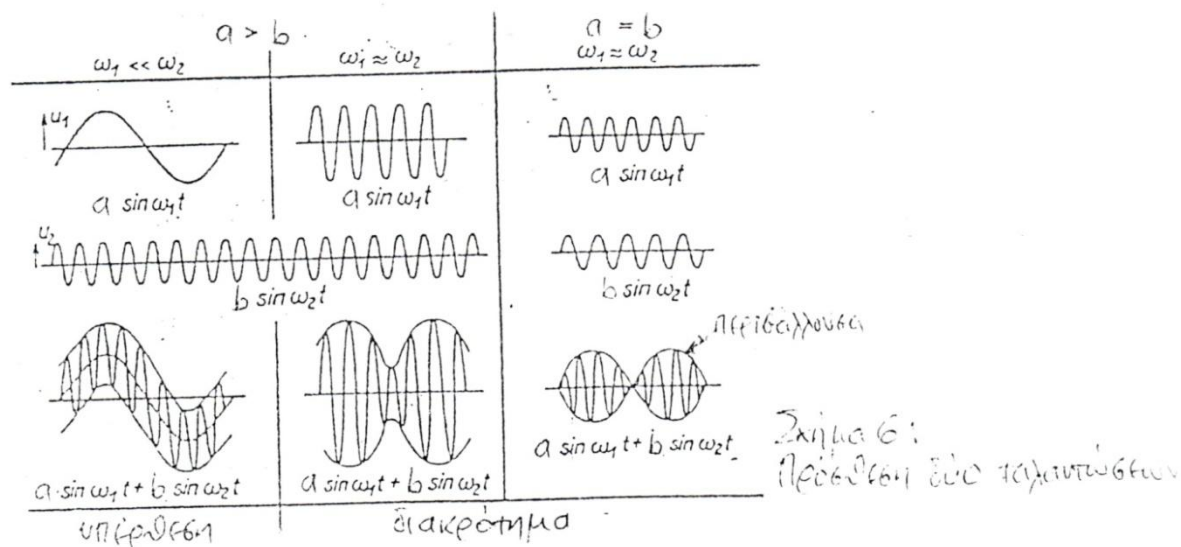
Για $a=b$ προκύπτει

$$u = 2a \cos \left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t \right) \sin \left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t \right) = A(t) \sin \left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t \right)$$

Το αποτέλεσμα είναι ήδη σημαντικό. Η συχνότητα της συνισταμένης ταλάντωσης είναι $\omega = \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2)$, ενώ το πλάτος της ταλάντωσης είναι $A = 2a \cos \left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t \right)$ και

μεταβάλλεται περιοδικά με τη συχνότητα $\omega_A = \frac{1}{2}(\omega_2 - \omega_1)$.

Για $a=b$ και $\omega_1 = \omega_2$ προκύπτει η απλή ταλάντωση $u = 2a \sin \omega t$, η οποία δεν έχει ιδιαίτερο ενδιαφέρον. Για όλες τις άλλες περιπτώσεις τα αποτελέσματα δεν είναι ολοφάνερα, εφόσον διάφορες μορφές συνισταμένων ταλαντώσεων σχηματίζονται διά διαφοροποίησης του λόγου συχνοτήτων και του λόγου πλατών (Σχήμα 6).



Σχήμα 6. Πρόσθεση δυο ταλαντώσεων.

Στην περίπτωση όπου,

a) b , $\omega_1 \ll \omega_2$ (πρώτη στήλη) το φαινόμενο καλείται υπέρθεση, στις περιπτώσεις, όπου

οι συχνότητες διαφέρουν μεταξύ τους ελάχιστα ($\omega_2 = \omega_1 + \Delta\omega$) και ανεξάρτητα από το λόγο πλατών ($a > b$ είτε $a = b$), το αποτέλεσμα καλείται διακρότημα.

Η συχνότητα της συνισταμένης ταλάντωσης, είναι $\omega = \frac{1}{2}(\omega_2 + \omega_1) \Rightarrow f = \frac{f_2 + f_1}{2}$,

ενώ αυτή της περιβάλλουσας ταλάντωσης, δηλαδή του διακροτήματος είναι $f_\Delta = \frac{1}{2}(f_2 - f_1)$ (7)

Μία σημαντική ιδιότητα της συνισταμένης ταλάντωσης είναι το γεγονός, ότι η

συχνότητα $f = (f_1 + f_2)/2$ δεν μπορεί να μετρηθεί εύκολα, π.χ. με τον

κυματομετρητή. Τούτο οφείλεται στο ότι με κάθε περίοδο του διακροτήματος η φάση αλλάζει κατά π (άλμα φάσης). Το άλμα φάσης είναι ολοφάνερο, όταν ο λόγος συχνοτήτων $f_1 : f_2$ είναι αρμονικός. Σε περίπτωση ακέραιου λόγου προκύπτει πιο περίπλοκο σχήμα. Το διακρότημα έπαιξε σπουδαίο ρόλο στην ιστορία της ατομικής φυσικής (το άτομο θεωρήθηκε ως διακρότημα δημιουργημένο από άπειρες επιμέρους ταλαντώσεις).

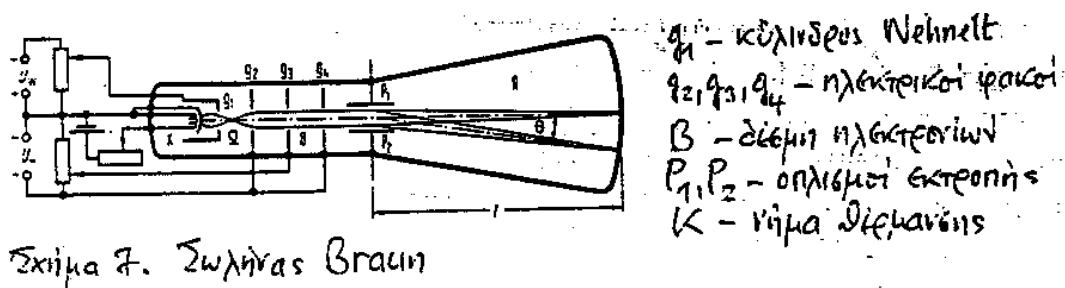
2. ΠΑΛΜΟΓΡΑΦΟΣ

2.1 ΔΟΜΗ ΚΑΙ ΛΕΙΤΟΥΡΓΙΑ

Ο παλμογράφος χρησιμεύει για τη μελέτη και τη μέτρηση χρονικά εξαρτημένων τάσεων. Ο πιο σημαντικός δόκιμος λίθος του παλμογράφου (καλύτερα παλμοσκοπίου) είναι ο σωλήνας Braun, ο οποίος διαθέτει δύο ζεύγη οπλισμών εκτροπής της δέσμης ηλεκτρονίων (Σχήμα 7). Ο ένας πυκνωτής εκτρέπει τη δέσμη κατακόρυφα, δηλαδή στη διεύθυνση του άξονα y , πρόκειται επομένως για το ζεύγος οπλισμών Y .

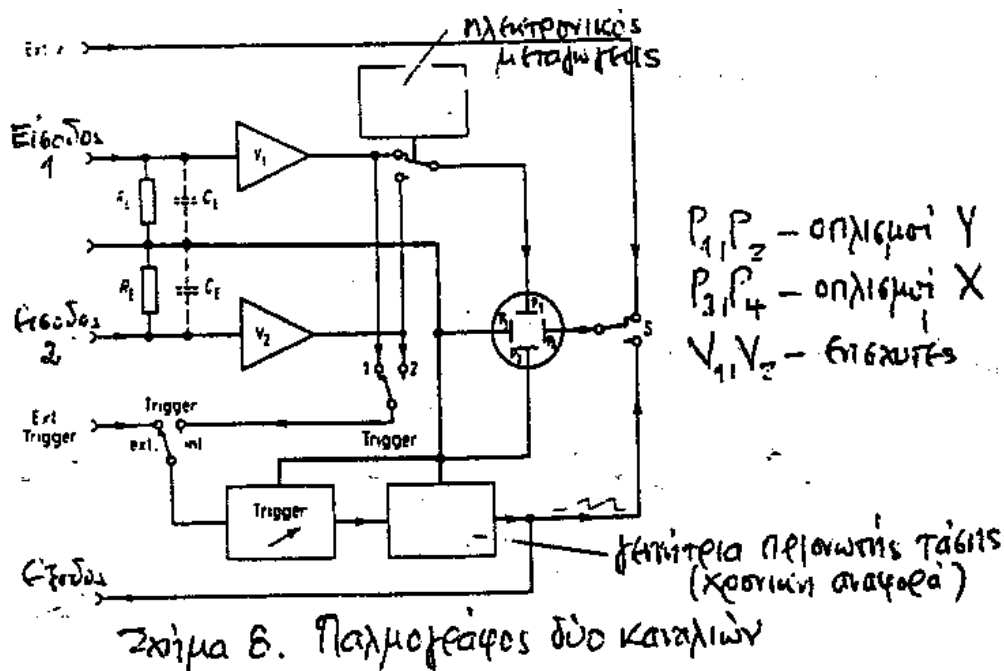
Το δεύτερο ζεύγος οπλισμών (πυκνωτής X) ευθύνεται για την οριζόντια εκτροπή των ηλεκτρονίων, δηλαδή στη διεύθυνση του άξονα x .

Για την εκτροπή της δέσμης ηλεκτρονίων (της φωτεινής κηλίδας) από το κέντρο προς την περιφέρεια της οθόνης χρειάζονται συνήθως τάσεις της τάξης των $\pm 10V$.



Σχήμα 7. Σωλήνας Braun

Εφόσον οι εξεταζόμενες τάσεις έχουν μία τέτοια τιμή, τότε αυτές μπορούν να εφαρμοστούν αμέσως στους οπλισμούς, π.χ. στον ακροδέκτη Ext x (σχήμα 8). Αν όμως είναι μικρότερες (συνηθισμένη περίπτωση), τότε πρέπει να ενισχυθούν. Για το σκοπό αυτόν ο παλμογράφος εξοπλίζεται με ενισχυτές V_1, V_2 των οποίων ο συντελεστής ενίσχυσης είναι ρυθμιζόμενος και μετρήσιμος



Σχήμα 8: Παλμογράφος δυο καναλιών

Όταν σε ένα ζεύγος οπλισμών (π.χ. στους Υ) εφαρμόζεται τάση $U_{y,p}$ τότε η φωτεινή κηλίδα υφίσταται εκτροπή y η οποία είναι ανάλογη της εφαρμοζόμενης τάσης δηλαδή ισχύει $y = c_y U_{y,p}$ c_y -σταθερά (ανεξάρτητα από y). Στην είσοδο του παλμογράφου εφαρμόζεται η τάση $U_{y,e}$ και μεταξύ εισόδου και οπλισμών είναι εγκατεστημένος ένας ενισχυτής με συντελεστή ενίσχυσης V_y , τότε η εκτροπή είναι

$$y = c_y V_y U_{y,e}$$

Η εκτροπή αυτή είναι ανάλογη της τάσης $U_{y,e}$ εφόσον V_y δεν εξαρτάται από $U_{y,e}$ (γραμμική περιοχή του ενισχυτή).

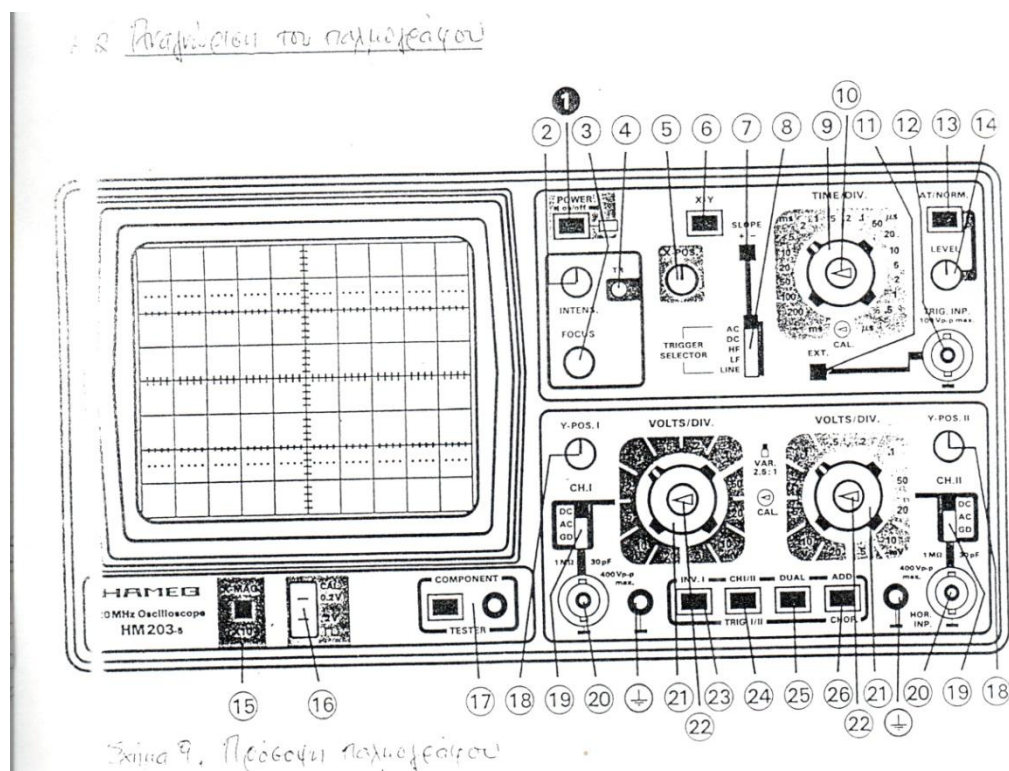
Για τη μέτρηση της εκτροπής y είτε x , μπροστά από την οθόνη τοποθετείται ένα σύστημα συντεταγμένων. Στους διακόπτες ρύθμισης των ενισχυτών υπάρχουν κλίμακες οι οποίες επιτρέπουν την αναγνώριση του λόγου

$$\frac{\text{τάση στην είσοδο}}{\text{εκτροπή της φωτεινής κηλίδας}} \quad \text{σε} \quad \frac{V}{m} \quad \text{είτε σε} \quad \frac{mV}{cm}$$

Η εγκατεστημένη διάταξη βαθμονόμησης (καλιμπραρίσματος) εξασφαλίζει τη δυνατότητα διόρθωσης της ενδεικνυόμενης τιμής. Δι' αυτού ο παλμογράφος γίνεται βολτόμετρο.

Η μέτρηση του ρεύματος με τον παλμογράφο δεν είναι δυνατή. Οι μετρήσεις αυτές γίνονται έμμεσα (μέσω της τάσης).

2.2 Αναγνώριση του παλμογράφου



Σχήμα 9: Πρόσωση παλμογράφου

Η σημασία των αριθμών που δίδονται για την πρόσωση του παλμογράφου (Σχήμα 9) έχει ως εξής :

1. κεντρικός διακόπτης	15.
2. ένταση φωτεινότητας	16.
3. εστίαση	17. Δοκιμαστής (tester)
4.	18. ρύθμιση κηλίδας ως προς y
5. Ρυθμιση κηλίδας ως προς x	19. DC – άμεση σύνδεση AC – σύνδεση μέσω πυκνωτή GD – γείωση
6. ένδειξη φαινομένων x-y	20 είσοδοι καναλιών (I, II)
7.	21.
8.	22. ευαίσθητη ρύθμιση πλάτους y
9. ρύθμιση χρονικής κλίμακας	23. αναστροφή I
10. ευαισθησία ρύθμισης χρόνου	24. επιλογή I είτε II
11.	25. δυο εικόνες στην οθόνη
12.	26. πρόσθεση σημάτων από κανάλια I και II
13.	
14.	

Πολλοί παλμογράφοι, όπως και αυτός του οποίου η πρόσωση απεικονίζεται στο σχήμα 9, διαθέτουν δύο κανάλια. Δι' αυτού γίνεται δυνατή η εισαγωγή στον

παλμογράφο δύο σημάτων. Δια χειρισμού του διακόπτη 25 δυνατή γίνεται και η ταυτόχρονη απεικόνιση και παρακολούθηση των δύο φαινόμενων. Κάθε κανάλι διαθέτει δικό του ενισχυτή. Δι' ενός ηλεκτρονικού μεταγωγέα η τάση u_1 και u_2 εφαρμόζεται διαδοχικά στους οπλισμούς y , έτσι ώστε και τα δύο φαινόμενα να καταγράφονται εναλλάξ το ένα μετά το άλλο. Ουσιαστικά πρόκειται μια οφθαλμαπάτη (το μάτι δεν αντιλαμβάνεται καν ότι κάθε σήμα διακόπτεται περιοδικά).

Η απεικόνιση του διακροτήματος γίνεται δυνατή επειδή υπάρχουν δύο σήματα που εισέρχονται το ένα στο πρώτο κανάλι και το δεύτερο στο δεύτερο κανάλι. Έτσι μπορεί να υλοποιηθεί και η πρόσθεση τους (πλήκτρο 26).

Χωρίς την ύπαρξη των δύο καναλιών δε θα ήταν δυνατή ούτε η απεικόνιση της έλλειψης ούτε η απεικόνιση της των σχημάτων Lissajous. Με άλλα λόγια δε θα ήταν δυνατή η παρακολούθηση δύο σημάτων και επομένως ούτε και η μέτρηση της διαφοράς φάσης μεταξύ αυτών αλλά ούτε και η μέτρηση της άγνωστης συχνότητας ενός σήματος με τη βοήθεια των σχημάτων Lissajous. Οι παλμογράφοι ενός καναλιού είναι απαρχαιωμένοι.

Ένας σημαντικός διακόπτης είναι και το πλήκτρο 17. Το πλήκτρο 17 πατημένο, επιτρέπει τον έλεγχο της καλής λειτουργίας διάφορων εξαρτημάτων (πυκνωτών, αντιστάσεων, πηνίων, διόδων κλπ.). Το υπό έλεγχο εξάρτημα συνδέεται με τον έναν ακροδέκτη του στην επαφή του δοκιμαστή και με το δεύτερο, ακροδέκτη του στη γείωση του καναλιού I (που βρίσκεται όχι μακριά από το δοκιμαστή). Στην οθόνη εμφανίζεται το σχήμα που είναι χαρακτηριστικό για το εκάστοτε εξάρτημα.

3. Μετρήσεις

3.1 Μετρήσεις τάσης

3.1.1 Μετρήσεις συνεχούς τάσης (DC)

1. Θέση σε λειτουργία του παλμογράφου πατώντας 1 (Σχήμα 9). Μετά από μερικά δευτερόλεπτα στην οθόνη εμφανίζεται μία φωτεινή κηλίδα.
2. Ρύθμιση της φωτεινής κηλίδας στο κέντρο της οθόνης διά χειρισμού των 5 και 18.
3. Ρύθμιση της φωτεινότητας της κηλίδας διά χειρισμού του 3
4. Τοποθέτηση του διακόπτη 19 στη θέση DC
5. Σύνδεση της προς μέτρησης τάσης (από μπαταρία, συσσωρευτή ή τροφοδοτικό) μέσω καλωδίου δοκιμής (probe) στο ένα από τα δύο κανάλια 20. Σε περίπτωση επιλογής του καναλιού 2 (είναι το κανάλι δεξιά) πρέπει να πατηθεί και το πλήκτρο 24.

Μετά απ' αυτούς τους χειρισμούς παρατηρείται εκτροπή της κηλίδας. Η άγνωστη τάση υπολογίζεται με τη βοήθεια του μεταγωγέα 21. Έστω ότι η εκτροπή της κηλίδας είναι $\Delta y = 0,8$ και ο μεταγωγέας 21 βρίσκεται στη θέση : $2V/div$ ($2V$ ανά υποδιαίρεση). Στην περίπτωση αυτή, για την τάση προκύπτει

$$U = 0,8 \text{ div } 2V/div = 1,6V$$

3.1.2 Μέτρηση εναλλασσόμενης τάσης (AC)

1, 2, 3 βλ. εδάφιο 3.1.1

4. Τοποθέτηση του διακόπτη 19 στη θέση AC

5. Σύνδεση της προς μέτρηση τάσης (από γεννήτρια χαμηλών συχνοτήτων) μέσω καλωδίου δοκιμής (abe) στο ένα από τα δύο κανάλια 20. Και στις δύο περιπτώσεις (κανάλι 1 με μη πατημένο 24 είτε κανάλι 2 με πατημένο 24, στην οθόνη εμφανίζεται η κυματομορφή).

6. Η άγνωστη τάση υπολογίζεται με τη βοήθεια του μεταγωγέα 21. Έστω ο αριθμός των υποδιαιρέσεων εκτροπής της φωτεινής κηλίδας είναι $\Delta y = 3,5$ υποδιαιρέσεις (div) και ο μεταγωγέας 21 βρίσκεται στη θέση 5V/div. Στην περίπτωση αυτή για τη τάση προκύπτει $U = 3,5 \text{ div} \cdot 5 \text{ V/div} = 17,5 \text{ div}$. Η τάση αυτή είναι η τάση από κορυφή σε κοιλιάδα.

7. Το ότι πράγματι πρόκειται γι' αυτήν φαίνεται καλύτερα πατώντας το διακόπτη 6. Με πατημένο διακόπτη 6 και κανάλι 1 στην οθόνη εμφανίζεται μια κατακόρυφη ευθεία. Με πατημένο διακόπτη 6 και κανάλι 2 στην οθόνη εμφανίζεται μία κεκλιμένη ευθεία. Μετρώντας των αριθμό των υποδιαιρέσεων απ' άκρον σ' άκρον (κατακόρυφα) προκύπτει $\Delta y = 3,5 \text{ div}$. Άρα η ίδια τιμή όπως και στο εδάφιο 6.

8. Για τη μέγιστη τιμή της τάσης ισχύει $U_{\max} = \frac{1}{2} U_{k,k} = \frac{1}{2} U_{\rho,\rho}$. Για την ενεργό τιμή

$$\text{της τάσης ισχύει: } U_{\text{eff}} = \frac{U_{\max}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} U_{\max}$$

3.2 Μέτρηση της περιόδου

Η διαδικασία είναι η ίδια όπως στο εδάφιο 3.1.2, σημεία 1 μέχρι 5. Στην οθόνη εμφανίζεται μία κυματομορφή η οποία διαστέλλεται ή συστέλλεται χρονικά με το διακόπτη 9.

- Μέτρηση της απόστασης που καταλαμβάνει στον άξονα x της οθόνης μία ταλάντωση (απόσταση μεταξύ δύο ελάχιστων ή δύο μέγιστων ακρότατων). Έστω $\Delta x = 2,5$ υποδιαιρέσεις (div)

- Ανάγνωση της θέσης του μεταγωγέα 9. Έστω $50 \mu\text{s/div}$

- Υπολογισμός της περιόδου $T = 2,5 \text{ div} \cdot 50 \mu\text{s/div} = 125 \mu\text{s}$.

3.3 Μέτρηση της συχνότητας

3.3.1. Υπολογισμός της συχνότητας μέσω της περιόδου

Η μέτρηση της περιόδου γίνεται όπως στο εδάφιο 3.2. Έστω $T = 125 \mu\text{s}$.

Ο υπολογισμός της συχνότητας γίνεται με το γνωστό τύπο $f = \frac{1}{T}$. Φερ' ειπείν προκύπτει

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{125 \mu\text{s}} = \frac{10^6}{125 \text{ s}} = \frac{10^3}{125} \text{ kHz} = 8 \text{ kHz}$$

3.3.2 Μέτρηση της συχνότητας με τη βοήθεια των σχημάτων Lissajous

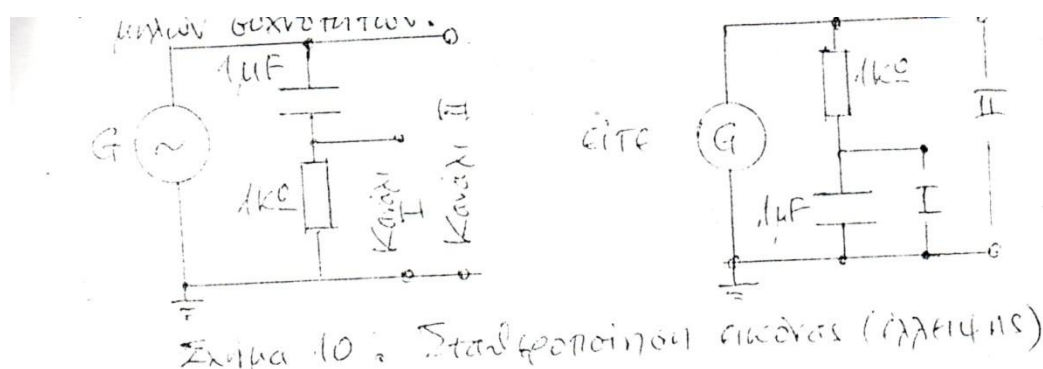
1. Θέση σε λειτουργία του παλμογράφου πατώντας πλήκτρο 1

2. Οι διακόπτες 19 και των δύο καναλιών τοποθετούνται στη θέση AC

3. Στην είσοδο του καναλιού 1 προσάγεται μία κυματομορφή άγνωστης συχνότητας. Στην οθόνη εμφανίζεται η κυματομορφή που μπορεί να ρυθμιστεί (αν δεν είναι καθαρή) με τους διακόπτες 9 (ως προς το χρόνο) και με 21/I ως προς τη τάση. (κυματομορφή π.χ. από γεννήτρια). (Αν πατηθεί το πλήκτρο 6 τότε εμφανίζεται μία κατακόρυφη ευθεία, πατήστε 6 δοκιμαστικά και ελευθερώστε το πάλι)
4. Στην είσοδο του καναλιού II προσάγεται από γεννήτρια μία κυματομορφή γνωστής συχνότητας. Πατήστε το πλήκτρο 24. Στην οθόνη εμφανίζεται η κυματομορφή, η οποία αν δεν είναι καθαρή και ακίνητη, μπορεί να ρυθμιστεί χρονικά με το διακόπτη 9 και ως προς τη τάση με το διακόπτη 21.
5. Ελευθερώστε το πλήκτρο 24.
- Πατήστε πλήκτρο 25. Στην οθόνη εμφανίζονται και οι δύο κυματομορφές.
6. Ελευθερώστε πλήκτρο 25 και πατήστε πλήκτρο 6. Στην οθόνη εμφανίζονται ανεξήγητα και πολύπλοκα σχήματα.
7. Ρυθμίστε τη γνωστή συχνότητα μέχρις ότου πάνω στην οθόνη εμφανιστεί κάποιο σχήμα Lissajous. Το σχήμα αυτό δεν είναι ακίνητο αλλά μεταβάλλεται συνεχώς (τούτο οφείλεται στην συνεχώς μεταβαλλόμενη διαφορά φάσης μεταξύ δύο σημάτων). Η συνεχής μετατροπή του σχήματος δεν αποτελεί μειονέκτημα. Γιατί;
8. Υπολογισμός της άγνωστης συχνότητας με τη βοήθεια της σχέσης 6.

Μέτρηση της διαφοράς φάσης

Κατασκευάστε το κύκλωμα RC και συνδέστε το σε γεννήτρια χαμηλών συχνοτήτων.



Σχήμα 10: Σταθεροποίηση εικόνας (έλλειψης)

2. Πατήστε το πλήκτρο 6. Στην οθόνη εμφανίζεται μία έλλειψη την οποία μπορείτε να τροποποιήσετε διά ρύθμισης της συχνότητας της γεννήτριας G.
3. Εφόσον έχει ρυθμιστεί μία έλλειψη της αρεσκείας του πειραματιστή να υπολογιστεί η διαφορά φάσης μεταξύ των σημάτων I και II σύμφωνα με τη σχέση 5.

$$\sin \varphi = \frac{A}{B} \Rightarrow \varphi = \arcsin \frac{A}{B}$$

4. Εξηγήστε, γιατί η διαφορά φάσης εξαρτάται από την εφαρμοζόμενη συχνότητα;

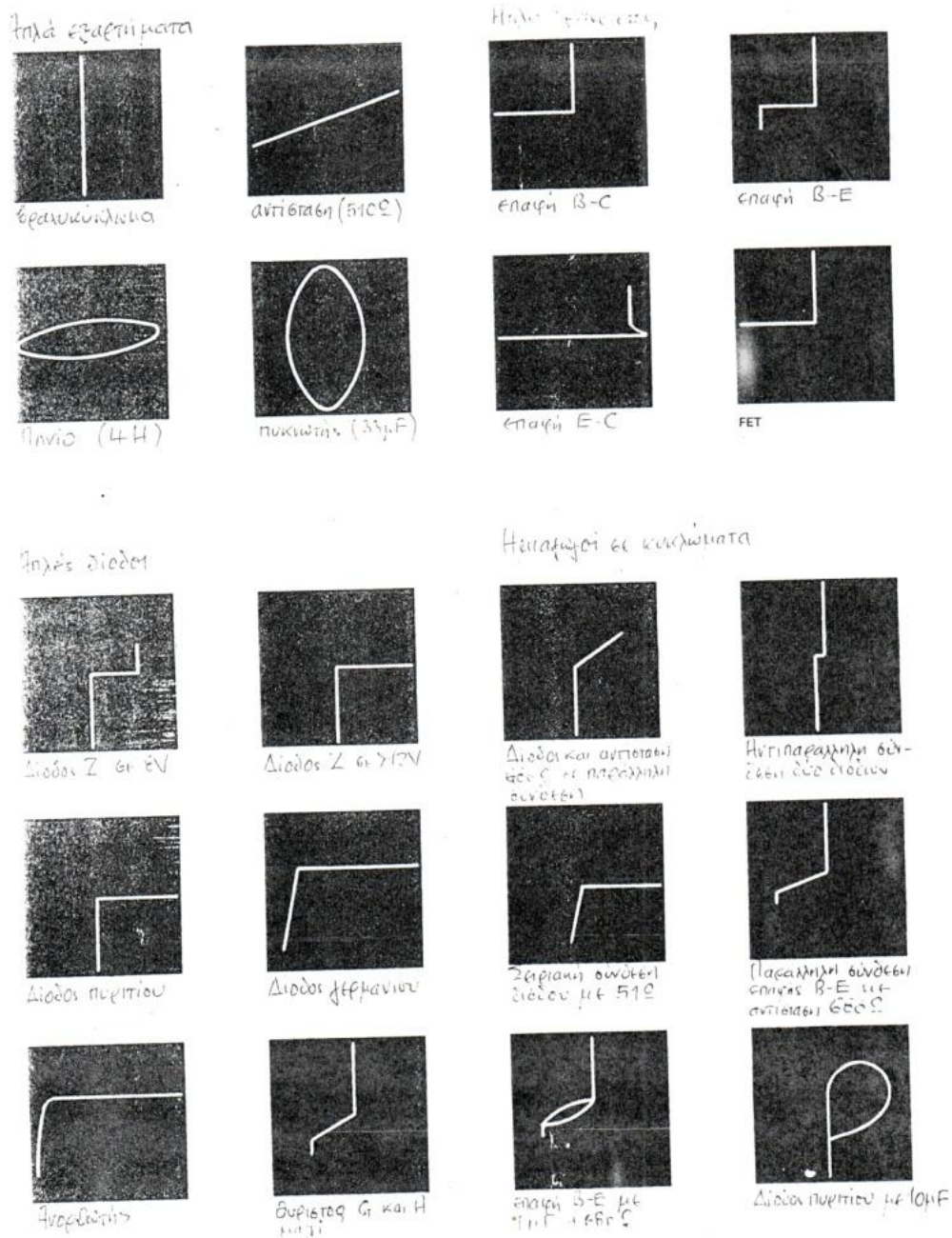
3.5 Διακρότημα

1. Στην είσοδο του καναλιού I προσάγεται από γεννήτρια σήμα με π.χ. $f_1 = 1600\text{Hz}$ (ελέγξτε την ύπαρξη του σήματος στην οθόνη).

2. Στην είσοδο του καναλιού II προσάγεται από άλλη γεννήτρια ένα δεύτερο σήμα με π.χ. $f_2 = 1500\text{Hz}$ (ελέγξετε την ύπαρξή του).
3. Πατήστε το πλήκτρο 26. Στην οθόνη εμφανίζεται το άθροισμα των δύο σημάτων.
4. Ρυθμίστε τις τάσεις έτσι (στις γεννήτριες), ώστε να προκύψουν οι δύο μορφές διακροτήματος που απεικονίζονται στο Σχ. 6. Υπολογίστε την συχνότητα της περιβάλλουσας και της συνισταμένης ταλάντωσης.
5. Ρυθμίστε τις τάσεις και τις συχνότητες έτσι, ώστε να προκύψει υπέρθεση (Σχ.6).

3.5 Δοκιμαστής (tester)

Μετρήστε μερικά απλά ηλεκτρονικά εξαρτήματα, συγκρίνετε με τις χαρακτηριστικές που δίδονται στο Σχ. 11 και εκφέρετε γνώμη, αν τα εξαρτήματα δοκιμής είναι εντάξει στη λειτουργία τους ή όχι.

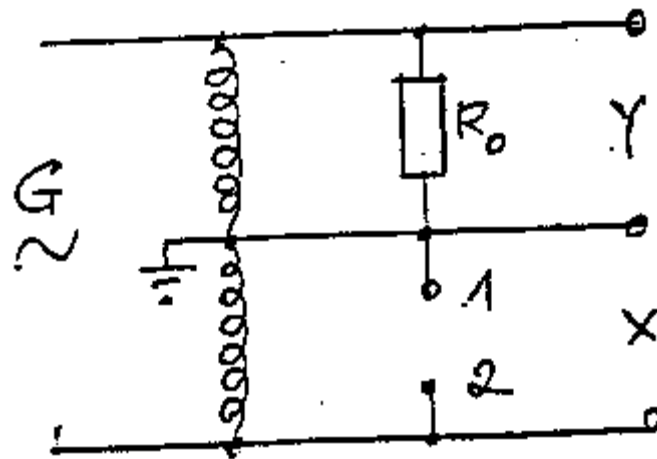


Σχ. 11 Χαρακτηριστικές εξαρτημάτων στον δοκιμαστή του παλμογράφου

Σχ. 11 Χαρακτηριστικές εξαρτημάτων στον δοκιμαστή του παλμογράφου.

Τρόπος λειτουργίας του δοκιμαστή

Ο δοκιμαστής λειτουργεί σύμφωνα με το Σχ.12. Το απεικονιζόμενο κύκλωμα είναι εγκατεστημένο εντός της συσκευής του παλμογράφου, μόνο οι ακροδέκτες 1 και 2 οδηγούνται προς τα έξω (ώστε να μπορεί να συνδεθεί το εκάστοτε εξάρτημα δοκιμής) Στα εξαρτήματα στα οποία σχετικά με R_o το σχήμα έχει κάποια διαφορά φάσης (π.χ. στον πυκνωτή και στο πηνίο), στην οθόνη σχηματίζεται έλλειψη (βλ. εξίσωση 4). Στην αντίσταση δοκιμής δεν υπάρχει διαφορά φάσης σχετικά με R_o άρα προκύπτει ευθεία.



Σχήμα 12. Δοκιμαστής (tester).

ΑΣΚΗΣΗ 6 (Η 4)

ΜΕΤΡΗΣΗ ΑΝΤΙΣΤΑΣΕΩΝ

Ι. ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΜΕΡΟΣ

Εφ' όσον στα άκρα ενός στοιχείου σύνδεσης εφαρμόζεται η τάση U και εφ' όσον το στοιχείο σύνδεσης διαρρέεται από ρεύμα έντασης I , τότε το πηλίκο U/I είναι η αντίσταση του στοιχείου

$$R = \frac{U}{I} \quad (1)$$

Σε περίπτωση που η αντίσταση R - ανεξάρτητα από το μέγεθος της τάσης U - είναι σταθερή, ισχύει ο νόμος του OHM

$$\frac{U}{I} = R = \text{σταθερή} \quad (2)$$

Ο Νόμος του OHM ισχύει για μεταλλικούς αγωγούς, αλλά και για ηλεκτρολυτικούς αγωγούς (μετά την εξουδετέρωση της τάσης πόλωσης, εφόσον η θερμοκρασία αυτού είναι σταθερή αντίσταση ενός μεταλλικού αγωγού είναι ανάλογη του μήκους l και αντιστρόφως ανάλογη της διατομής του A .

$$R = \rho \frac{l}{A} \quad (3)$$

Το μέγεθος ρ είναι μια χαρακτηριστική σταθερά του μετάλλου, η οποία ονομάζεται ειδική αντίσταση. Για το χαλκό π.χ. ισχύει

$$\rho = 1.72 \cdot 10^{-6} \Omega \text{ cm} \quad \text{ή} \quad \sigma = 1/\rho = 58 \cdot 10^4 \Omega^{-1} \text{ cm}^{-1}$$

όπου σ είναι η αγωγιμότητα.

Κατά τη σύνδεση σε σειρά περισσότερων ωμικών αντιστάσεων η ισοδύναμη αντίσταση είναι

$$R_{\text{ολ}} = R_1 + R_2 + \dots + R_n = \sum_{i=1}^n R_i \quad (4)$$

Κατά την παράλληλη σύνδεση, η ισοδύναμη αντίσταση δίνεται από τη σχέση

$$\frac{1}{R_{o\lambda}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_n} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{R_i} \quad (5)$$

Κατά την μικτή σύνδεση (σύνδεση σε σειρά και παράλληλη σύνδεση ταυτόχρονα), η ισοδύναμη αντίσταση υπολογίζεται με τη βοήθεια των σχέσεων (4) και (5). Μία γενική διατύπωση για την ισοδύναμη αντίσταση είναι μεν δυνατή αλλά όχι εφικτή. Οι σχέσεις (4) και (5) προκύπτουν ως εξής

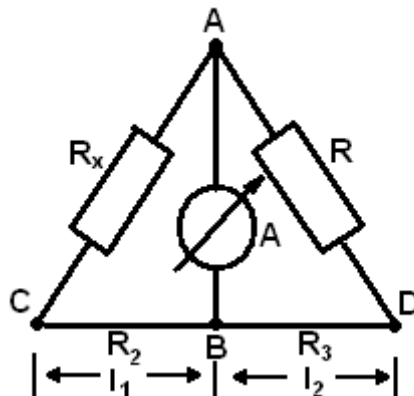
$$(4) \quad U_{o\lambda} = U_1 + U_2 \longrightarrow IR_{o\lambda} = I R_1 + I R_2 \longrightarrow R_{o\lambda} = R_1 + R_2$$

$$(5) \quad U_{o\lambda} = I_1 + I_2 \longrightarrow \frac{U}{R_{o\lambda}} = \frac{U}{R_1} + \frac{U}{R_2} \longrightarrow \frac{1}{R_{o\lambda}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

II. ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΕΣ ΔΙΑΤΑΞΕΙΣ

Μέτρηση αντίστασης με γέφυρα Wheatstone

Μεταξύ των σημείων A,B,C,D της Εικ.1 είναι διατεταγμένες οι αντιστάσεις R_1, R_2, R_3, R_4 . Στα σημεία C, D εφαρμόζεται μια χαμηλή τάση και στα σημεία A, B ένα αμπερόμετρο.



Σχ. 1 Γέφυρα Wheatstone

Το ρεύμα ερχόμενο από την πηγή διακλαδίζεται στα σημεία C, D και – σε γενική περίπτωση – στα σημεία A, B. Οι τέσσερις αντιστάσεις μπορούν να ρυθμιστούν έτσι ώστε η γέφυρα να μην είναι ρευματοφόρα και το γαλβανόμετρο να μην έχει καμία ένδειξη. Αυτό σημαίνει ότι μεταξύ A και B δεν υπάρχει διάφορα τάσης, τα σημεία αυτά έχουν την ίδια τάση. Αυτό σημαίνει περαιτέρω ότι $U_{AC} = U_{BC}$ και $U_{AD} = U_{BD}$. Οι τάσεις αυτές μπορούν να υπολογιστούν με την βοήθεια του νομού του OHM. Απ' αυτόν προκύπτει

$$U_{AC} = U_{BC} \longrightarrow I_x R_x = R_2 I_2$$

$$U_{AD} = U_{BD} \longrightarrow I R_x = R_3 I_3$$

Και δια διαίρεσης αυτών

$$\frac{I_x R_x}{I R} = \frac{I_2 R_2}{I_3 R_3}$$

Εφόσον όμως η γέφυρα δεν είναι ρευματοφόρα ισχύει $I_x = I$ και $I_2 = I_3$, όποτε η παραπάνω σχέση απλοποιείται σε

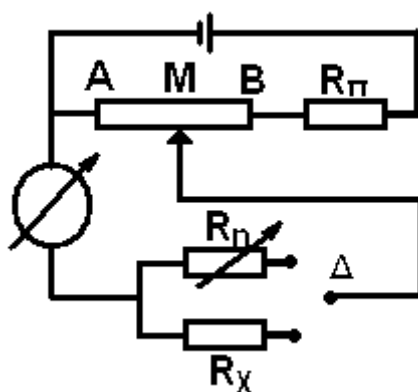
$$R_x = R \frac{R_2}{R_3}$$

Αντικαθιστώντας τις αντιστάσεις R_2, R_3 με σύρματα ίδιας διατομής και με μήκη l_1 και l_2 σύμφωνα με (3) προκύπτει

$$R_x = \frac{l_1}{l_2} R$$

2. Μέτρηση αντίστασης δι' αντικατάστασης

Η άγνωστη αντίσταση R_N συνδέεται μαζί με ένα αμπερόμετρο σ' ένα ηλεκτρικό κύκλωμα στο οποίο εφαρμόζεται μια συνεχής τάση από μια σταθερή πηγή. Το αμπερόμετρο δείχνει-σύμφωνα με (1)- την ένταση του ρεύματος που διαρρέει την αντίσταση. Δι' αντικατάστασης της R_N με μια γνωστή αντικατάσταση R_n το ρεύμα έχει κατά κανόνα άλλη τιμή και για το λόγο αυτό η αντίσταση R_n πρέπει να είναι ρυθμιζόμενη, ώστε με την βοήθεια αυτής να ρυθμίζεται η ίδια τιμή της έντασης ρεύματος. Δι' αυτού όμως η R_n είναι ίση με την άγνωστη αντίσταση R_N



Σχ. 2 Συνδεσμολογία αντικατάστασης

Η τάση είναι ρυθμίσιμη διά μιας ποτενσιομετρικής συνδεσμολογίας. Ως προς τούτο χρήσιμη είναι μια αντίσταση, η οποία πέρα από τους ακροδέκτες A, B έχει και μια ενδιάμεση απολαβή M. Στα σημεία A και B εφαρμόζεται ολική τάση της πηγής, ενώ η τάση για το πείραμα απολαμβάνεται στα σημεία A, M. Άρα η τάση αυτή είναι ρυθμιζόμενη από μηδέν ($AM=0$) μέχρι μια μεγίστη τιμή ($AM=AB$). Για πιο καλλίτερη

ρύθμιση προβλέπεται και η προαντίσταση R_{Π} . Για την γρήγορη αλλαγή των R_n και R_x χρησιμεύει ο μεταγωγέας Δ .

III. ΜΕΤΡΗΣΕΙΣ

1. Μετρήσεις με τη γέφυρα Wheatstone

1.1. Ρύθμιση της γέφυρας στην περιοχή $A(Ampere)$ και μετά ρύθμιση στην περιοχή mA .

1.2. Η αντίσταση R_N πρέπει να επιλέγεται έτσι ώστε $\frac{l_1}{l_2} \approx 1$ (γιατί;).

1.3. Μέτρηση 6 αντιστάσεων, οι οποίες είναι άγνωστες

1.4. Μέτρηση 3 ζευγών αντιστάσεων σε σύνδεση κατά σειρά και σε παράλληλη σύνδεση.

1.5. Μαθηματικός υπολογισμός σύμφωνα με (4) και (5)

1.6. Σύγκριση των τιμών υπολογισμού και μετρήσεις

2. Μετρήσεις με τη μέθοδο της αντικατάστασης

2.1. Ρύθμιση $AM=0$

2.2. Σύνδεση της αντίστασης R_x . Αύξηση της τάσης δια αύξησης της AM μέχρι το αμπερόμετρο να έχει μετρήσιμη ένδειξη

2.3. Ρύθμιση της μεγίστης τιμής R_N

2.4. Μεταγωγέας στη θέση R_N , AM σταθερή. Δι' ελάττωσης της R_n , στο αμπερόμετρο επιτυγχάνεται τελικά η ίδια ένδειξη όπως και στο εδάφιο 2.2. Αρα ισχύει $R_x=R_n$.

2.5. Μέτρηση 6 άγνωστων αντιστάσεων (αυτών του εδαφίου 1.3)

3. Αξιολόγηση των αποτελεσμάτων με υπολογισμό σφαλμάτων.

ΑΣΚΗΣΗ 7 (Η 15)

ΜΕΤΡΗΣΗ ΤΗΣ ΕΝΤΑΣΗΣ ΤΟΥ ΜΑΓΝΗΤΙΚΟΥ ΠΕΔΙΟΥ ΤΗΣ ΓΗΣ

ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΜΕΡΟΣ

1. Γήινο μαγνητικό πεδίο (γεωμετρικό πεδίο)

Το γήινο μαγνητικό πεδίο αποτελείται –ως προς την προέλευση του- από δυο συνιστώσες

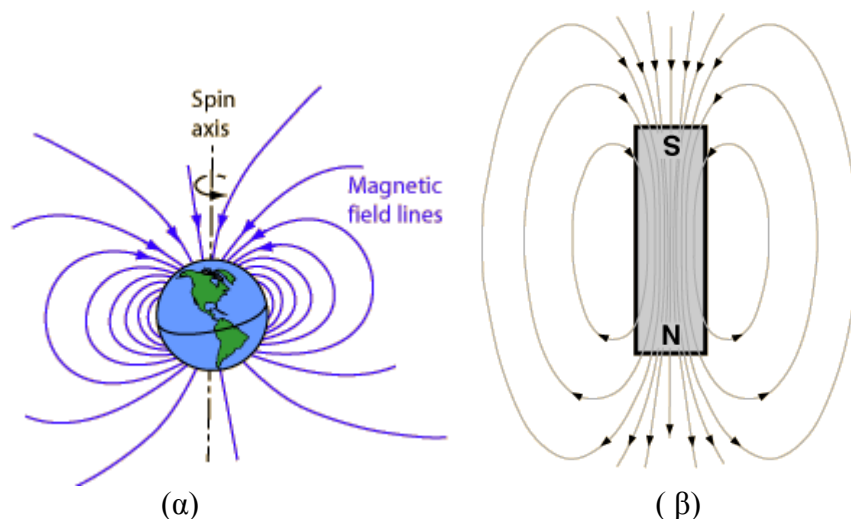
- A. το μόνιμο μαγνητικό πεδίο (εσωτερικό πεδίο)
- B. το μεταβλητό μαγνητικό πεδίο(εξωτερικό πεδίο)

1.1.Προέλευση

Οι αιτίες για την ύπαρξη του μόνιμου μαγνητικού πεδίου οφείλονται σε διεργασίες που υλοποιούνται στο εσωτερικό της γης. Οι διεργασίες αυτές είναι οι κυλήσεις της ηλεκτρικά αγωγίμης ύλης στα πάνω στρώματα του πυρήνα της Γης. Σε αυτό το κύριο μέρος των διεργασιών προστίθενται και τα μαγνητικά πεδία των μαγνητικών πετρωμάτων του εξωτερικού φλοιού της Γης στη μορφή τοπικών ανωμαλιών. Το μόνιμο μαγνητικό πεδίο συνεισφέρει στο ολικό γεωμαγνητικό πεδίο κατά 94%.

1.2.Χαρακτηριστικά του μόνιμου μαγνητικού πεδίου

Το γεωμαγνητικό πεδίο είναι κατά κύριο λόγο διπολικό. Τούτο φαίνεται καθαρά από τα δυο σχέδια του Σχ1 τα οποία δείχνουν τα μαγνητικά πεδία της γης και ενός ραβδόμορφου μαγνήτη. Αυτό δεν σημαίνει ότι το πεδίο της γης παράγεται αναγκαστικά από έναν ραβδόμορφο μαγνήτη, ο οποίος βρίσκεται μέσα στη γη. Μάλλον σημαίνει ότι η μορφή του μοιάζει πολύ με τη μορφή του πεδίου ενός ραβδόμορφου μαγνήτη. Γι' αυτό είπαμε παραπάνω «κατά κύριο λόγο». Ωστόσο, οι πραγματικές διεργασίες που παράγουν το διπολικό πεδίο της γης είναι μάλλον εξαιρετικά περίπλοκες. Γι αυτό είναι δύσκολο να απεικονιστούν οπτικά. Συνεπώς κατασκευάζουμε την εικόνα ότι μέσα στη γη υπάρχει ένα δίπολο, το οποίο το ονομάζουμε, "γεωμαγνητικό δίπολο". Αυτό το τοποθετούμε στο κέντρο της γης.



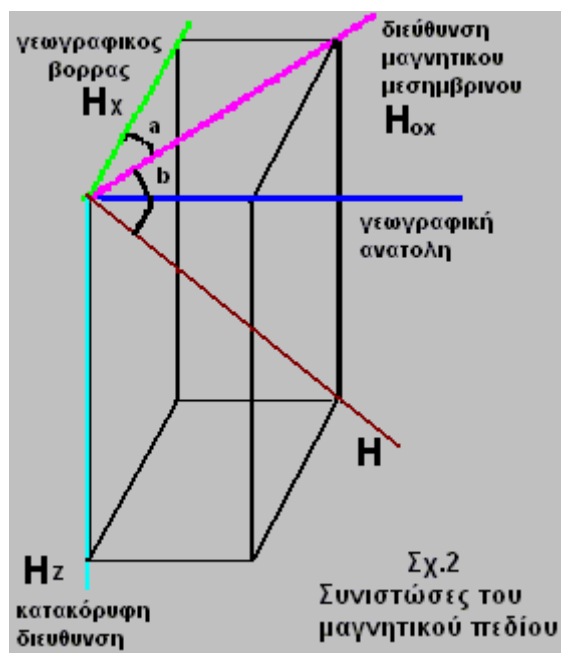
Σχ1. Μαγνητικό πεδίο της γης (α) και ενός ραβδόμορφου μαγνήτη (β).

Το μαγνητικό δίπολο δεν είναι η μόνη συνιστώσα του μαγνητικού πεδίου της γης. Εκτός από το διπολικό πεδίο υπάρχει και ένα μη διπολικό πεδίο, το οποίο είναι ανώμαλο. Τούτο οφείλεται στα μαγνητικά πετρώματα κλπ. Δηλαδή το μαγνητικό πεδίο της γης είναι αποτέλεσμα της σύνθεσης ενός διπολικού και ενός μη διπολικού πεδίου.

1.3 Ορισμός μεγεθών

Αν υποθέσουμε, ότι το μαγνητικό πεδίο σε κάποιο σημείο O πάνω από την επιφάνεια της Γης έχει την ένταση H και διεύθυνση και φορά, όπως φαίνεται στο Σχήμα 2. Η ένταση H είναι ένα μέγεθος που χαρακτηρίζεται από την αριθμητική τιμή, τη διεύθυνση και τη φορά. Έτσι στο Σχ. 2 το ευθύγραμμο τμήμα H είναι ανάλογο της έντασης του πεδίου.

Αν στο σημείο O τοποθετηθεί μια μαγνητική βελόνη η οποία είναι ελεύθερη να περιστρέφεται στο οριζόντιο επίπεδο – αυτή (η βελόνη) θα ηρεμήσει στη διεύθυνση H_{op} , η οποίος είναι η οριζόντια συνιστώσα της H . Με άλλα λόγια, η H_{op} είναι η διεύθυνση του μαγνητικού μεσημβρινού. Επομένως ισχύουν οι ορισμοί: Η γωνία ανάμεσα στην H_{op} και τον γεωγραφικό βορρά είναι η απόκλιση α . Η γωνία που σχηματίζει η H με το οριζόντιο επίπεδο είναι η έγκλιση β του σημείου O .



Σχ. 2 Συνιστώσες του μαγνητικού πεδίου

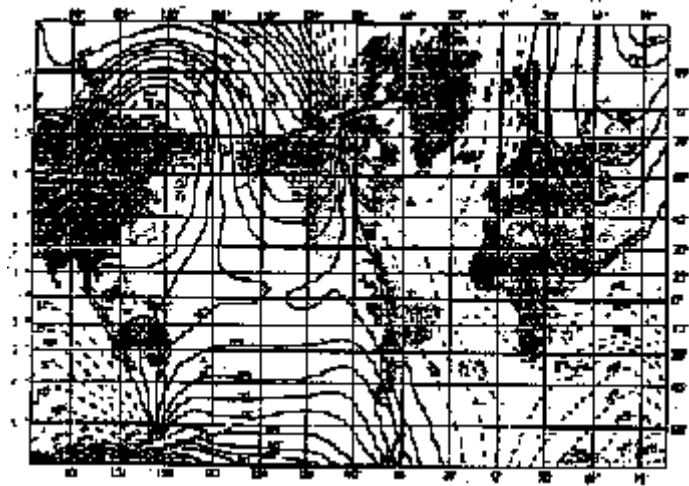
Η ένταση H μπορεί επίσης να θεωρηθεί ως ισοδύναμη με στην H_x , την H_y και την H_z , τις τρεις συνιστώσες του πεδίου οι οποίες δρουν αντίστοιχα στην διεύθυνση του Γεωγραφικού Βορά, στην διεύθυνση της Γεωγραφικής Ανατολής και στην κατακόρυφη διεύθυνση. Τα μεγέθη H_x , H_y και H_z , στο Σχ. 2 είναι ανάλογα με το μέγεθος που έχουν τρεις συνιστώσες του μαγνητικού πεδίου.

Τα μαγνητικά στοιχεία ενός τόπου είναι H_x , H_y , H_z , H_{op} , H , α , β . Τα στοιχεία αυτά χρησιμοποιούνται για την περιγραφή των μαγνητικών πεδίων και συνδέονται μεταξύ τους με απλές τριγωνομετρικές σχέσεις. Αν τρία από αυτά είναι γνωστά τότε μπορούν να προσδιορισθούν και όλα τα άλλα.

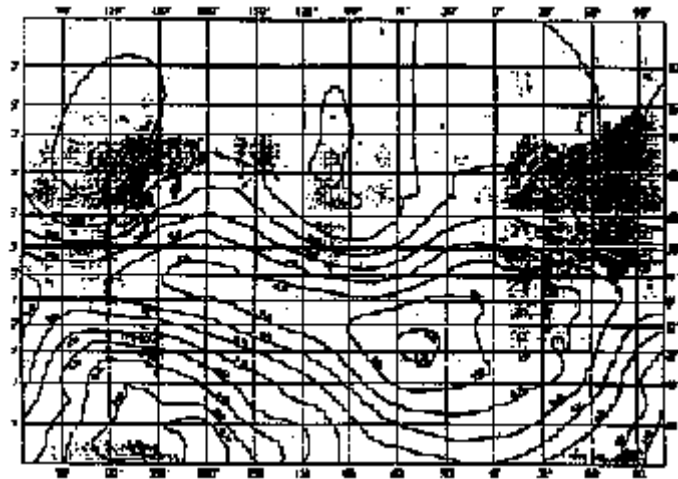
1.4 Ισομαγνητικοί χάρτες

Στους ισομαγνητικούς χάρτες τα μαγνητικά στοιχεία απεικονίζονται με τη μορφή γραμμών ίσης τιμής δηλαδή σχεδιάζονται γραμμές που ενώνουν τα σημεία της επιφάνειας της γης στα οποία ένα δεδομένο μαγνητικό στοιχείο έχει την ίδια τιμή.

Οι γραμμές που ενώνουν τα σημεία ίδιας απόκλισης ονομάζονται ισογώνιες γραμμές ο δε αντίστοιχος χάρτης ονομάζεται ισογωνιακός χάρτης. Με τον ίδιο τρόπο οι γραμμές των οποίων τα σημεία έχουν την ίδια έγκλιση ονομάζονται ισόκλινες γραμμές. Οι ισομαγνητικές γραμμές για τα άλλα στοιχεία δεν έχουν ιδιαίτερες ονομασίες ο σχεδιασμός τους όμως βασίζεται στις ίδιες αρχές. Στη μορφή αυτών των γραφικών παραστάσεων του πεδίου της γης αναφέρονται τα Σχ. 3 και 4, τα οποία δείχνουν τον χάρτη ίσης απόκλισης α και τον χάρτη ίσης έντασης του μαγνητικού πεδίου H για το έτος 1985.



Σχ. 3 Ισογωνιακός χάρτης (απόκλισης α).



Σχ. 4 Χάρτης ίσης έντασης (επαγωγής σε V_s/m^2)

2. Μαγνητικά μεγέθη.

Τα μαγνητικά μεγέθη, τα οποία είναι απαραίτητα για την εκτέλεση και για την κατανόηση των αποτελεσμάτων της άσκησης είναι:

η ένταση του ηλεκτρικού ρεύματος I

η ένταση του μαγνητικού πεδίου H

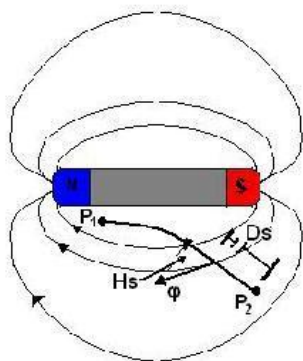
η μαγνητική τάση $V_m = \int \vec{H} \cdot d\vec{s}$

και η μαγνητική επαγωγή $\vec{B} = \mu_0 \cdot \vec{H}$

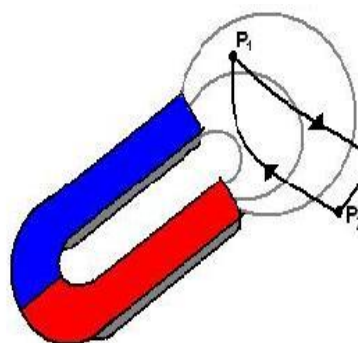
2.1 Στατικό μαγνητικό πεδίο.

Με την έκφραση αυτή χαρακτηρίζονται όλα εκείνα τα μαγνητικά πεδία, των οποίων ο σχηματισμός δεν προϋποθέτει την ύπαρξη ενός ηλεκτρικού ρεύματος. Συνεπώς το μαγνητικό πεδίο του μόνιμου μαγνήτη είναι στατικό, εφόσον δεν δημιουργείται από ηλεκτρικό ρεύμα.

Σε ένα στατικό μαγνητικό πεδίο π.χ. αυτό του Σχ. 5 σημειώνονται δύο σημεία Σ_1 και Σ_2 , τα οποία συνδέονται δια μιας καμπύλης. Η καμπύλη διαιρείται σε πολλά μικρά στοιχεία ds . Για κάθε ds μετριέται η συνιστώσα H_s του πεδίου, η οποία έχει την φορά του στοιχείου. Για κάθε στοιχείο υπολογίζεται το γινόμενο $H_s ds$. Όλα τα γινόμενα αθροίζονται.



Σχ. 5 Μαγνητική τάση στο στατικό πεδίο



Σχ. 6 Ορισμός της τάσης εκ περιστροφής

Το μέγεθος, το οποίο λαμβάνεται δι' αυτού, καλείται μαγνητική τάση. Με το σύμβολο V_m ο ορισμός της είναι

$$V_m = \int_{\Sigma_2}^{\Sigma_1} \vec{H} \cdot d\vec{s} \quad (1)$$

Η σχέση αυτή ερμηνεύεται ως εξής: Στο στατικό μαγνητικό πεδίο η μαγνητική τάση δεν εξαρτάται από τη διαδρομή, παρά μόνο από τις συντεταγμένες του αρχικού και του τελικού σημείου. Κάτι το εντελώς αντίστοιχο μας είναι γνωστό από την Ηλεκτροστατική. Εκεί ισχύει

$$U = \int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

Αν στη σχέση (1) η ολοκλήρωση γίνει σε κλειστή καμπύλη (Σχ. 6) τότε προκύπτει

$$\int_{\Sigma_1}^{\Sigma_2} \vec{H} \cdot d\vec{s}_1 = \int_{\Sigma_1}^{\Sigma_2} \vec{H} \cdot d\vec{s}_2$$

ή

$$\int_{\Sigma_1}^{\Sigma_2} \vec{H} \cdot d\vec{s}_1 + \int_{\Sigma_2}^{\Sigma_1} \vec{H} \cdot d\vec{s}_2 = 0$$

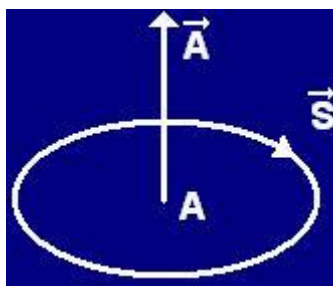
Συνεπώς ισχύει

$$V_m = \int \vec{H} \cdot d\vec{s} = 0 \quad (2)$$

Αυτό σημαίνει, ότι η μαγνητική τάση κλειστής καμπύλης μηδενίζεται .

2.2 Μαγνητικό πεδίο στάσιμων ρευμάτων.

Στο μαγνητικό πεδίο στάσιμων ρευμάτων η μαγνητική τάση σχετίζεται με τις εντάσεις των ρευμάτων. Το εμβαδόν A , το οποίο εσωκλείεται από την καμπύλη ολοκλήρωσης παίρνει θετική φορά σύμφωνα με την αρχή του δεξιόστροφου κοχλία (Σχ. 7).



Σχ. 7 Ορισμός της φοράς

Όλες οι εντάσεις ρευμάτων που διαπερνούν το εμβαδόν, πρέπει να συνυπολογισθούν. Οι εντάσεις ρευμάτων θεωρούνται θετικές, εφόσον διαπερνούν το εμβαδόν με την φορά του ίδιου του εμβαδού, δηλαδή όταν με το A σχηματίζουν οξεία γωνία. Σε αντίθετη περίπτωση θεωρούνται αρνητικά ρεύματα. Τώρα πια μπορεί να υπολογισθεί το άθροισμα όλων των ρευμάτων. Ως προς τούτο ένα ρεύμα, το οποίο διαπερνά το εμβαδόν n φορές, πρέπει να ληφθεί n φορές υπόψη. Για το άθροισμα των ρευμάτων που προσδιορίστηκε με αυτόν τον τρόπο ισχύει ο νόμος του AMPERE

$$\int \vec{H} \cdot d\vec{s} = \sum_{i=1}^Y I_i \quad (3)$$

Η σχέση αυτή διαβάζεται ως εξής: Η μαγνητική τάση κλειστής καμπύλης στο στάσιμο μαγνητικό πεδίο ισούται με το σύνολο της έντασης των από την κλειστή καμπύλη εσωκλειόμενων ρευμάτων.

Για έναν ευθύγραμμο αγωγό ο νόμος του AMPERE μπορεί να αποδειχθεί πολύ εύκολα. Ως καμπύλη ολοκλήρωσης επιλέγεται ένας κύκλος ακτίνας r , όπου στο κέντρο του κύκλου τοποθετείται ο αγωγός. Επειδή η ένταση H του μαγνητικού πεδίου πάνω σ' έναν τέτοιο κύκλο είναι σταθερή προκύπτει

$$\int \vec{H} \cdot d\vec{s} = \vec{H} \cdot \int d\vec{s} = H \cdot 2 \cdot \pi \cdot r = \frac{I}{2 \cdot \pi \cdot r} \cdot 2 \cdot \pi \cdot r = I$$

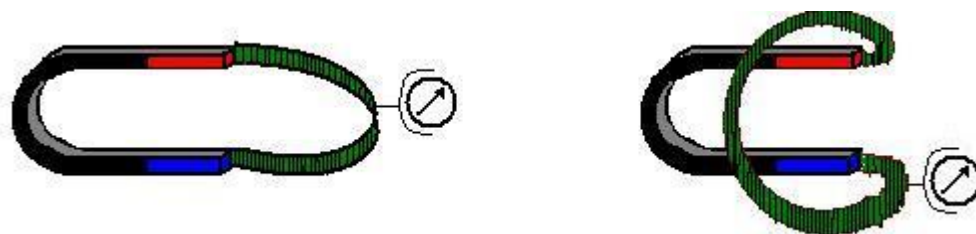
Στη σχέση (3) μπορεί να δοθεί και η εξής διατύπωση :

Η μαγνητική τάση $\int \vec{H} \cdot d\vec{s}$ ισούται με την ένταση του ηλεκτρικού ρεύματος I .

2.3 Παραδείγματα μετρήσεων

2.3.1 Στατικό πεδίο

A. Τα άκρα ενός μετρητή μαγνητικής τάσης τοποθετούνται στους πόλους ενός μόνιμου μαγνήτη. Στη συνέχεια ο μετρητής απομακρύνεται απότομα τούτο επαναλαμβάνεται περισσότερες φορές (Βλ. Σχ. 8). Η ένδειξη είναι πάντοτε η ίδια, παρά τού ότι ο μετρητής διαφορετικά στο χώρο. Αυτό σημαίνει: Στο στατικό πεδίο η μαγνητική τάση είναι πράγματι ανεξάρτητη από την διαδρομή .

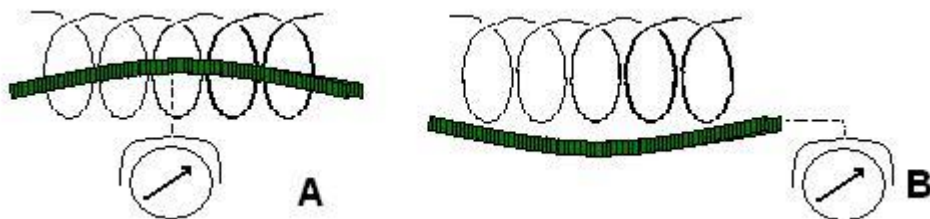


Σχ. 8 Μέτρηση της μαγνητικής τάσης στατικού πεδίου

B. Ο μετρητής της μαγνητικής τάσης τοποθετείται στο χώρο του μαγνητικού πεδίου , αλλά τα δύο άκρα του είναι πάντοτε ενωμένα. Κατά την απότομη απομάκρυνση του από το χώρο του πεδίου η ένδειξη είναι πάντοτε μηδενική. Το αποτέλεσμα αυτό σημαίνει ότι σύμφωνα με (2) η μαγνητική τάση κλειστής καμπύλης είναι πάντοτε ίση με μηδέν.

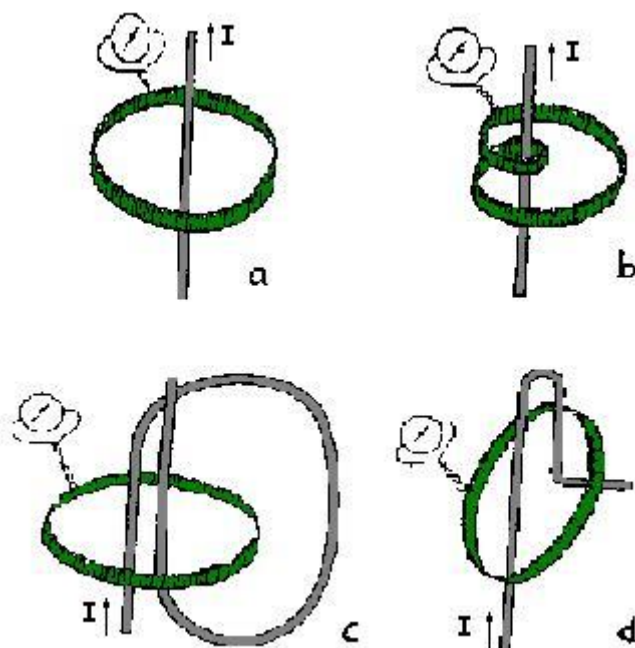
2.3.2 Μαγνητικό πεδίο στάσιμων (σταθερών) ρευμάτων

Το μαγνητικό πεδίο το οποίο παράγεται από ηλεκτρικά ρεύματα, χαρακτηρίζεται από μαγνητικές τάσεις, οι οποίες εξαρτώνται από το δρόμο. Αυτό σημαίνει, ότι το δυναμικό τους ένα βαθμωτό δυναμικό, όπως αυτό του στατικού πεδίου. Το δυναμικό τους είναι μάλλον ανυψματικό .



Σχ. 9 Μαγνητική τάση στο πεδίο ενός πηνίου .

Με τη διάταξη του Σχ. 9 μετρίεται στην περίπτωση (α) μία υψηλή μαγνητική τάση, ενώ στη περίπτωση (β) μια σχετικά πολύ χαμηλότερη .



Σχ. 10 Μαγνητική τάση κλειστής καμπύλης στον ευθύγραμμο αγωγό

Με τη διάταξη του Σχ. 10. α αποδείχνεται, ότι η μαγνητική τάση κλειστής καμπύλης και η ένταση του ρεύματος είναι ανάλογα μεγέθη. Αν ο ευθύγραμμος αγωγός εσωκλείεται δύο φορές (Σχ. 10. b), τότε η μαγνητική τάση έχει διπλή τιμή. Το ίδιο αποτέλεσμα παρατηρείται, αν το ρεύμα διαρρέει δύο φορές το εμβαδόν που εσωκλείει το πηνίο (Σχ. 10. c). Εφόσον δεν εσωκλείεται κανένα ρεύμα , τότε ο παλμός τάσης ή αντίστοιχα η μαγνητική τάση, μηδενίζεται (Σχ. 10. d). Οι διατάξεις του Σχ. 10 επαληθεύουν τη γενική διατύπωση (3) δηλαδή το νόμο του AMPERE. Ο νόμος αυτός περιγράφει τη σχέση μεταξύ μαγνητικού πεδίου και ηλεκτρικού ρεύματος σε γενική μορφή. Για το λόγο αυτό είναι ένας από τους πιο σημαντικούς νόμους του στάσιμου ηλεκτρομαγνητικού πεδίου.

ΠΡΑΚΤΙΚΟ ΜΕΡΟΣ

1. Τα όργανα, τα οποία είναι απαραίτητα για την εκτέλεση του πειράματος είναι :
 - Τροφοδοτικό συνεχούς ρεύματος με διακόπτη και ποτενσιόμετρο για την ρύθμιση της έντασης του ρεύματος και αμπερόμετρο .
 - Μαγνητική βελόνη που περιβάλλεται από δύο στερεά εγκατεστημένα σύρματα , των οποίων τα άκρα είναι συνδεδεμένα (σύνδεση κατά σειρά). Η μαγνητική βελόνη συνοδεύεται περιστρεφόμενο πλαίσιο με μοιρογνωμόνιο .
 - Αντί του ποτενσιόμετρου μπορεί να χρησιμοποιηθεί ένας ροοστάτης

2. Διαδικασία της άσκησης

2.1 Το επίπεδο της μαγνητικής βελόνης τοποθετείται οριζόντια. Δια μετακίνησης του πλαισίου βρίσκεται εκείνη η θέση, όπου ο άξονας της βελόνης συμπίπτει με την ένδειξη μηδέν (0).

Δι' αυτού έχει βρεθεί η φορά και διεύθυνση του μαγνητικού μεσημβρινού, δηλαδή H_{op} .

2.2. Το επίπεδο της βελόνης στρέφεται κατά 90° . Η βελόνη εκτρέπεται αμέσως και ισορροπεί μετά από μικρό χρονικό διάστημα. Η ένδειξη της βελόνης παρέχει και τοπική έγκλιση β (σε μοίρες). Η ύπαρξη της έγκλισης σημαίνει την ύπαρξη συνιστώσας H_z .

2.3 Τα βήματα 2.1 και 2.2 επαναλαμβάνονται πέντε (5) φορές με σκοπό τον προσδιορισμό μίας μέσης τιμής της έγκλισης β .

$$\bar{\beta} = \frac{1}{5} \sum_1^5 \beta_i$$

2.4 Τα άκρα των δύο συρμάτων που περιβάλλουν την βελόνη συνδέονται με την συνεχή τάση του τροφοδοτικού. Με ποτενσιόμετρο ή ροοστάτη ρυθμίζεται η ένταση του ρεύματος που διαρρέει τα σύρματα, μέχρι που η βελόνη ισορροπήσει την ένδειξη μηδέν, συγχρόνως σημειώνουμε την ένδειξη της έντασης του ρεύματος.

Το βήμα αυτό επαναλαμβάνεται πέντε (5) φορές με σκοπό τον προσδιορισμό μιας μέσης τιμής της έντασης I του ρεύματος.

$$\bar{I} = \frac{1}{5} \sum_1^5 I_i$$

Δια του χειρισμού αυτού παράχθηκε ένα τεχνικό μαγνητικό πεδίο, το οποίο εξουδετερώνει την συνιστώσα H_z του γήινου μαγνητικού πεδίου.

Συνεπώς ισχύει

$$H_z' = H_z$$

Αξιολόγηση των μετρήσεων

3.1. Υπολογισμός της συνιστώσας $H_z' = H_z$

Η H_z' υπολογίζεται σύμφωνα με τον νόμο του AMPERE (3). Για το σκοπό αυτό χρειάζεται η απόσταση μεταξύ των συρμάτων και της βελόνης. Αυτή είναι $r=0,5 \cdot 10^{-2} \text{m}$.

3.2 Με γνωστή πλέον την συνιστώσα H_z και την έγκλιση β μπορεί να υπολογισθεί μέσω μιας απλής τριγωνομετρικής σχέσης η συνισταμένη ένταση του μαγνητικού πεδίου H . (βλ. Σχ. 2)

3.3 Υπολογισμός της ολικής μαγνητικής επαγωγής $B = \mu_0 \cdot H$

3.4 Υπολογισμός του σφάλματος του αποτελέσματος B στη μορφή

$$B = B_{\text{μετρ}} \pm \Delta B$$

ΑΣΚΗΣΗ 9 (Η 17)

ΝΟΜΟΣ ΤΗΣ ΕΠΑΓΩΓΗΣ

1. ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΜΕΡΟΣ

1.1 Νόμος της επαγωγής ή Δεύτερη εξίσωση MAXWELL

Ο νόμος της επαγωγής είναι ο σημαντικότερος νόμος του ηλεκτρομαγνητισμού. Γι' αυτόν ισχύουν οι εξής ισοδύναμες διατυπώσεις

$$U_{\text{ΕΠ}} = -\frac{d\Phi}{dt}$$

$$U_{\text{ΕΠ}} = -\frac{d\Phi}{dt} \int \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

$$\int_{t_0}^T U_{\text{ΕΠ}} dt = -(\Phi - \Phi_0)$$

$$\int \vec{E} \cdot d\vec{S} = -\frac{d}{dt} \int \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

Το μέγεθος Φ καλείται: Μαγνητική ροή. Γι' αυτή από (1) και (1') προκύπτει :

$$\Phi = \int \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

Και σε περίπτωση που η μαγνητική ροή είναι σταθερή ως προς το εξεταζόμενο εμβαδόν

$$\Phi = \vec{B} \cdot \vec{S}$$

Εξετάζοντας τη μαγνητική ροή συναρτήσει του χρόνου προκύπτει

$$\frac{d\Phi}{dt} = \vec{S} \cdot \frac{d\vec{B}}{dt} + \vec{B} \cdot \frac{d\vec{S}}{dt}$$

Στη σχέση αυτή διακρίνονται δύο σημαντικές περιπτώσεις :

a. $\vec{B} \cdot \frac{d\vec{S}}{dt} \neq 0$. Η περίπτωση αυτή σημαίνει ότι σε σταθερή B μεταβάλλεται το εμβαδό.

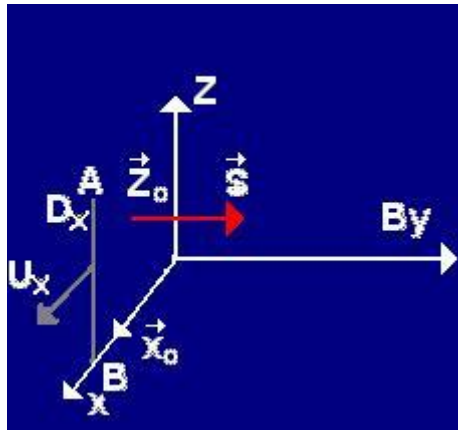
Θέτοντας για το εμβαδόν $S = \vec{t}_o \cdot \vec{x}$ προκύπτει π.χ. $\frac{d\vec{S}}{dt} = \vec{t}_o \cdot \frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{t}_x \cdot \vec{U}_x \neq 0$. Άρα

προκύπτει $\vec{U}_x \neq 0$ δηλαδή το κύκλωμα όπου θα μπορούσε να παραχθεί μία τάση εξ επαγωγής, είναι κινούμενο. Η συμβολή στην τάση εξ επαγωγής δεν μηδενίζεται. Σε

περίπτωση $\frac{d\vec{S}}{dt} = 0$, φυσικά δεν υπάρχει συμβολή. Για την καλύτερη κατανόηση του προβληματισμού μας διευκολύνει το Σχ. 1. Έστω ότι η μαγνητική επαγωγή είναι

$$\vec{B} = j \cdot B_y \quad \text{και} \quad S = z \cdot x = k \cdot z \cdot i \cdot x = j \cdot z$$

δηλαδή το εμβαδόν $\vec{S}$ έχει φορά τον άξονα y και άρα η φορά του συμπίπτει με τη φορά της $\vec{B}$.



Σχ. 1

Συνεπώς ισχύει

$$\frac{d\vec{S}}{dt} = \vec{t}_o \cdot \frac{d\vec{X}}{dt} = \vec{t}_x \cdot \vec{U}_x$$

εφόσον ο αγωγός AB κινείται με $\vec{U}_x$. Άρα για την εν δυνάμει υπάρχουσα τάση εξ επαγωγής έπεται

$$|U_{\text{ext}}| = \vec{B} \cdot \frac{d\vec{S}}{dt} = B_y \cdot z_0 \cdot U_x$$

Συνεπώς η τάση εξ επαγωγής ακολουθεί τις μεταβλητές της ταχύτητας. Σε περίπτωση όμως που το εμβαδόν $\vec{S}$ ή $\frac{d\vec{S}}{dt}$ εσωκλείουν με την B_y γωνία α , τότε για την τάση εξ επαγωγής ισχύει

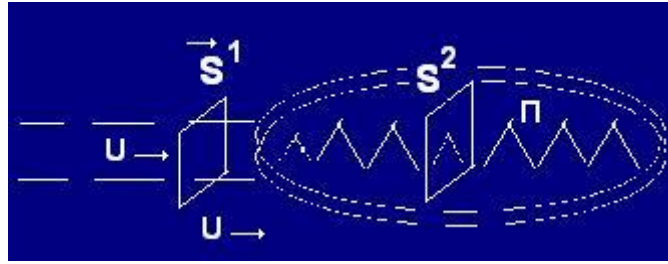
$$|U_{\text{ext}}| = \vec{B} \cdot \frac{d\vec{S}}{dt} \cdot \cos \alpha$$

Αντίστοιχα το ίδιο ισχύει και σε περίπτωση που η ταχύτητα u εσωκλείει με τον άξονα x η γωνία α ισχύει δηλαδή

$$|U_{\text{ext}}| = B_y \cdot z_0 \cdot U_x \cdot \cos \alpha$$

Άρα πάντοτε ενδιαφέρει ο αριθμός των κάθετα κομμένων δυναμικών γραμμών της

b. $S \cdot \frac{d\Phi}{dt} \neq 0$. Η περίπτωση αυτή σημαίνει, ότι σε σταθερό εμβαδόν η μαγνητική επαγωγή μεταβάλλεται στον χρόνο. Τούτο όμως μπορεί να επιτευχθεί με δύο τρόπους



Σχ. 2

Ο πρώτος τρόπος φαίνεται καθαρά από το Σχ. 2. Το εμβαδόν μένει αμετάβλητο, αλλά εισχωρεί στο χώρο υψηλότερης μαγνητικής επαγωγής. Άρα μεταβάλλεται στο χρόνο η μαγνητική επαγωγή εφόσον το πλαίσιο έχει κάποια ταχύτητα Έπεται ότι μεταβάλλεται και η μαγνητική ροή, εφόσον ισχύει η (3).

Άρα και σ' αυτήν την υποπερίπτωση η ταχύτητα παίζει ένα σημαντικό ρόλο, μόνο που εδώ έχει μια εντελώς άλλη σημασία απ' ότι στην περίπτωση που συζητήθηκε στην προηγούμενη περίπτωση .

Ο δεύτερος τρόπος $\frac{dB}{dt} \neq 0$ φαίνεται επίσης στο Σχ. 2. Το πλαίσιο εμβαδόν S μένει ακίνητο στην αρχική του θέση. Η μαγνητική επαγωγή μεταβάλλεται χρονικά δια του εξής χειρισμού :

Γνωρίζοντας ότι η ένταση του μαγνητικού πεδίου ενός μακρόστενου πηνίου είναι

$$H = \frac{N}{l} \cdot I$$

για την μαγνητική επαγωγή προκύπτει

$$B = \mu_o \cdot \frac{N}{l} \cdot I \quad (4)$$

Το γινόμενο $\mu_o \cdot \frac{N}{l}$ είναι σταθερό. Άρα οποιαδήποτε χρονική μεταβολή της μαγνητικής επαγωγής πρέπει να προέρχεται από τη χρονική μεταβολή της έντασης του ρεύματος I . Άρα ισχύει

$$\frac{dB}{dt} = \mu_o \cdot \frac{N}{l} \cdot \frac{dI}{dt} \quad (4')$$

Συνεπώς και η μαγνητική ροή στο εμβαδόν S είναι χρονικά μεταβαλλόμενη .

$$|U_{\varepsilon\pi}| = \frac{d\Phi}{dt} = S \cdot \mu_o \cdot \frac{N}{l} \cdot \frac{dI}{dt} \quad (5)$$

Η άσκηση που ακολουθεί αναφέρεται μόνο σε αυτόν τον τρόπο παραγωγής τάσης εξ επαγωγής .

1.2 Μαγνητική ροή

Για τη μαγνητική ροή ισχύει εξ ορισμού

$$\Phi = \vec{B} \cdot \vec{S} \quad (6)$$

Η αντίστοιχη εξίσωση μονάδων μέτρησης είναι :

$$[\Phi] = [\vec{B}] \cdot [\vec{S}] \rightarrow V_s = \frac{Vs}{m^2} \cdot m^2$$

Για την μαγνητική ροή έχουμε την σαφή αντίληψη ότι το μέγεθος αυτό βρίσκεται στην κίνηση, ότι ρέει, ότι μετατοπίζεται στο χώρο με τη φορά των δυναμικών γραμμών της επαγωγής B .

Εξετάζοντας το μέγεθος $\frac{d\Phi}{dt}$ και την αντίστοιχη μονάδα μέτρησης του διαπιστώνουμε, ότι πρόκειται για $\left[\frac{d\Phi}{dt} \right] = V$. Άρα το μέγεθος το οποίο ρέει ανά μονάδα χρόνου στο εμβαδόν S , έχει τη μονάδα VOLT(V). Το μέγεθος αυτό δεν έχει κανένα άλλο παρά το μαγνητικό ρεύμα I_m . Άρα μπορεί να σημειωθεί

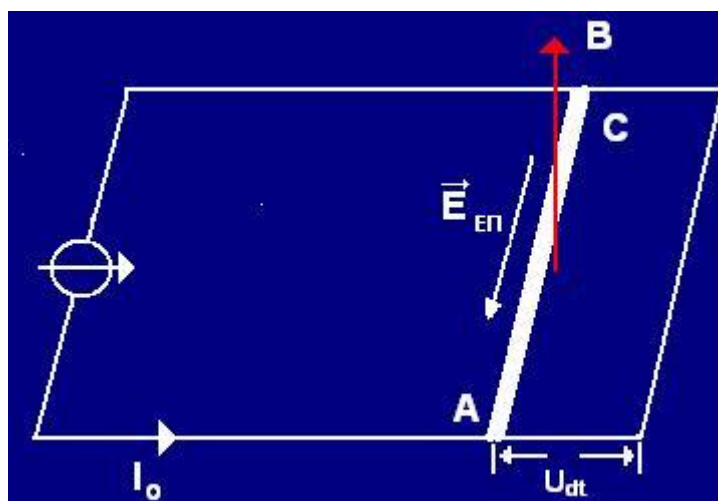
$$I_m = \frac{d\Phi}{dt} \quad (7)$$

1.3. Ζήτημα πρόσημου στο νόμο επαγωγής

Σίγουρα παρατηρήθηκε ότι στο παραπάνω κείμενο εσκεμμένα χρησιμοποιείται η έκφραση $|U_{επ}|$ που σημαίνει απόλυτη τιμή της τάσης εξ επαγωγής. Άρα τίθεται το ερώτημα του προσήμου της τάσης αυτής. Φυσικά ισχύει η σχέση (1), δηλαδή

$$U_{επ} = - \frac{d\Phi}{dt} \quad (1)$$

Αλλά η ορθότητα του προσήμου αυτού πρέπει να αποδειχτεί. Για το σκοπό αυτό κατασκευάζεται ένα κύκλωμα σύμφωνα με το Σχ. 3.



Σχ. 3

Το ρεύμα I_0 ρέει δια του αγωγού l και παράγει ένα μαγνητικό πεδίο B . Το πρόσημο του I_0 καθορίζεται σύμφωνα με $\vec{S}$. Όταν ένα σημείο προχωρεί εντός του κυκλώματος με θετική φορά $\vec{S}$ τότε η κάθετη του εσωκλειόμενου εμβαδού, δείχνει προς τα πάνω. Η παραγόμενη μαγνητική επαγωγή B έχει εξ ορισμού την ίδια φορά με το εμβαδόν. Δια αυτού έχουν ήδη προσδιορισθεί τα πρόσημα B και της Φ . Αφήνοντας τώρα τον αγωγό l να κινείται προς τα δεξιά με ταχύτητα v , τότε σύμφωνα με LORENTZ – παράγεται μια δύναμη

$$\vec{F} = q \cdot \vec{U} \cdot \vec{B}$$

Η δύναμη αυτή μετακινεί θετικά φορτία του αγωγού l , έτσι ώστε αυτά να συγκεντρώνονται στο σημείο A . Αυτό σημαίνει ότι το ηλεκτρικό πεδίο εξ επαγωγής έχει τη φορά που σημειώνεται στο σκίτσο. Την ίδια φορά έχει όμως και η ένταση του ρεύματος I_0 , το οποίο είναι η αιτία της υπάρχουσας επαγωγής B . Άρα ισχύει

$$I_{\varepsilon\pi} < 0$$

Άρα σημειώνεται

$$I_0 > 0, U_0 > 0, E_0 > 0, B_0 > 0, \Phi_0 > 0$$

$$d\Phi > 0, \frac{d\Phi}{dt} > 0$$

$$I_{\varepsilon\pi} < 0, E_{\varepsilon\pi} < 0, U_{\varepsilon\pi} = -\frac{d\Phi}{dt} < 0$$

Συνεπώς η σχέση (1) είναι ορθή.

2. Τεχνικές γνώσεις

2.1 Αυτεπαγωγή

Ο νόμος της επαγωγής συνδέει την τάση εξ επαγωγής με την μεταβολή της μαγνητικής ροής. Εφόσον δι' ενός οποιουδήποτε πηνίου ρέει ένα χρονικά μεταβαλλόμενο ρεύμα, τότε κάθε σπείρα του πηνίου παράγει ένα μαγνητικό πεδίο το οποίο διαπερνά όλες τις σπείρες και παράγει σε καθεμιά από αυτές μια τάση. Το φαινόμενο αυτό ονομάζεται ΑΥΤΕΠΑΓΩΓΗ, εφόσον εμφανίζεται στο ίδιο το πηνίο. Για ένα σωληνοειδές πηνίο η τάση υπολογίζεται εύκολα. Για την ένταση του πηνίου προκύπτει

$$H = \frac{N}{l} \cdot I$$

Για την μαγνητική επαγωγή $B = \mu_0 \cdot \frac{N}{l} \cdot I$

Για την μαγνητική ροή που διαπερνά μια σπείρα

$$\Phi = \vec{B} \cdot \vec{S} = \mu_0 \cdot \frac{N^2}{l} \cdot S \cdot \frac{dI}{dt}$$

Για την τάση που παράγεται σε μια σπείρα

$$U'_{\varepsilon\pi} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\mu_0 \cdot \frac{N^2}{l} \cdot S \cdot \frac{dI}{dt} \quad (7)$$

Για την τάση που παράγεται σε όλες τις σπείρες μαζί

$$U_{\varepsilon\pi} = -\mu_0 \cdot \frac{N^2}{l} \cdot S \cdot \frac{dI}{dt}$$

Με τον συντελεστή αυτεπαγωγής

$$L = \mu_0 \cdot \frac{N^2}{l} \cdot S \cdot \frac{dI}{dt} \quad (8)$$

Η τάση της εξ επαγωγής μπορεί να διατυπωθεί και στη μορφή

$$U_{\varepsilon\pi} = -L \cdot \frac{dI}{dt} \quad (9)$$

Η μονάδα μέτρησης του συντελεστή αυτεπαγωγής έχει την ονομασία HENRY (H). Ένα πηνίο έχει συντελεστή αυτεπαγωγής 1 H, εφόσον ο παλμός τάσης στη μεταβολή του ρεύματος κατά 1 A είναι 1Vs

$$[L] = 1H = 1 \frac{Vs}{A} \quad (10)$$

Με παλμό τάσης νοείται η έκφραση

$$\int_{t_1}^{t_2} U_{\varepsilon\pi} \cdot dt = -L(I_2 - I_1)$$

2. Αμοιβαία επαγωγή

Ένα σωληνοειδές πηνίο με N_a σπείρες, οι οποίες είναι ομοιόμορφα κατανεμημένες στο μήκος l_a διαρρέεται από ρεύμα I_a . Στο ομογενές πεδίο του πηνίου τοποθετείται ένα δεύτερο πηνίο με N_b σπείρες εμβαδού S_b .

Στο δεύτερο πηνίο επάγεται η τάση

$$U_{\varepsilon\pi}^b = -N_b \cdot d \frac{d\Phi_b}{dt}.$$

Όπου
$$\Phi_b = B_a \cdot S_b = \mu_o \frac{N_0}{l_a} \cdot I_a \cdot S_b$$

Αρα για την ολική τάση εξ επαγωγής προκύπτει

$$U_{\varepsilon\pi}^b = -\mu_0 \cdot \frac{N_0}{l_a} N_b \cdot S_b \cdot \frac{dI_a}{dt}$$

Με τον συντελεστή αμοιβαίας επαγωγής

$$M = \mu_0 \cdot \frac{N_0}{l_a} N_b \cdot S_b \quad (11)$$

Προκύπτει τελικά

$$U_{\varepsilon\pi}^b = -M \cdot \frac{dI_a}{dt} \quad (12)$$

2.3 Σύγκριση Ηλεκτρισμού-Μαγνητισμού

$$\begin{aligned} Q &= D \cdot S \longrightarrow \Phi = B \cdot S \\ \frac{dQ}{dt} &= \varepsilon_0 S \cdot \frac{dE}{dt} \longrightarrow \frac{d\Phi}{dt} = \mu_0 S \frac{du}{dt} \\ &= \varepsilon_0 S \frac{1}{i} \cdot \frac{dU}{dt} \longrightarrow = \mu_0 S \frac{N}{i} \cdot \frac{dI}{dt} \\ \frac{dQ}{dt} &= C \cdot \frac{dU}{dt} \longrightarrow \frac{d\Phi}{dt} = L \cdot \frac{dI}{dt} \\ I_{H\Lambda} &= C \cdot \frac{dU_{H\Lambda}}{dt} \longrightarrow I_{M\Gamma} = L \cdot \frac{dU_{M\Gamma}}{dt} \\ [A] &= \left[\frac{A \cdot s}{V} \right] \left[\frac{V}{S} \right] \longrightarrow [V] = \left[\frac{V \cdot s}{A} \right] \left[\frac{A}{s} \right] \end{aligned}$$

Αρα προκύπτει: Το μαγνητικό ρεύμα μετριέται σε V

Η μαγνητική τάση μετριέται σε A.

3. Εφαρμογές

Στην προκειμένη άσκηση γίνεται χρήση της σχέσης (12), δηλαδή

$$U_{\varepsilon\pi} = -M \cdot \frac{dI}{dt} \quad (12)$$

Ο συντελεστής αμοιβαίας επαγωγής είναι δεδομένος και δεν μπορεί να μεταβληθεί, εφόσον εξαρτάται μόνο από σταθερά μεγέθη

$$M = \mu_0 \cdot \frac{N_0}{l_0} \cdot N_b \cdot S_b \quad (11)$$

Συνεπώς, η τάση εξ επαγωγής εξαρτάται πάντοτε από τις ιδιότητες της έντασης του ρεύματος. Εξετάζοντας μερικές ειδικές περιπτώσεις

(α)

$$I = I_0 \cdot \sin \omega t$$

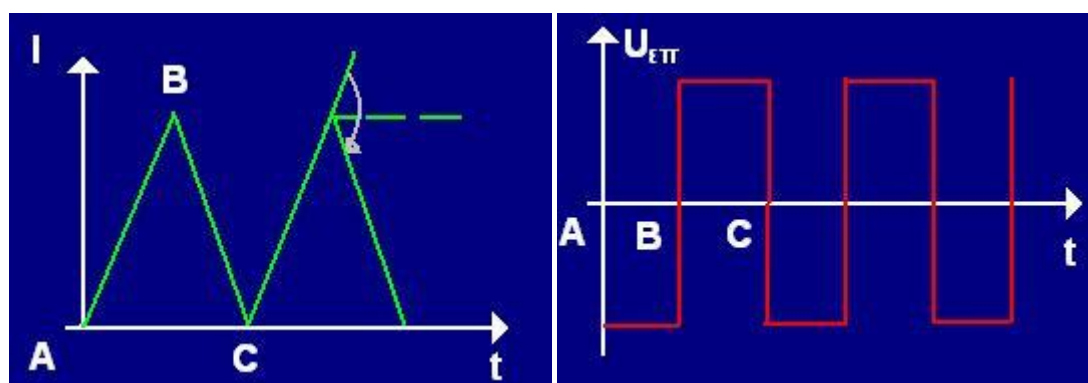
$$U_{\varepsilon\pi} = -M \frac{dI}{dt} = -MI_0 \omega \sin \omega t = MI_0 \omega \sin(\omega t - \frac{\pi}{2})$$

Από το αποτέλεσμα αυτό προκύπτουν μερικά συμπεράσματα. Το πλάτος της τάσης εξ επαγωγής είναι

$$U_{\varepsilon\pi} = M \cdot I_0 \cdot \omega \quad (13)$$

Η τάση εξ επαγωγής έχει σε σύγκριση με την ένταση του ρεύματος, από το οποίο παράγεται – μια διαφορά φάση $\Phi = \frac{\pi}{2}$, διατηρεί όμως την ημιτονοειδή μορφή.

(β) Η ένταση ρεύματος είναι συνάρτηση του χρόνου μια συνάρτηση Δ, δηλαδή



Σχ. 4

Εξετάζουμε την τάση εξ επαγωγής –σύμφωνα με τη σχέση (12)-

1. Μεταξύ των σημείων A και B ισχύει

$$U_{\varepsilon\pi}^{(AB)} = -M \frac{dI}{dt}$$

όπου $\frac{dI}{dt} = 0$ είναι σταθερή κλίση της ευθείας. Άρα

$$U_{\varepsilon\pi}^{(AB)} = -M \cdot q$$

άρα έχει αρνητική τιμή

2. Στο σημείο B η κλίση της ευθείας μεταβαίνει από $+a$ σε $-a$. Άρα $\frac{dI}{dt} = -z \cdot a$.

Άρα για την τάση προκύπτει

$$U_{\varepsilon\pi}^{(AB)} = -M(-z \cdot a) = 2M \cdot a$$

3. Μεταξύ B και C ισχύει

$$U_{\varepsilon\pi}^{(AB)} = -M \frac{dI}{dt} = -M(- \cdot a) = M \cdot a ,$$

άρα έχει θετική τιμή

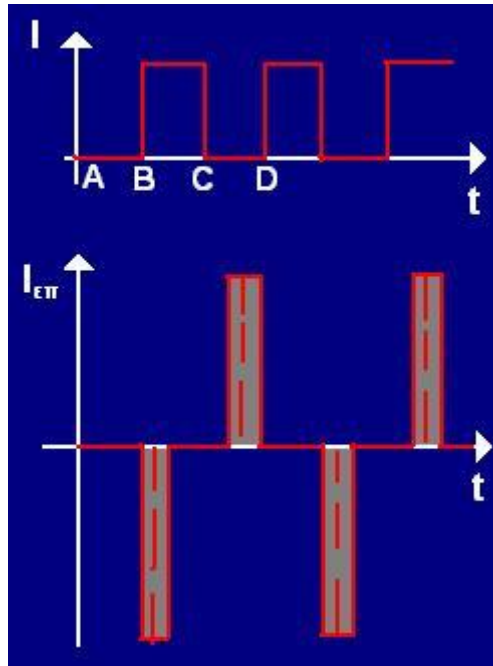
4. Στο σημείο C η κλίση της ευθείας μεταβάλλεται από $-a$ σε $+a$, άρα $\frac{dI}{dt} = +z \cdot a$

Συνεπώς η τάση εξ επαγωγής είναι

$$U_{\varepsilon\pi}^{(AB)} = -M(+z \cdot a) = -2M \cdot a$$

Και το παιχνίδι αρχίζει πάλι από την αρχή. Συνοπτικά προκύπτει μια τάση όπως στο Σχ. 4β

(c) Η ένταση του ρεύματος έχει μαιανδρική μορφή



Σχ. 5

Εξετάζοντας τα διάφορα χρονικά σημεία και διαστήματα προκύπτει

Διάστημα AB: $\frac{dI}{dt} = 0$, άρα $U_{\varepsilon\pi} = 0$

Σημείο B: $\frac{dI}{dt} = \frac{I_0}{\Delta t}$, άρα $U_{\varepsilon\pi} = -M \frac{I_0}{\Delta t}$

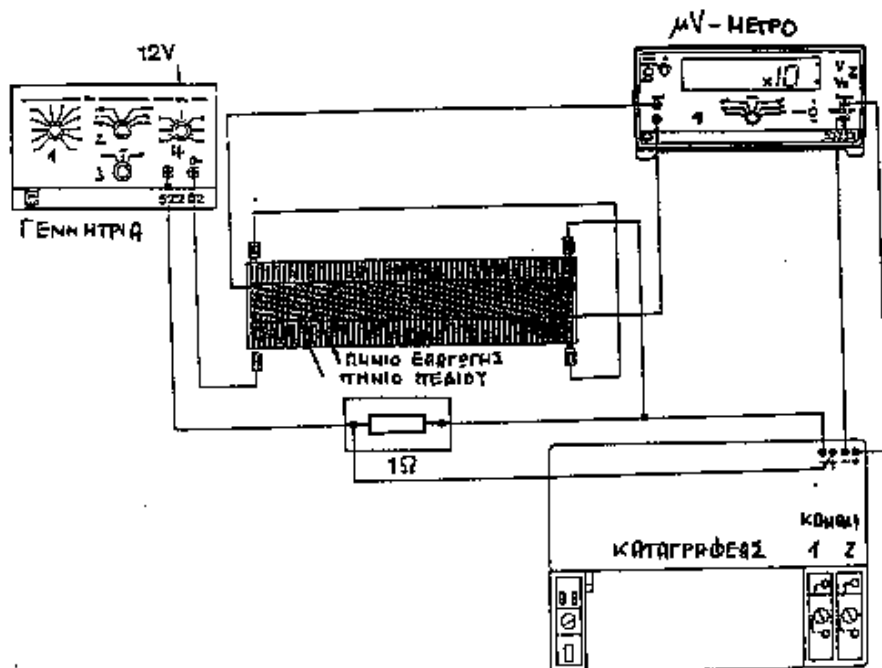
Διάστημα BC: $\frac{dI}{dt} = 0$, άρα $U_{\varepsilon\pi} = 0$

Σημείο C: $\frac{dI}{dt} = \frac{I_0}{\Delta t}$, άρα $U_{\varepsilon\pi} = +M \frac{I_0}{\Delta t}$

όπου πάντα $I_0 = \text{σταθερό}$ και $\Delta t \longrightarrow 0$, αλλά $\Delta t \neq 0$

ΠΡΑΚΤΙΚΟ ΜΕΡΟΣ

1. Διάταξη



Σχ. 6 Διάταξη του πειράματος

1.1 Αναγνώριση της διάταξης και της λειτουργικότητάς της

1.2 Σχεδιασμός της διάταξης σε μορφή απλών ηλεκτρικών κυκλωμάτων

1.3 Συνδεσμολόγηση

ΠΡΟΣΟΧΗ : Το πηνίο του πεδίου έχει δύο τυλίγματα που καταλαμβάνουν το ένα όπως και το άλλο μήκος της μπομπίνας . Τα τυλίγματα που καταλαμβάνουν το ένα όπως και το άλλο όλο το μήκος της μπομπίνας. Τα τυλίγματα αυτά συνδέονται η πρέπει να συνδεθούν σε σειρά. Δι'

αυτού επιτυγχάνεται μια γραμμική πυκνότητα σπειρών από $\frac{N}{l} = 400m^{-1}$

1.4 Ρύθμιση οργάνων

Γεννήτρια : Διακόπτης 1 στη Θέση 1 , Διακόπτης 2 στη Θέση 0,1

Δι αυτού η γεννήτρια λειτουργεί σε συχνότητα $F=0,1Hz$

Διακόπτης 3 στη θέση Δ (Δέλτα)

Διακόπτης στη Θέση 3Vs

ΜΙΚΡΟΒΟΛΤΟΜΕΤΡΟ : Διακόπτης 1 (GAIN) στη Θέση 10^4

Διακόπτης 2 στη θέση V

ΚΑΤΑΓΡΑΦΕΑΣ : ΚΑΝΑΛΙ 1 στη θέση 10V

(καταγράφει μέσω της αντίστασης 1Ω την ένταση του ρεύματος

Που διαρρέει το πηνίο του πεδίου)

ΚΑΝΑΛΙ 2 στη θέση 10V (Τάση επαγωγής)

Ταχύτητα χαρτιού : 5 mm/sec

1,5 (Ισοστάθμιση της τάσης του μV –μέτρου με τη βοήθεια του αντίστοιχου διακόπτη (Button). Έλεγχος από τους υπεύθυνους του εργαστηρίου πριν από την έναρξη της λειτουργίας και καταγραφής.

1.6 Θέση σε λειτουργία της γεννήτριας

Αύξηση με αργό ρυθμό του ρεύματος δια του πηνίου πεδίου μέχρι που οι πέννες καταγραφής των δύο καναλιών να εκτρέπονται έτσι που τα αποτελέσματα να είναι αξιοποιήσιμα. Το ρεύμα του πηνίου πεδίου δεν πρέπει να είναι παραμορφωμένο.

1.7 Κατέβασμα των πεννών και καταγραφή καταναλώνοντας όχι περισσότερο από 10cm χαρτιού STOP. Ανεβάζοντας τις πέννες και αποσυνδέοντας το καλώδιο που συνδέει τη γεννήτρια με το πηνίο πεδίου .

2. ΜΕΤΡΗΣΕΙΣ

1. Μέτρηση της επαγωγικής τάσης συναρτήσει της συχνότητας (I - Δ)

2.1.1 Επανασύνδεση της γεννήτριας και κατέβασμα των πεννών

2.1.2 Αύξηση Βήμα προς Βήμα της συχνότητας από 0,1 HZ μέχρι) 0.6 HZ

(0,1-0,2-0,3-0,4-0,5-0,6) χειρίζοντας τον διακόπτη $\wedge$ της γεννήτριας

2.1.3 STOP, ανεβάζοντας τις πέννες και αποσυνδέοντας τη γεννήτρια

2.2 Μέτρηση της επαγωγικής τάσης συναρτήσει του πλάτους της έντασης του ρεύματος του πηνίου πεδίου

2.2.1. Ρύθμιση της γεννήτριας σε συχνότητα $f=0,3$ Hz

2.2.2 Ο διακόπτης 3 της γεννήτριας διατηρείται στη Θέση Δ

2.2.3 Σύνδεση της γεννήτριας και κατέβασμα των πεννών

2.2.4 Αύξηση του ρεύματος του πηνίου πεδίου βήμα προς βήμα θέτοντας τον μεταγωγέα 4 της γεννήτριας στις θέσεις 1, 2, 3, 4, 5, 6.

2.2.5 STOP

ΠΡΟΣΟΧΗ: Η ένταση ρεύματος του πηνίου πεδίου να μην είναι παραμορφωμένη.

2.3 Μέτρηση της διαφοράς μεταξύ I και $U_{\text{επ}}$

2.3.1 Ρύθμιση της γεννήτριας σε "ημίτονο" και $f=0,3$ Hz

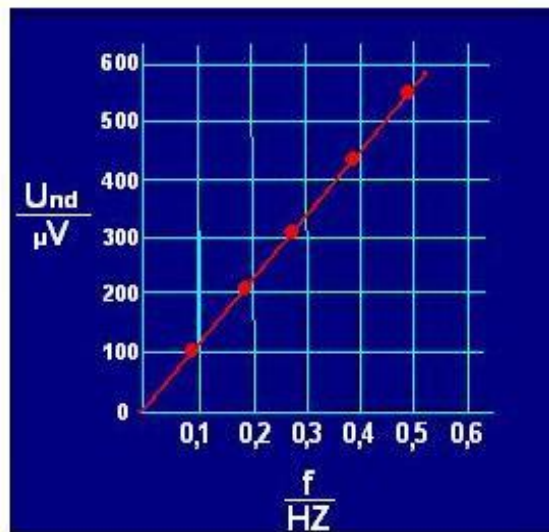
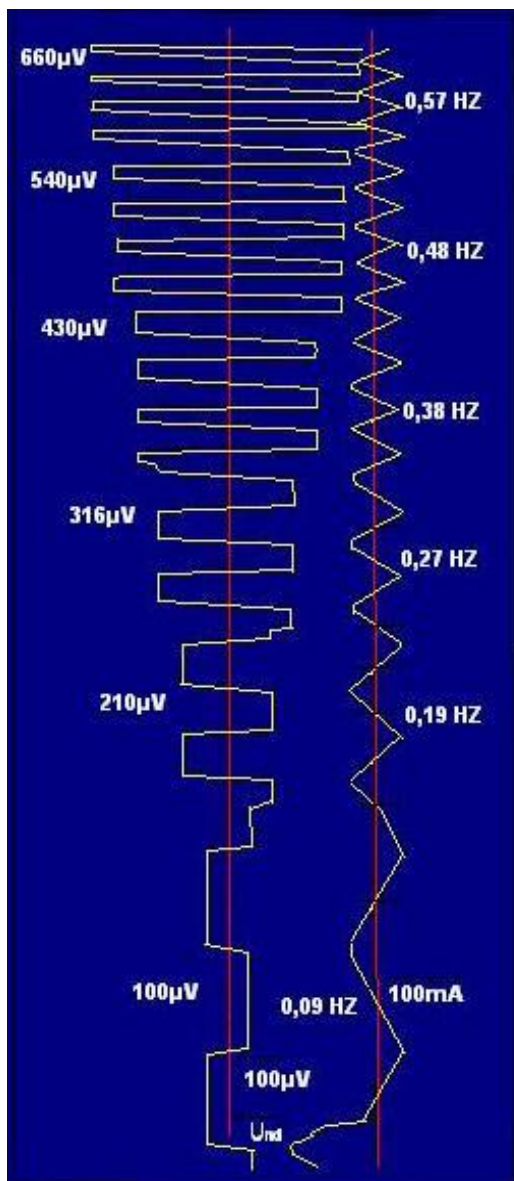
2.3.2 Βλέπε γνωστή πλέον διαδικασία

3. Αποτελέσματα των μετρήσεων και αξιολόγηση

3.1 Μέτρηση της επαγωγικής τάσης συναρτήσει της συχνότητας

Η καταγραφή της μέτρησης υπό 2.1. μας δίνει το Σχ. 7 κατασκευάζει ένα γράφημα όπου η τεταγμένη είναι το πλάτος της επαγωγικής τάσης και τετμημένη η συχνότητα. Το πλάτος και η συχνότητα υπολογίζονται μέσα από πληροφορίες που περιέχει το Σχ. 7. Δι' αυτού λαμβάνεται το Σχ. 8. Απ' αυτήν προκύπτει ότι η επαγωγική τάση εξαρτάται γραμμικά από την συχνότητα της έντασης του ρεύματος του πηνίου πεδίου

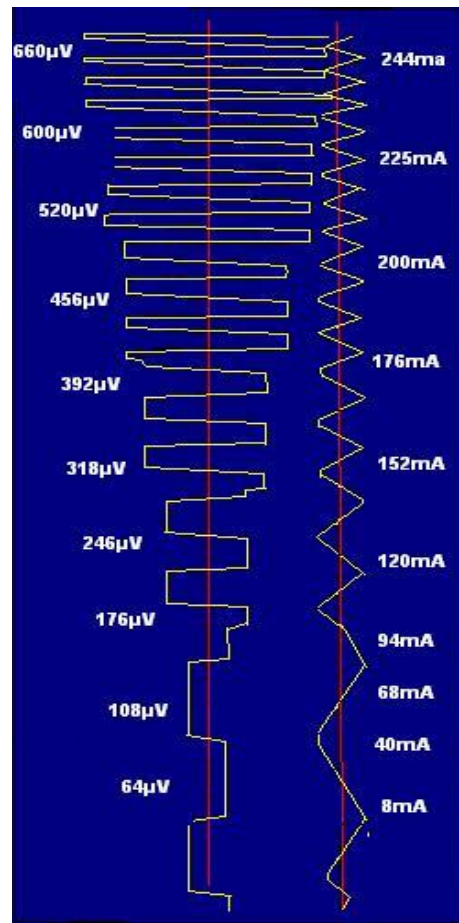
Το αποτέλεσμα αυτό ήταν αναμενόμενο (Βλ. π.χ. τις εφαρμογές στο θεωρητικό μέρος)



Σχ. 7 Επαγωγική τάση και συχνότητα (καταγραφή)

Σχ.8 Επαγωγική τάση και συχνότητα(μέσω της καταγραφής του Σχ. 7)

3.2 Μέτρηση της επαγωγικής τάσης συναρτήσει του πλάτους της I του πηνίου πεδίο



Σχ. 9 Επαγωγική τάση συναρτήσει του πλάτους του ρεύματος του πηνίου πεδίου (καταγραφή)

Το Σχ. 9 δείχνει ότι την καταγραφή των μετρήσεων του εδαφίου 2.2. όπου η επαγωγική τάση μετριέται συναρτήσει του πλάτους της έντασης του ρεύματος του πηνίου πεδίου. Με τις μετρήσεις αυτές κατασκευάζεται το γράφημα της Εικ. 10 όπου

$$U_{\varepsilon\pi} = -f(I)$$

Από το Σχ. 10 προκύπτει ότι η επαγωγική τάση εξαρτάται γραμμικά από το πλάτος I_o .

Υπό το εδάφιο 3.1 διαπιστώθηκε, ότι η επαγωγική τάση εξαρτάται γραμμικά και από τη συχνότητα της έντασης ρεύματος I .

Άρα η μέγιστη δυνατή επαγωγική τάση προκύπτει από την ταυτόχρονη μεταβολή τόσο του πλάτους του I όσο και της συχνότητας, δηλ.

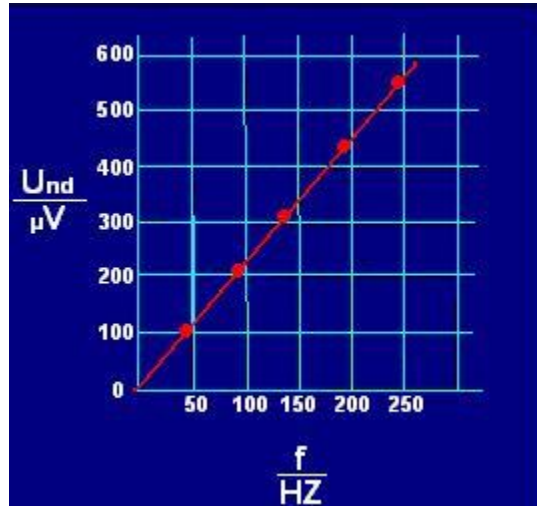
$$U_{\varepsilon\pi} = -L \frac{dI}{dt}$$

Όπου

$$I = I_0(t)$$

Συνεπώς

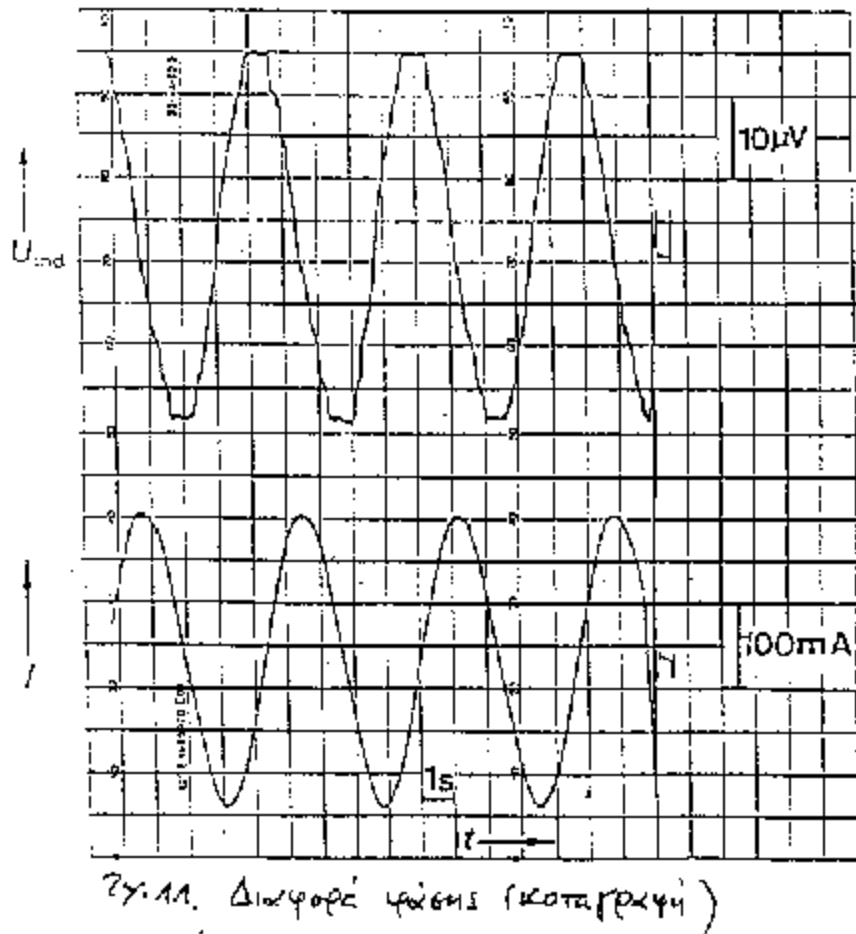
$$U_{\varepsilon\pi} = -L \left[\frac{dI}{dt} \cdot \sin \omega\tau + I_0 \omega \cos \omega\tau \right]$$



Σχ.10 Επαγωγική τάση συναρτήσει της I (μέσω της καταγραφής)

3.2 Μέτρηση της διαφοράς φάσης μεταξύ $I = I_0 \sin \omega\tau$ και $U_{\varepsilon\pi} = -L \frac{dI}{dt}$

Ήδη στο θεωρητικό μέρος εφαρμογές αποδείχτηκε η ύπαρξη μιας διαφοράς φάσης $\varphi = \pi/2$. Στο Σχ. 11 απεικονίζονται οι μετρήσεις του εδαφίου 2. 3. Η διαφορά φάσης είναι άμεσα αντιληπτή, όπου η ένταση ρεύματος ισούται με μηδέν. Εκεί η επαγωγική τάση διαπερνά το ελάχιστο ακρότατο.



Σχ. 11 Διαφορά φάσης (καταγραφή)

Σημείωση: Οι παραμορφώσεις της επαγωγικής τάσης οφείλονται στην ασυμμετρία του ημιτονοειδούς σήματος που παράγεται στη γεννήτρια συχνοτήτων .

3.4. Ο πειραματιστής που εκτελεί αυτό το πείραμα, θα καταγράψει παρόμοια αποτελέσματα με αυτά των Σχ. 7, 9 και 11. Μέσα από τις δικές του μετρήσεις οφείλει να βγάλει τα αντίστοιχα συμπεράσματα. Μόνον υπό αυτήν έννοια προστέθηκε στο ΠΡΑΚΤΙΚΟ ΜΕΡΟΣ το κεφάλαιο “Αποτελέσματα των μετρήσεων και αξιολόγηση”.

3.5 Υπολογισμός της έντασης του ρεύματος I , της συχνότητας και της επαγωγικής τάσης .

Συχνότητα:

Για τον υπολογισμό της συχνότητας μετρείται η απόσταση s , σε cm μιας περιόδου μέσα από το Σχ. 7. Γνωρίζοντας την ταχύτητα u της κίνησης του χαρτιού η συχνότητα προκύπτει από τη σχέση

$$f = \frac{1}{t} = \frac{u}{s}$$

Επαγωγική τάση:

Για την βαθμολόγηση αυτής ισχύει : $27mm \approx 100mV$

Ένταση ρεύματος:

Για την βαθμολόγηση αυτής ισχύει: $42mm \approx 100mA$

ΑΣΚΗΣΗ 10 (Η 31)

Ο ΛΟΓΟΣ e/m ΤΟΥ ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΟΥ

ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΜΕΡΟΣ

1. Το ηλεκτρόνιο σε ηλεκτρικό πεδίο

1.1 Επιτάχυνση του ηλεκτρονίου

Ένα ηλεκτρόνιο φορτίου $e = 1,6 \cdot 10^{-14} \text{ A} \cdot \text{sec}$ και μάζας $m = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$ το οποίο σε χώρο επιρροής ενός ηλεκτρικού πεδίου υφίσταται την επιρροή του. Πάνω του ασκείται η ηλεκτρική δύναμη $f = eE_x$ και του προσδίδει επιτάχυνση

$$m \cdot \frac{dU_x}{dt} = e \cdot E_x \quad (1)$$

Συνεπώς, υπό την προϋπόθεση ότι η αρχική του ταχύτητα $U_{o,x} = 0$ για την ταχύτητά του μετά από χρόνο t προκύπτει

$$U_x = \frac{e}{m} \cdot E_x \cdot t \quad (2)$$

Με $x_0 = 0$ το διάστημα που διανύεται στον ίδιο χρόνο ισχύει

$$X = \frac{1}{2} \cdot \frac{eE_m}{m} \cdot t^2 \quad (3)$$

Εξετάζοντας το πρόβλημα ενεργειακά και όχι κινηματικά –όπως παραπάνω – διαπιστώνεται, ότι ισχύει το θεώρημα μεταβολής της κινητικής ενέργειας. Η ηλεκτρική δύναμη παράγει ένα έργο το οποίο μετατρέπεται σε κινητική ενέργεια του ηλεκτρονίου. Έπεται

$$dW = d \cdot EK$$

$$F \cdot dx = d \cdot \left(\frac{m}{2} \cdot u_x^2 \right)$$

$$W = \int_0^x F_x \cdot dx = F_x \cdot x = e \cdot E_x \cdot \frac{1}{2} \frac{e \cdot E_x}{m} \cdot t^2 = \frac{1}{2} \frac{e^2 \cdot E_x^2}{m} \cdot t^2 \quad (4)$$

$$E_K = \int d \cdot \left(\frac{m}{2} \cdot u_x^2 \right) = \frac{m}{2} \cdot u_x^2 = \frac{m}{2} \cdot \frac{e^2 \cdot E_x^2}{m^2} \cdot t^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{e^2 \cdot E_x^2}{m} \cdot t^2 \quad (5)$$

Από τις σχέσεις αυτές, οι οποίες προκύπτουν, μετά χρήσης των (2) και (3) συμπεραίνεται η ορθότητα της κινηματικής και της ενεργειακής άποψης.

Μετά απαλοιφής του χρόνου t των σχέσεων (2) και (3) για το διάστημα και την ταχύτητα προκύπτει αντίστοιχα

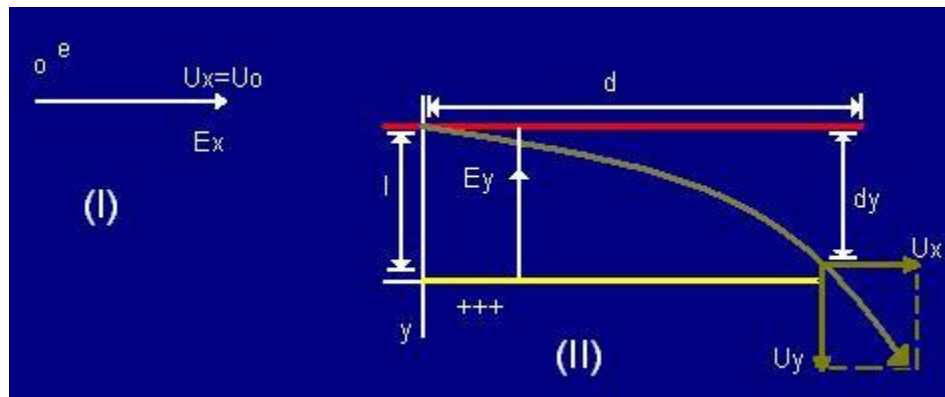
$$x = \frac{1}{2 \cdot \frac{e}{m} \cdot E_x} \cdot U_x^2$$

$$U_x^2 = 2 \cdot \frac{e}{m} \cdot E_x \cdot X, X=1, E_x = \frac{U_x}{l}$$

$$U_x^2 = 2 \cdot \frac{e}{m} \cdot U_x \cdot \frac{m}{2} \cdot U_x = eU_x$$

1.2. Εκτροπή του ηλεκτρονίου στο ηλεκτρικό πεδίο

Έστω ότι ένα ηλεκτρόνιο έχει ήδη επιταχυνθεί αποκτώντας σύμφωνα με (7) μια ταχύτητα u_x . Το ηλεκτρόνιο αφήνεται τώρα να εισχωρήσει σ' ένα δεύτερο ηλεκτρικό πεδίο E_y . Το Σχ. 1 αποσαφηνίζει την κατάσταση



Σχ. 1

Για το ηλεκτρικό πεδίο (II) ισχύουν οι εξισώσεις δυνάμεων

$$\begin{aligned} MX &= 0 & MY &= eEy \\ U_x &= U_0 & U_y &= \frac{e}{m} EyT \\ X &= U_0 T & y &= \frac{e}{m} Ey \frac{t^2}{2} \end{aligned} \quad (8)$$

Με $Ey = \frac{Uy}{t}$ και δι απαλοιφής του χρόνου από (8) προκύπτει

$$y = \frac{e}{2m} \frac{Uy}{l \cdot U_o^2} X^2 \quad (9)$$

Δίνοντας στη σχέση αυτή τη μορφή

$$y = \frac{e}{4l} \frac{Uy}{\frac{m}{2} U_o^2} X^2 = \frac{e}{4l} \frac{Uy}{E_{k,o}} X^2 \quad (9')$$

Βλέπουμε ότι η τιμή της συντεταγμένης y εξαρτάται από την αρχική κινητική ενέργεια του ηλεκτρονίου .

Στην έξοδο του πυκνωτή ισχύει $x=d$. Άρα από (9) προκύπτει

$$Y = Dy = \frac{e}{m} \frac{Uy}{2lU_o^2} d^2 \quad (10)$$

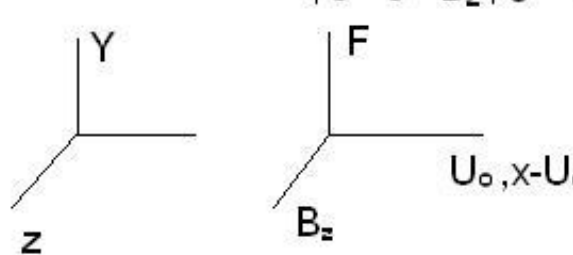
Άρα μετρώντας –κατά κάποιο τρόπο- την απόκλιση Δy και με γνωστά όλα τα άλλα μεγέθη ο υπολογισμός του λόγου $\frac{e}{m}$ είναι δυνατός

$$\frac{e}{m} = \frac{2lU_o^2}{Uy} \frac{Dy}{d^2} \quad (11)$$

Αλλά η ταχύτητα U_o του ηλεκτρονίου ως προς τον άξονα x δεν είναι γνωστή, εφόσον δεν ταυτίζεται πλήρως με την ταχύτητα $\sqrt{\frac{2eUx}{m}}$ λόγω του ότι βγαίνοντας από την κάθοδο έχει ήδη μία ταχύτητα ή κινητική ενέργεια που οφείλεται στη θέρμανση της καθόδου (Βλ. σχέση (7)).

1.3 Εκτροπή του ηλεκτρονίου στο μαγνητικό πεδίο

Ένα ηλεκτρόνιο εισβάλλει στο χώρο ενός μαγνητικού πεδίου με αρχική ταχύτητα u_o . Το μαγνητικό πεδίο έχει μόνο μία συνιστώσα ως προς τον άξονα Z . Για τη δύναμη LAPLACE ισχύει

$$\mathbf{F}_L = e \bar{\mathbf{u}} \times \bar{\mathbf{b}} = -e \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ u_x & U_y & U_z \\ 0 & 0 & B_z \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} \\ U_x & U_y \end{vmatrix} = -ieU_y B_z \mathbf{i} + jeU_x B_z \mathbf{j}$$


(η φορά της F μεταβάλλεται)

(12)

Συνεπώς για την εξίσωση δυνάμεων ισχύουν οι ισότητες

$$m \frac{Dy}{Dt} = -eB_z U_y \quad m \frac{dU_y}{Dt} = eB_z U_x \quad m \frac{dU_z}{Dt} = 0 \quad (13)$$

Η λύση της τελευταίας εξίσωσης είναι εύκολη εφόσον $\frac{Dy_z}{Dt} = 0$ η ταχύτητα U_z είναι χρονικά σταθερή. Μια και στο χρόνο $t=0$ ήταν ίση με μηδέν η τιμή της θα διατηρηθεί. Άρα $U_z=0$. Συνεπώς ως προς τον άξονα Z δεν θα υπάρξει καμία κίνηση. Η εξεύρεση λύσης των δύο άλλων εξισώσεων είναι δύσκολη, επειδή οι δύο ταχύτητες U_x, U_y είναι αλληλοεξαρτούμενες. Αλλά φυσικά υπάρχει μία λύση. Ως προς τούτο γίνεται παραγωγή της πρώτης εξίσωσης, οπότε λαμβάνεται

$$\frac{d^2 U_x}{dt^2} = -\frac{e}{m} B_t \frac{Dy_y}{Dt} \quad (14)$$

Αλλά $\frac{Dy_x}{Dt}$ είναι δεδομένο δια της δεύτερης εξίσωσης, άρα γίνεται αντικατάσταση. Έτσι από (14) προκύπτει

$$\frac{D^2 U_x}{Dt^2} = -\left(\frac{eB_z}{Dt}\right)^2 U_x^2 \quad (15)$$

Δι αυτού επιτεύχθηκε ο διαχωρισμός των μεταβλητών. Για τη λύση της (15) γίνεται η υπόθεση

$$U_x = c \cdot \cos \omega t \quad (16)$$

και άρα

$$\frac{DU_x}{dt} = -c\omega \sin \omega t \quad \frac{D^2 U_x}{dt^2} = -c\omega^2 \cos \omega t$$

Μετά αντικατάστασης στην (15) προκύπτει

$$\omega = \frac{eBz}{m} \quad (17)$$

Συνεπώς η υποθετική λύση (16) έχει λογική, απομένει όμως ακόμη ο προσδιορισμός της σταθεράς c που υπολογίζεται με την βοήθεια των οριακών συνθηκών. Για $t=0$ στη (16) προκύπτει

$$U_x = U_o = c$$

Άρα η τελική λύση είναι

$$U_x = U_o \cos \omega t \quad (18)$$

Επιστρέφοντας τώρα στη δεύτερη εξίσωση (13) η ταχύτητα U_x μπορεί να αντικατασταθεί με (18) :

$$\frac{DU_y}{dt} = \frac{eBz}{m} U_x = v U_o \omega \cos \omega t$$

Άρα

$$U_y = U_o \sin \omega t + c \quad (19)$$

Η σταθερά c υπολογίζεται από τις οριακές συνθήκες. Για $t=0$ η ταχύτητα $U_{y,0} = 0$. Άρα από (19) προκύπτει $c=0$. Δι' αυτού οι λύσεις για τις ταχύτητες –σε συνοπτική μορφή- είναι

$$U_x = U_o \cos \omega t \quad U_y = U_o \sin \omega t \quad U_z = 0 \quad (20)$$

Τώρα πια το ενδιαφέρον μας στρέφεται στις συντεταγμένες x, y, z
Από (20) δι' ολοκλήρωσης προκύπτει

$$X = \frac{U_o}{\omega} \sin \omega t + X_o \quad Y = -\frac{U_o}{\omega} \cos \omega t + y_o \quad Z = Z_o \quad (21)$$

Αυθαίρετα το σύστημα αναφοράς τοποθετείται έτσι, ώστε να ισχύουν

$$X_o = 0 \quad Y_o = \frac{U_o}{\omega} \quad Z_o = 0$$

Συνεπώς οι εξισώσεις κίνησης είναι

$$X = \frac{U_o}{\omega} \sin \omega t \quad Y = \frac{U_o}{\omega} (1 - \cos \omega t) \quad Z = 0 \quad (21')$$

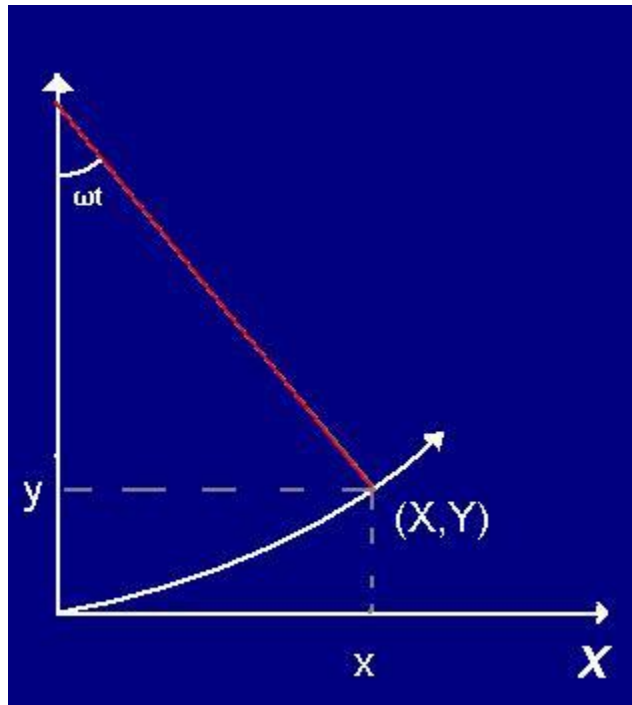
Δια τετραγωνισμού προκύπτει

$$X^2 + Y^2 = \frac{U_o^2}{\omega^2} (\sin^2 \omega t + 1 - 2 \cos \omega t + \cos^2 \omega t)$$

$$= \frac{2U_o^2}{\omega^2} (1 - \cos \omega t) = \frac{2U_o^2}{\omega^2} \frac{\omega}{U_o} Y = \frac{U_o}{\omega^2} 2Y$$

$$\frac{X^2 + Y^2}{2Y} = \frac{U_o}{\omega} \quad (22)$$

Η σχέση αυτή, είναι εξίσωση του κύκλου παρά το ότι αυτό δεν γίνεται αμέσως αντιληπτό. Το ότι είναι πράγματι έτσι, φαίνεται καθαρά από το σχήμα που ακολουθεί. Η εξήγηση ως προς τούτο είναι, ότι ο κύκλος δεν έχει το κέντρο του στο κέντρο του συστήματος αναφοράς. Τούτο είναι ως προς y μετατοπισμένο κατά R .



Από το τρίγωνο προκύπτει .

$$\begin{aligned} \sin \omega t &= \frac{x}{R} & x &= R \sin \omega t \\ R^2 &= X^2 + (R - Y)^2 & Y &= R - R \cos \omega t = R(1 - \cos \omega t) \\ X^2 + Y^2 &= R^2 (\sin^2 \omega t + 1 - 2 \cos \omega t + \cos^2 \omega t) \\ &= 2R^2 (1 - \cos \omega t) = 2R^2 \frac{Y}{R} = 2Y \cdot R = \frac{X^2 + Y^2}{2Y} = R \end{aligned} \quad (23)$$

Συγκρίνοντας με (22) διαπιστώνουμε πλήρη ταύτιση. Συνεπώς το ηλεκτρόνιο κινείται πάνω σε κυκλική τροχιά, της οποίας η ακτίνα είναι

$$R = \frac{U_o}{\omega} = \frac{U_o}{eB_z} m \quad (24)$$

Το αποτέλεσμα αυτό οδηγεί αμέσως στην ισότητα

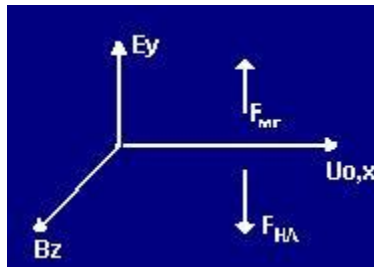
$$eBz = m \frac{U_0}{R} \Rightarrow e \cdot U_0 \cdot Bz = m \frac{U_0^2}{R} \quad (25)$$

Μεταξύ της δύναμης LAPLACE $\vec{F}_l = e\vec{U} \cdot \vec{B}$ και της κεντρομόλου δύναμης $\vec{F}_K = m\omega^2 \vec{r}$
Για την ίδια την εκτροπή ισχύει η σχέση (21) δηλαδή

$$\Delta y = Y = \frac{\omega_0}{\omega} (1 - \cos \omega t)$$

1.4 Ηλεκτρόνιο σε ηλεκτρικό και μαγνητικό πεδίο

Συνοψίζοντας τα αποτελέσματα από 1.2 και 1.3 διαπιστώνουμε, ότι οι εκτροπές αναιρούνται, εφόσον οι δυνάμεις έχουν το ίδιο μέτρο αλλά αντίθετη φορά



Επομένως ισχύει

$$\begin{aligned} F_{H\Lambda} &= F_{M\Gamma} \\ eE &= eU_0B \\ U_0 &= \frac{E}{B} \end{aligned} \quad (26)$$

Στη περίπτωση αυτή το ηλεκτρόνιο διαπερνά τα πεδία E και B . Όπου R υπολογίζεται με τη βοήθεια της σχέσης (23) και τις συντεταγμένες της τροχιάς .

ΠΡΑΚΤΙΚΟ ΜΕΡΟΣ

Αναγνώριση της διάταξης μέτρησης

1. Λυχνία εκτροπής

Η λυχνία εκτροπής αποτελείται από την κάθοδο (K) την άνοδο (A) και την πλάκα εμφάνισης της ηλεκτρονικής δέσμης με δύο ηλεκτρόδια για την εφαρμογή υψηλής τάσης. Το εσωτερικό της λυχνίας είναι αερόκενο.

Η κάθοδος αποτελείται από νήμα δύστηκτου υλικού, στα άκρα του οποίου εφαρμόζεται μία χαμηλή τάση, ώστε να διαρρέεται ρεύμα και να θερμαίνεται.

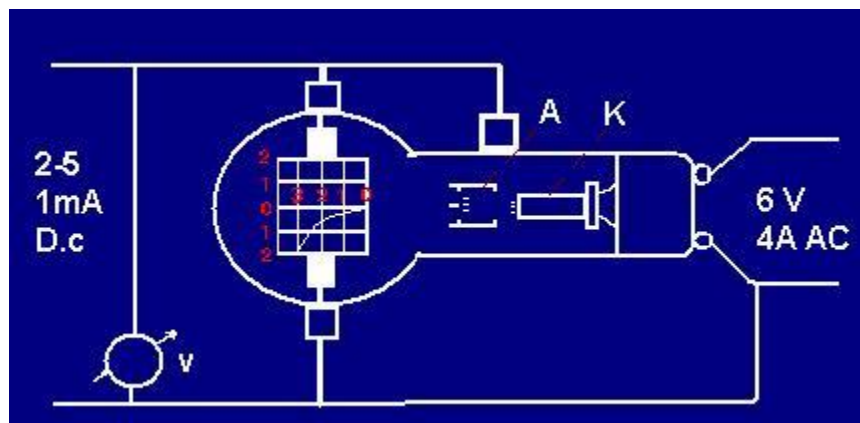
Λόγω της θέρμανσης, ορισμένα ηλεκτρόνια υπερνικούν τις δυνάμεις που τα συγκρατούν στο μέταλλο, εγκαταλείπουν το νήμα εισχωρώντας στον αερόκενο χώρο

Η άνοδος έχει υψηλό δυναμικό σε σχέση με την κάθοδο. Συνεπώς τα ηλεκτρόνια που ελευθερώνονται βρίσκονται υπό την επίδραση ενός ισχυρού ηλεκτρικού πεδίου και της αντίστοιχης ηλεκτρικής δύναμης. Δι' αυτού επιταχύνονται και αποκτούν κινητική ενέργεια, ίση με το έργο της ηλεκτρικής δύναμης.

Ακριβώς στον άξονα του γυάλινου σωλήνα η άνοδος έχει ένα μικρό άνοιγμα. Τα ηλεκτρόνια που πέφτουν στο άνοιγμα σχηματίζουν διαπερνώντας το μια λεπτή ηλεκτρονική δέσμη που πέφτει πάνω πλάκα εμφάνισης. Αυτή αποτελείται από φύλλο μίκας και έχει εκατοστομετρική διαγράμμιση. Η μίκα είναι ένα φθορίζον υλικό ώστε να γίνεται δυνατή η παρατήρηση της τροχιάς της ηλεκτρονικής δέσμης.

Εξ άλλου στις πλευρές του φύλλου μίκας, οι οποίες είναι παράλληλες προς τον άξονα της λυχνίας υπάρχουν δύο ηλεκτρόδια σε μορφή πλακών που απέχουν μεταξύ τους 5 cm. Στα ηλεκτρόδια αυτά εφαρμόζεται υψηλή τάση, σχηματίζεται δηλαδή στον ενδιάμεσο χώρο ένα υψηλό ηλεκτρικό πεδίο, είναι το πεδίο εκτροπής των ηλεκτρονίων.

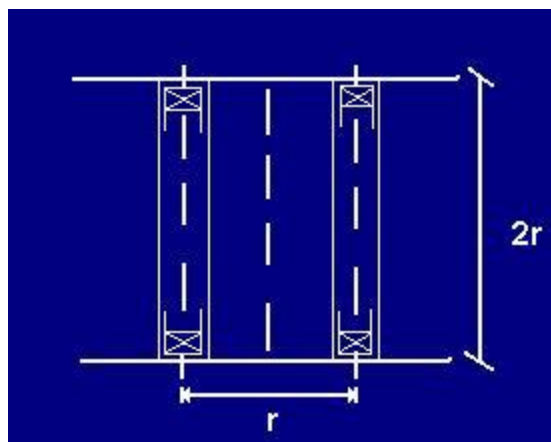
Η λυχνία εκτροπής μαζί με την συνδεσμολογία της απεικονίζεται στο Σχ. 1



Σχ. 1 λυχνία εκτροπής

1.2 Πηνία HELMHOLTZ

Η μαγνητική απόκλιση της ηλεκτρονικής δύναμης υλοποιείται με τη βοήθεια των πηνίων HELMHOLTZ, τα οποία συνδέονται σε σειρά και εφάπτονται στη γυάλινη σφαίρα της λυχνίας (Σχ. 2)



Σχ. 2 Πηνία Helmholtz

Η μαγνητική επαγωγή στο κέντρο της σφαίρας είναι

$$B = \frac{32\pi}{5\sqrt{5}r} 10^{-7} I \quad [B] = T \quad (28)$$

Όπου $n=320$ είναι ο αριθμός των σπειρών κάθε πηνίου

$$r = 6,810^{-2} m$$

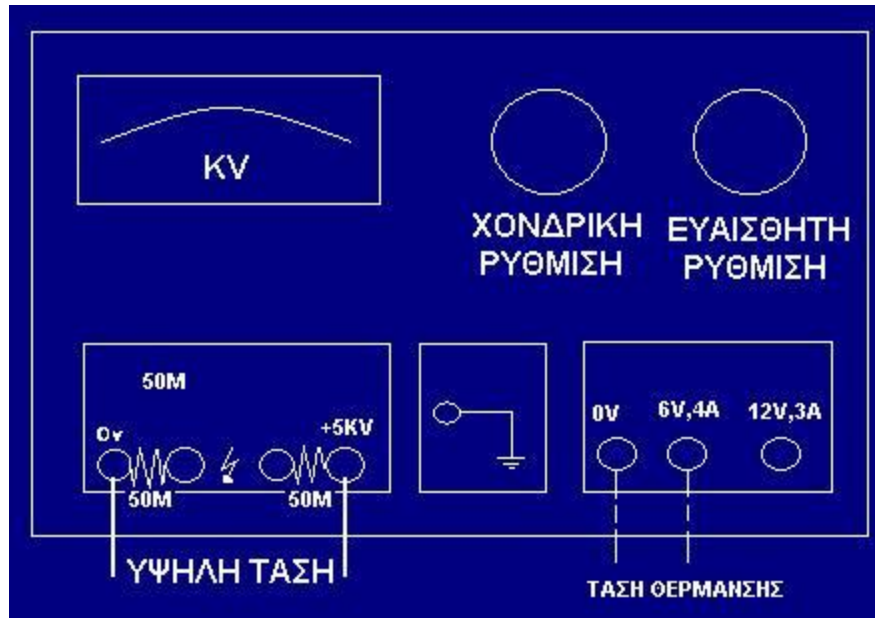
I - η ένταση του ρεύματος σε A $I \ll 1A$
έτσι προκύπτει

$$B = 4,35 \cdot 10^{-3} I \quad (28')$$

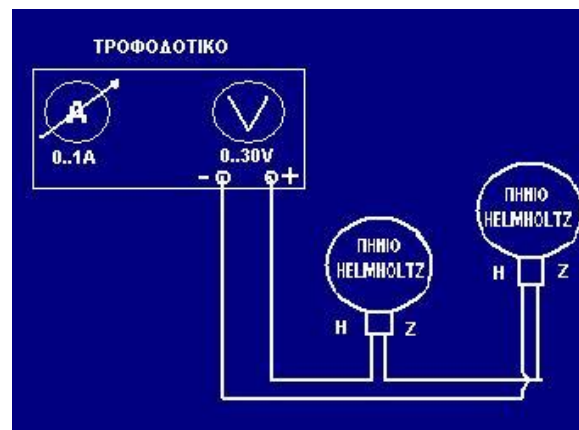
1.3 Κυκλώματα

1.3.1. Κύκλωμα υψηλής τάσης

Το κύκλωμα υψηλής τάσης ήδη αναφέρεται στο Σχ. 1. Κάτω από τις συγκεκριμένες συνθήκες ισχύει:



1.3.2 Κύκλωμα χαμηλής τάσης



1.4 Μετρήσεις

A. Μέτρηση της έντασης E και της επαγωγής B .

1. Ρύθμιση της υψηλής τάσης σε $u=2.5 \text{ KV}$ και παρατήρηση της τροχιάς της ηλεκτρονικής δέσμης .
2. Κλείσιμο διακόπτη του τροφοδοτικού χαμηλής τάσης .
Ρύθμιση του διακόπτη ρεύματος έτσι ώστε η τροχιά των ηλεκτρονίων να είναι ευθεία και να διαπερνά το σημείο 1 ο του φύλλου μίκας .
3. Υπολογισμός της έντασης του ηλεκτρικού πεδίου σε $L = 5 \cdot 10^{-2}$

Από τη σχέση $E = K / L$

Και της μαγνητικής επαγωγής με I σε A από τη σχέση

$$B[T] = 4.35 \cdot 10^{-3} I$$

4. Επανάληψη των χειρισμών A/1 μέχρι A/3 για όλες τις τιμές υψηλής τάσης σύμφωνα με τον πίνακα Π 1

U/V	E V/M	I/A	B/T	B^2 / T^2	X/M	Y/M	R/M	$\frac{B^2 R}{T^2 M}$
2500								
3000								
3500								
4000								
4500								
5000								

5. Αποσύνδεση της υψηλής τάσης

B. Μέτρηση γεωμετρικών χαρακτηριστικών

1. Επανασύνδεση της λυχνίας εκτροπής με υψηλή τάση, αλλά μόνο για την τάση επιτάχυνσης. το ηλεκτρόδιο υψηλής τάσης της μίκας μένει αποσυνδεδεμένο .

2. Ρύθμιση των ιδίων τιμών ζευγών τιμών για την υψηλή τάση και την ένταση ρεύματος όπως και στο εδάφιο A, δηλαδή αυτών των τιμών που έχουν καταγραφεί στον παραπάνω πίνακα.

Δι αυτού παρατηρείται η κίνηση των ηλεκτρονίων κάτω από την επίδραση μόνο του μαγνητικού πεδίου.

3. Καταχώρηση των τιμών x και y ενός σημείου της τροχιάς στον παραπάνω πίνακα.

4. Διακοπή των κυκλωμάτων

5. Υπολογισμός της ακτίνας $R = (X^2 + Y^2) / 2Y$

6. Συμπλήρωση του πίνακα και υπολογισμός του λόγου

$$E / M = \frac{E}{B^2 R}$$

Για τις διάφορες περιπτώσεις .

7. Υπολογισμός της μέσης τιμής του λόγου

$$\overline{E / M} = \frac{1}{N} \sum_{I=1}^6 (E / M)_I$$

8. Το φορτίο του ηλεκτρονίου είναι $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ V. Να βρεθεί η μέση τιμή της μάζας m

$$\bar{m} = \frac{1}{n} \sum_{I=1}^6 \frac{E}{(E/M)_I} = \frac{E}{n} \sum_{I=1}^6 \frac{1}{(e/m)} = \frac{e}{n} \sum_{i=1}^n \left(\frac{M}{E}\right)_i$$

9. Κατασκευή του γραφήματος $E = f(B^2 R)$ και υπολογισμός του λόγου e/m από την κλίση της ευθείας .

10. Σύγκριση του αποτελέσματος του εδαφίου 9 με το αποτέλεσμα του εδαφίου 7 και με τη βιβλιογραφία.

Το γραπτό της άσκησης ολοκληρώνεται και παραδίδεται με το πέρας του χρόνου διάρκειας του εργαστηρίου

ΑΣΚΗΣΗ 11 (Η 32)

ΜΕΤΡΗΣΗ ΤΗΣ ΕΝΤΑΣΗΣ ΜΑΓΝΗΤΙΚΟΥ ΠΕΔΙΟΥ ΕΝΟΣ ΖΕΥΓΟΥΣ ΠΗΝΙΩΝ (ΠΗΝΙΑ HELMHOLTZ) ΚΑΤΑ ΜΗΚΟΣ ΤΟΥ ΑΞΟΝΑ.

I. Θεωρητική μελέτη

Η ένταση του μαγνητικού πεδίου $\vec{H}$ και η πυκνότητα μαγνητικής ροής B συνδέονται μεταξύ τους διά της σχέσης

$$B = \mu \vec{H} \quad \text{με} \quad [H] = \frac{A}{m} \quad \text{και} \quad [B] = \frac{Vs}{m^2} = T \quad (1)$$

Το μέγεθος μ ονομάζεται διαπερατότητα. Για τούτην ισχύει

$$\mu = \mu_r \cdot \mu_0$$

$$\mu_r = \text{ΣΧΕΤΙΚΗ_ΔΙΑΠΕΡΑΤΟΤΗΤΑ}$$

$$\mu_0 = 4\pi 10^{-7} \frac{Vs}{Am}, \text{ΜΑΓΝΗΤΙΚΗ_ΣΤΑΘΕΡΟΤΗΤΑ_ΠΕΔΙΟΥ}$$

Ο προσδιορισμός των μεγεθών $\vec{H}$ και $\vec{B}$ για οποιεσδήποτε γεωμετρικές διατάξεις αφετηρία έχει το διανυσματικό δυναμικό

$$\vec{A} = \frac{\mu}{4\pi} \int \vec{J} \frac{dV}{r} \quad \text{με} \quad J = \text{πυκνότητα ρεύματος} \quad [\vec{J}] = \frac{A}{m^2} \quad (2)$$

Τούτο συνδέεται με τη πυκνότητα μαγνητικής ροής B δια της σχέσης

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} \quad (3)$$

Από τη σχέση αυτή έπεται ότι $[A] = \frac{Vs}{Ui}$. Η σχέση (2) είναι ο ως επί το πλείστον χρησιμοποιούμενος ορισμός του διανυσματικού δυναμικού. Ένα μεγάλο πλήθος φυσικών χρησιμοποιεί όμως αντί του (2) τον ορισμό

$$\vec{A} = \frac{1}{4\pi} \int \vec{J} \frac{dN}{r}$$

και επομένως

$$H = \vec{V} \cdot \vec{A}, [\vec{A}] = A \quad (2')(3)$$

Ο καθένας από αυτούς τους ορισμούς είναι φορέας πλεονεκτημάτων, τα οποία δεν θα αναλυθούν στο υπό ανάγνωση σύγγραμμα. Ανεξάρτητα από τον ορισμό του διανυσματικού το αποτέλεσμα είναι το ίδιο και καλείται νόμος των Biot-Savart

$$\vec{DH} = \frac{I}{4\pi r^2} d\vec{s} \times \frac{\vec{r}}{r} \quad \text{είτε} \quad DH = \frac{I}{4\pi r^2} \sin \alpha ds \quad (4)$$

$$\vec{DB} = \frac{\mu I}{4\pi r^2} d\vec{s} \times \frac{\vec{r}}{r} \quad \text{είτε} \quad dB = \frac{\mu I}{4\pi r^2} \sin \alpha ds \quad (4')$$

Ο νόμος των Biot και Savart δίνει τη δυνατότητα υπολογισμού μαγνητικών πεδίων που προκαλούνται από ευθύγραμμους ρευματοφόρους αγωγούς, χωρίς νωρίτερα να είναι απαραίτητος ο προσδιορισμός του διανυσματικού δυναμικού.

Παρατηρήσεις

Το μέγεθος B , η πυκνότητα μαγνητικής ροής, οφείλει αυτή τη σύγχρονη ονομασία στον ίδιο ορισμό της:

$$\Phi = \int \vec{B} d\vec{S} \Rightarrow B = d\Phi / dS$$

Η παλαιά ονομασία στη μαγνητική επαγωγή δεν συνηθίζεται πια, επειδή συνοδεύεται από πολλές συγχύσεις

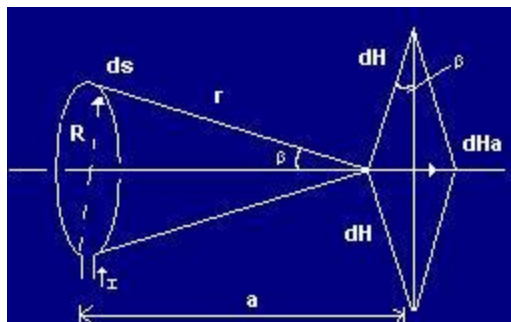
Ο σπουδαστής οφείλει να γνωρίζει

* Το νόμο των Biot και Savart (ας ανοίξει τη φυσική της μέσης εκπαίδευσης)

* Τις σχέσεις (2) και (3) είτε (2') και (3') παρότι δεν τις κατανοεί (θα τις καταλάβει στο 3^ο εξάμηνο, δεν μπορεί να τις αποφύγει στο 6^ο εξάμηνο)

Μαγνητικό πεδίο επίπεδης κυκλικής σπείρας

Έστω ότι η σπείρα έχει ακτίνα R . Το ζητούμενο είναι η ένταση του πεδίου στον άξονα του κυκλικού ρεύματος (Σχήμα 1)



Σχήμα 1: Προσδιορισμός του μαγνητικού πεδίου και κυκλικού ρεύματος.

Η λύση του προβλήματος είναι πάρα πολύ απλή, επειδή π.χ./ η σχέση (4) που αναφέρεται στο μέτρο της έντασης του μαγνητικού πεδίου μπορεί, λόγω της συμμετρίας να ολοκληρωθεί αμέσως. Επειδή για όλα τα σημεία πάνω στον άξονα ισχύει $\sin\alpha=1$ (γιατί ;), από (4) προκύπτει

$$dH = \frac{I}{4\pi r^2} dS$$

Η αξονική συνιστώσα dHa είναι σύμφωνα με το Σχήμα 1

$$dHa = dH \sin \beta = dH \frac{r}{R}$$

Συνιστώσες οι οποίες είναι κάθετες στον άξονα (α) εξουδετερώνονται μεταξύ τους άρα απομένει

$$Ha = \frac{I}{4\pi} \int \frac{ds}{r^2} \sin \beta = \frac{I}{4\pi} \int \frac{R}{r^3} ds = \frac{I}{4\pi} \frac{R}{r^3} \int ds = \frac{I}{4\pi r^3} R \cdot 2\pi r = \frac{I}{2} \frac{R^2}{r^3}$$

και με $r^2 = a^2 + R^2$

$$Ha = \frac{I}{2} \frac{R^2}{(a^2 + R^2)^{3/2}} \Rightarrow Ba = \mu H a \quad (5)$$

Μαγνητικό πεδίο επιπέδου κυκλικού πηνίου

Επί της μιας σπείρας εξετάζεται τώρα ένα πηνίο με N σπείρες. Οι σπείρες αυτές έστω ότι καταλαμβάνουν διαμετρικό διάστημα από $\Delta R \ll R$ και ως προς τον άξονα διάστημα από $\Delta a \ll a$ (και $\Delta a \ll R$)

Κάτω από αυτές τις προϋποθέσεις, για το μαγνητικό πεδίο προκύπτει από

$$Ha = N \frac{I}{z} \frac{R^2}{(a^2 + R^2)^{3/2}} \Rightarrow Ba = \mu N \frac{I}{Z} \frac{R^2}{(a^2 + R^2)^{3/2}} \quad (6)$$

$$Ha = \frac{N \cdot I}{2R} \Rightarrow Ba = \mu \frac{NI}{2R}$$

Όταν $a=0$ τότε ισχύει αντίστοιχα.

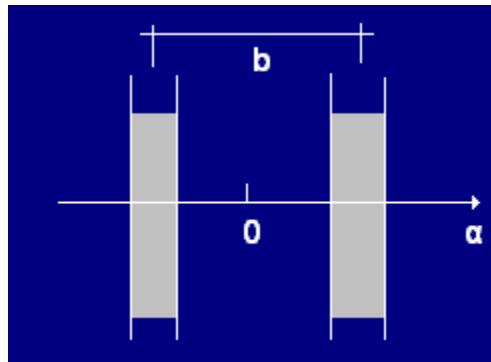
$$Ha = \frac{N \cdot I}{2R} \Rightarrow Ba = \mu \frac{NI}{2R} \quad (7)$$

Όταν $a \gg R$ τότε προκύπτει αντίστοιχα

$$Ha = \frac{I}{2} \Rightarrow Ba = \mu \frac{R^2}{a^3}$$

Μαγνητικό πεδίο μιας διάταξης από δύο επίπεδα κυκλικά πηνία

Αντί του ενός πηνίου εξετάζεται τώρα μια διάταξη από δύο παράλληλα, ομοαξονικά κυκλικά πηνία, τα οποία συνδεδεμένα σε σειρά διαρρέονται από το ίδιο ρεύμα και τα οποία έχουν τον ίδιο αριθμό σπειρών. Έστω ότι η απόσταση μεταξύ των δύο πηνίων είναι b (σχήμα 2), η δε απόσταση b μετρείται από το κέντρο



Σχήμα 2 Μαγνητικό πεδίο πάνω στον άξονα ενός ζεύγους πηνίων (πηνία Helmholtz)

Στη περίπτωση αυτή τα μαγνητικά πεδία των δύο πηνίων αθροίζονται σε κάθε σημείο του χώρου, άρα και στα σημεία του χώρου που κείνται πάνω στον άξονα. Η πυκνότητα της μαγνητικής ροής για τα σημεία πάνω στον άξονα είναι σύμφωνα με (6)

$$Ba = \mu \frac{NI R^2}{2} \left\{ \frac{1}{[R^2 + (a - \frac{b}{2})^2]^{3/2}} + \frac{1}{[R^2 + (a + \frac{b}{2})^2]^{3/2}} \right\} \quad (9)$$

$$\text{Είτε} \quad Ba = \mu \frac{NIR^2}{2} \left\{ \frac{1}{[R^2 + (a - \frac{b}{2})^2]^{3/2}} + \frac{1}{[R^2 + (a + \frac{b}{2})^2]^{3/2}} \right\} \quad (9')$$

Για $b=R$ η πυκνότητα της μαγνητικής ροής μεταξύ των πηνίων είναι σχεδόν σταθερή. Το ομογενές πεδίο καταλαμβάνει το χώρο από $-R/2 < a < R/2$

II. Πειραματική διάταξη

* Οι συσκευές διατάσσονται στο χώρο σύμφωνα με το Σχήμα 3. Η ακτίνα των πηνίων είναι $R=6.8\text{ cm}$

* Τα πηνία συνδέονται σε σειρά. Η τάση τροφοδοσίας ρυθμίζεται έτσι, ώστε το ρεύμα να είναι περίπου $I=1\text{ A}$

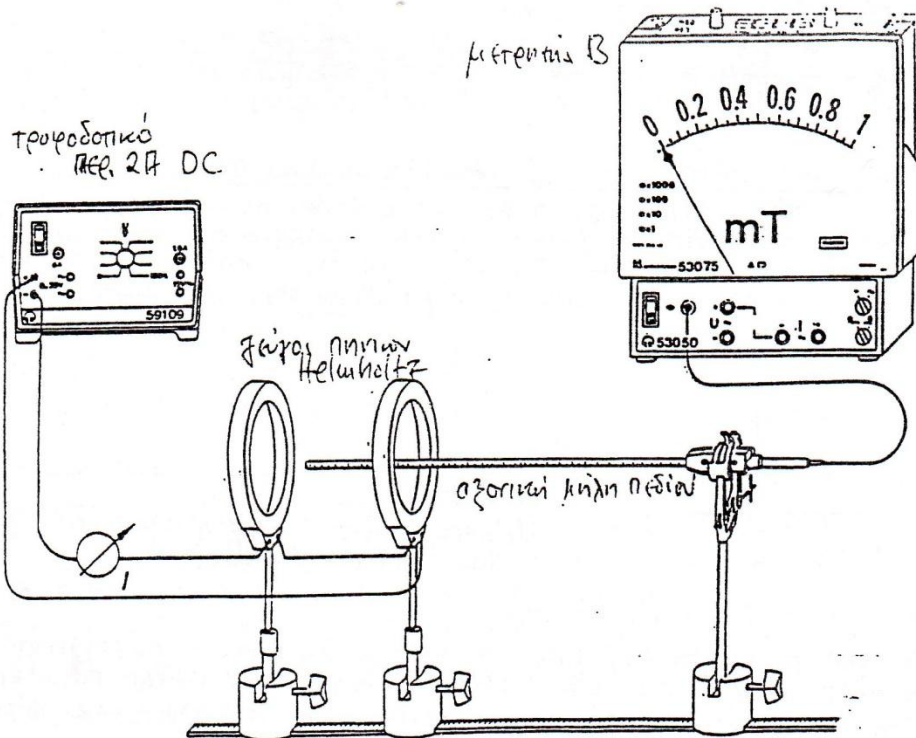
Προσοχή ! Μέγιστο επιτρεπόμενο ρεύμα στα πηνία $I_{max}=1.5\text{ A}$

* Η μύτη της αξονικής μήλης πεδίου τοποθετείται στο κέντρο μεταξύ των δύο πηνίων . Το κέντρο αυτό είναι το σημείο του μηδενός του άξονα a (Σχήμα 2)

* Το πεδιόμετρο για β και η αξονική μήλη πεδίου βαθμονομούνται

Με τη βοήθεια του πηνίου καλιμπραρίσματος

(βλέπε: Ειδικές οδηγίες χρήσης, συμβουλέψου τον υπεύθυνο τεχνικό του εργαστηρίου).



Σχήμα 3. Πειραματική διάταξη για τη μέτρηση του μαγνητικού πεδίου

III. Μετρήσεις

Η αξονική μήλη πεδίου τοποθετείται στον άξονα των δύο πηνίων.

a) Απόσταση β : ελάχιστη δυνατή

* Μέτρηση της B για $\alpha = C \dots 12$ cm σε βήματα που καθορίζονται από

Τον πειραματιζόμενο σπουδαστή (π.χ. 5 mm είτε 10 mm)

* Κατασκευή πίνακα τιμών μέτρησης.

* Κατασκευή γραφήματος σχήμα 4 στο σχήμα 4

b) Απόσταση $b=R$

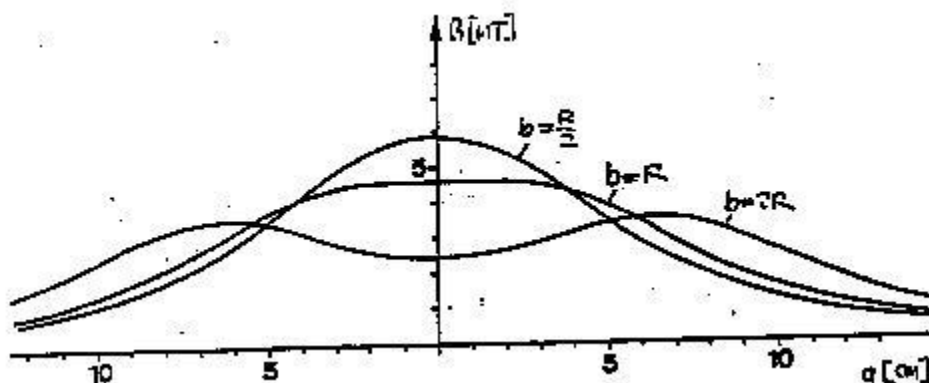
Η διαδικασία επαναλαμβάνεται (όπως στο εδάφιο α)

c) Απόσταση $b=2R$

Η διαδικασία επαναλαμβάνεται (όπως στο εδάφιο α)

Παρατηρήσεις

- * Το τεσλάμετρο πρέπει να ρυθμιστεί σε κατάλληλη περιοχή μέτρησης
- * Για τον τρόπο μέτρησης της απόστασης αν δεν χρειάζεται η σύμφωνη γνώμη του τεχνικού υπεύθυνου του εργαστηρίου, ούτε οι υποδείξεις του .



Σχ. 4 πυκνότητα μαγνητικής ροής β στον άξονα ζεύγους πηνίου Helmholtz

IV. Αξιολόγηση των μετρήσεων

A) Προσδιορισμός του χώρου με ομογενές πεδίο ($\Delta B/B < 0.1$) στις περιπτώσεις μέτρησης

α1) Ελάχιστο δυνατό b

α2) $b=R$

α3) $b=2R$

και σύγκριση με τις αντίστοιχες τιμές μέτρησης

(Σύγκριση σημαίνει υπολογισμό της απόκλισης της μίας από την άλλη τιμή)

B) Υπολογισμός της B σε $N=320$ στις περιπτώσεις μέτρησης

α1) Ελάχιστο δυνατό b

α2) $b=R$

α3) $b=2R$

και σύγκριση με τις αντίστοιχες τιμές μέτρησης

(Σύγκριση σημαίνει υπολογισμό της απόκλισης της μίας από την άλλη τιμή)

ΑΣΚΗΣΗ 12 (Η 29)

ΘΕΡΜΟΤΗΤΑ JOULE

1. Θερμική ενέργεια

Η θερμότητα μπορεί να είναι επιθυμητή π.χ. σε σώματα θέρμανσης. Αλλά μπορεί να είναι και ανεπιθύμητη, π.χ. στους κινητήρες ή στους μετασχηματιστές.

1.1 Θερμότητα και θερμοχωρητικότητα

Η θερμότητα είναι η κατά τη θέρμανση προσαγόμενη θερμική ενέργεια ή η κατά τη ψύξη απολαμβανόμενη θερμική ενέργεια. Μονάδα μέτρησης της θερμότητας είναι το JOULE : $1J = 1W.sec$. Για μεγάλες ενέργειες χρησιμοποιείται και η κιλοβατώρα (KWh)

Μία παλιά μονάδα μέτρησης είναι η θερμίδα (cal) ή η χιλιοθερμίδα (Kcal), η οποία-παρότι δεν προβλέπεται στο σύστημα SI –χρησιμοποιείται ευρέως. Η σχέση μετατροπής από την παλιά στη καινούργια μονάδα είναι

$$1J=0.239 \text{ cal ή } 1 \text{ cal}=4.197J$$

Η σχέση αυτή είναι το λεγόμενο θερμοηλεκτρικό ισοδύναμο, το οποίο είναι πλέον άνευ περιεχομένου λόγω κατάργησης της θερμίδας (cal).

Κατά τη θέρμανση ενός σώματος, στο σώμα προσδίδεται ενέργεια την οποία αποθηκεύει. Κάθε σώμα π.χ. μία μεταλλική πλάκα έχει λοιπόν μία αποθηκευτική ικανότητα για θερμότητα. Η αποθηκεύσιμη θερμότητα ανά μονάδα θερμοκρασίας ονομάζεται θερμοχωρητικότητα της οποίας η μονάδα μέτρησης είναι $J/^{\circ}K$ (Joule ανά βαθμό Kelvin). Δηλαδή ισχύει

$$C=Q/\Delta\theta \quad (1)$$

Όπου Q η θερμότητα, C η Θερμοχωρητικότητα και $\Delta\theta$ η διαφορά θερμοκρασίας.

Με τη Θερμοχωρητικότητα άμεσα σχετίζεται ένα άλλο μέγεθος, η ειδική θερμοχωρητικότητα. Αυτή αναφέρεται σε εκείνη τη θερμότητα η οποία είναι απαραίτητη, ώστε η μονάδα μάζας (1 Kg) ενός υλικού να θερμανθεί κατά μία μονάδα θερμοκρασίας ($1^{\circ}K$). Επομένως ισχύει

$$C=C/m \quad \text{και} \quad Q=mc\Delta\theta \quad (2)$$

Η σχέση αυτή σημαίνει, ότι η θερμική ενέργεια που είναι απαραίτητη για την θέρμανση του υλικού, ή η Θερμική ενέργεια που ελευθερώνεται κατά τη ψύξη του υλικού εξαρτάται από την ειδική θερμοχωρητικότητα και από τη μάζα του υλικού. Η μονάδα μέτρησης της ειδικής θερμοχωρητικότητας είναι $[c]=KJ/(Kg^{\circ}K)$

Το νερό είναι πολύ κατάλληλο για την ψύξη αλλά και για την αποθήκευση της θερμικής ενέργειας, επειδή η ειδική θερμοχωρητικότητά του είναι ιδιαίτερα μεγάλη και ίση με $4.19 \text{ KJ}/(\text{Kg} \cdot ^\circ\text{K})$ ή $4.19 \text{ J}/(\text{g} \cdot ^\circ\text{K})$. Παλαιά $c=1 \text{ Kcal}/(\text{Kg} \cdot \text{grad})$ ή $c=1 \text{ cal}/(\text{g} \cdot \text{grad})$

Επιγραμματικά αναφέρονται οι ειδικές θερμοχωρητικότητες μερικών υλικών:

Al : $c=0,92$, Cu: $c=0,39$, Χάλυβας: $c=0,48$, PVC: $c=0.88$, πάντοτε σε $\text{KJ}/(\text{Kg} \cdot ^\circ\text{K})$

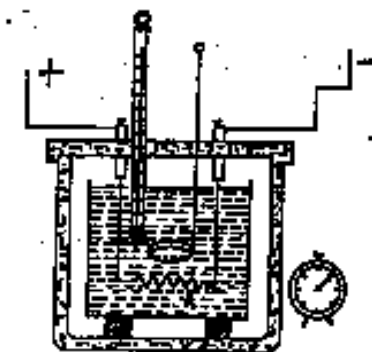
Για την ισχύ από (2) προκύπτει

$$P = \frac{dQ}{dt} = me \frac{\Delta\theta}{\Delta\tau} \quad (3)$$

2. Θερμιδομετρία

Η σχέση (1) ονομάζεται Εξίσωση της θερμιδομετρίας, εφόσον με γνωστή θερμοχωρητικότητα και μετά από μέτρηση της διαφοράς της θερμοκρασίας επιτρέπει τη μέτρηση της θερμότητας, δηλαδή της θερμικής ενέργειας. Η ονομασία θυμίζει αμέσως τη παλιά μονάδα μέτρησης την θερμίδα.

Οι συσκευές μέτρησης των ποσοτήτων θερμότητας φέρουν την συνοπτική ονομασία Θερμιδόμετρα.



Σχ. 1 Θερμιδόμετρο ανάμειξης

Στο Σχ. 1 απεικονίζεται η πιο απλή μορφή ενός θερμιδόμετρου, του θερμιδόμετρου ανάμειξης. Το αυτό καθαυτό δοχείο θερμιδομέτρησης είναι το εσωτερικό δοχείο, το οποίο περιέχει το νερό θέρμανσης, το θερμιδόμετρο και τον αναδευτήρα. Το δοχείο, αυτό βρίσκεται εντός ενός μεγαλύτερου δοχείου και χωρίζεται από το δεύτερο με κομμάτια φελλού και με μανδύα αέρα. Το εξωτερικό δοχείο έχει διπλό τοίχωμα. Δι' αυτού η θερμιδομετρική διάταξη προστατεύεται από τυχόν διακυμάνσεις της θερμοκρασίας του περιβάλλοντος.

Αναπάντητο έχει μείνει ακόμη το πρόβλημα της θερμικής πηγής ή της ενεργειακής πηγής, της οποίας όλη η ενέργεια μεταδίδεται το νερό και εκφράζεται έμμεσα από τη σχέση (2). Σύμφωνα με την Αρχή Διατήρησης της Ενέργειας πρέπει να ισχύει

Ενέργεια που παράγει η πηγή = Ενέργεια που απορροφά το νερό

$$W_{\pi\eta\gamma\eta\sigma} = e\Delta\theta$$

Και αλλιώς: Η ισχύς της πηγής πρέπει να ισούται με την ισχύ του αποδέκτη, δηλαδή του νερού.
Αρα ισχύει

$$P_{\pi\eta\gamma\eta\sigma} = mc\Delta\theta / \Delta\tau = P_{\alpha\pi\omicron\delta\epsilon\kappa\tau\eta}$$

2. Ηλεκτρική Ενέργεια

Ως γνωστόν η ηλεκτρική ισχύς είναι

$$P = U \cdot I \quad (6)$$

Η σχέση αυτή ισχύει οπωσδήποτε για συνεχές ρεύμα. Σε εναλλασσόμενο ρεύμα η σχέση (6) μπορεί να χρησιμοποιηθεί σε θερμαντικές συσκευές στις οποίες υπάρχουν μόνο ωμικές αντιστάσεις. Στην περίπτωση αυτή με U, I εννοούνται οι αντίστοιχες ενεργές τιμές του εναλλασσόμενου ρεύματος. Αρα ισχύει

$$P = U_{ev} \cdot I_{ev} \quad (6')$$

Οι παραπάνω σχέσεις δεν μπορούν να εφαρμοστούν με τίποτα σε τριφασικό ρεύμα.

Αν στη σχέση (6) -σύμφωνα με το νόμο του OHM – αντί της τάσης U τεθεί $R \cdot I$, τότε προκύπτει

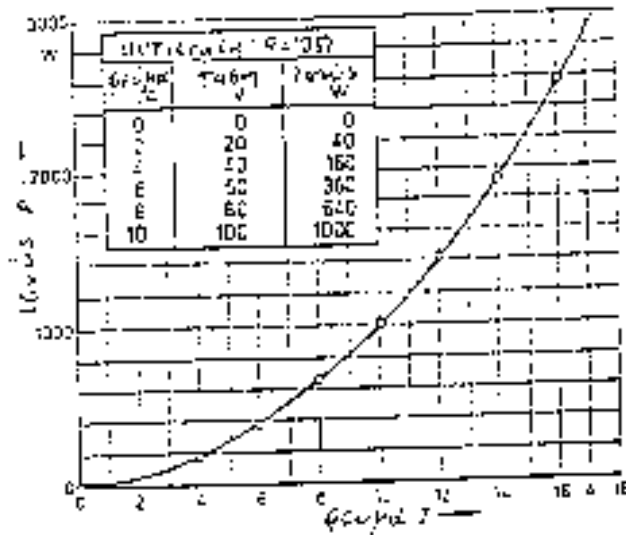
$$P = R \cdot I^2 \quad (7)$$

Αυτό σημαίνει ότι σε ένα αποδέκτη σταθερής αντίστασης η ισχύς αυξάνει το τετράγωνο της έντασης του ρεύματος, δηλαδή σε π.χ. ένταση ρεύματος η ισχύς γίνεται εννιά (9) φορές μεγαλύτερη.

Αν στη θέση (6) αντί I τεθεί U/R , τότε προκύπτει

$$P = U^2 \cdot R \quad (8)$$

Αρα σε τριπλή τάση η ισχύς γίνεται εννιά (9) φορές μεγαλύτερη, όπως και στην περίπτωση του ρεύματος. Συνεπώς ο υπολογισμός της ισχύος είναι δυνατός εφόσον γνωστά είναι τα μεγέθη αντίσταση και τάση. Το Σχ. 2 αναφέρεται στην πρώτη περίπτωση, προκύπτει δε, ότι η συνάρτηση $P = f(I)$ ή $P = f(u)$ είναι μια παραβολή



Σχ. 2 Η ισχύς συναρτήσει της έντασης

Το ηλεκτρικό έργο εξαρτάται από την ισχύ και από τον χρόνο. Για τούτο ισχύει

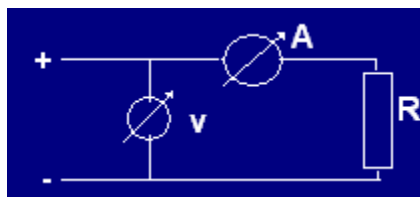
$$W = P \cdot t \quad \text{ή} \quad dW = P \cdot dt \quad (9)$$

Όπου $[W] = [P][T] = W \cdot S$ (που πληρώνουμε στη ΔΕΗ)

Η ηλεκτρική ενέργεια υπολογίζεται, έμμεσα μετά από μέτρηση της ισχύος και του χρόνου. Σε καθαρά ωμικό αποδέκτη η ηλεκτρική ενέργεια υπολογίζεται από τα αποτελέσματα των μετρήσεων της τάσης, της έντασης ρεύματος και του χρόνου .

3. Ηλεκτρική ενέργεια η ισχύς και θερμιδομετρία

Στο θερμιδόμετρο βυθίζεται μία ωμική αντίσταση, η οποία μέσω ενός αμπερομέτρου συνδέεται με πηγή συνεχούς η εναλλασσόμενου ρεύματος.



Σχ. 3 Συνδεσμολογία του θερμιδομέτρου.

Με την ένταση της λειτουργίας του κυκλώματος, στην αντίσταση παράγεται έργο, η θερμότητα Joule, η οποία μεταδίδεται πλήρως στο νερό. Επομένως, με (2) και (9) ισχύει

$$RI^2 = \Delta t = mc\Delta\theta \quad (10)$$

Διαιρώντας με το χρόνο λαμβάνεται η εξίσωση ισχύος

$$UI = RI^2 = mc \frac{\Delta\theta}{\Delta\tau} \quad (11)$$

Ο υπολογισμός της σχετικής θερμοχωρητικότητας του νερού, είναι δυνατός, εφόσον η τάση και η ένταση, η μάζα του νερού και η συνάρτηση $T=f(t)$ μπορούν να μετρηθούν.

ΠΡΑΚΤΙΚΟ ΜΕΡΟΣ

1. Προετοιμασία

1.1 Γέμισμα του θερμιδόμετρου με νερό των περίπου $V = 300\text{cm}^3$

1.2 Υπολογισμός της μάζας m του νερού ($m=q \nu$, $q=1 \text{ gr/cm}^3$, $m=B/g$) διά ογκομέτρησης ή ζύγισης

1.2 Πραγματοποίηση της συνδεσμολογίας του Σχ. 3

2 . Μετρήσεις

2.1 Διαβίβαση ρεύματος έντασης $< 4A$

2.2 Ανάγνωση και καταγραφή, των ενδείξεων U και I

2.3 Ανάγνωση και καταγραφή της αρχικής θερμοκρασίας T_0

2.4 a. Παρακολούθηση της θερμοκρασίας T συναρτήσει του χρόνου.

b. Καταγραφή των ενδείξεων κάθε 32 πρώτα (2) πρώτα λεπτά.

c. Κατασκευή αντίστοιχου πίνακα.

3. Αξιολόγηση των μετρήσεων

3.1 Κατασκευή γραφικής παράστασης $\Delta\theta=T_2-T_1=f(\Delta t)$

3.2 Υπολογισμός του μεγέθους $\Delta\theta/\Delta t$

3.3 Υπολογισμός της θερμότητας joule ανά μονάδα χρόνου σε γνωστή ειδική θερμοχωρητικότητα του νερού ($c=4.19\text{J/Kg } ^\circ\text{K}$)

3.4 Υπολογισμός της ηλεκτρικής ισχύος στην αντίσταση

3.5 Σύγκριση και ερμηνεία, σφάλμα.